

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 68 (1950)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies  
**Autor:** Favre, Henry / Gilg, Bernhard  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58012>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies

DK 620.171.5

Par HENRY FAVRE, Professeur à l'E. P. F. et BERNHARD GILG, Assistant à l'E. P. F.

Les efforts intérieurs agissant dans une plaque mince fléchie constituent un état de tension à trois dimensions. Il n'est donc pas possible de mesurer ces efforts à l'aide d'une des méthodes classiques de la photoélasticité bidimensionnelle, des procédés plus généraux doivent être utilisés dans ce but.

C'est ce qu'a fait H. G. Poertner, dans une thèse présentée en 1943 à l'Université de Washington<sup>1)</sup>, en appliquant la méthode du figeage des contraintes<sup>2)</sup> à la détermination des tensions dans une plaque circulaire encastrée. Cette méthode, qui permet de mesurer les tensions dans un modèle transparent quelconque à trois dimensions, est cependant d'un emploi assez délicat. D'autre part, dans la presque totalité des applications, il suffit de connaître les moments de flexion et de torsion sollicitant une plaque fléchie pour être renseigné avec suffisamment d'exactitude sur le jeu des forces intérieures.

C'est la raison pour laquelle le Laboratoire de Photoélasticité de l'E. P. F. a mis récemment au point une *méthode purement optique pour la mesure directe de ces moments*<sup>3)</sup>. L'objet du présent mémoire est précisément de décrire cette méthode et d'en donner une première application.

Dans le § 1, nous rappelons les principales propriétés des déformations et des tensions pour une plaque mince fléchie, faite d'une matière homogène et isotrope. Dans le § 2, nous précisons ces propriétés dans le cas où la plaque est faite de deux couches adhérentes de matières différentes. Ce sont de telles plaques qui permettent la mesure optique des moments de flexion et de torsion, comme nous le verrons. Le § 3 est consacré à la description de la méthode de mesure. Enfin, dans le § 4, nous donnons une application de la méthode à une plaque carrée, reposant en trois points et supportant une force appliquée en son centre.

Nous tenons à remercier sincèrement M. le Prof. Dr. H. Pallmann, Président du Conseil de l'E. P. F., qui a bien voulu faciliter nos recherches en allouant au Laboratoire une subvention, prélevée sur les intérêts de la *Fondation Daniel Jenny*.

L'Institut de Physique technique de l'E. P. F. a mis au point un procédé pour le collage des plaques qui a permis de réaliser notre méthode. Nous adressons à son directeur, M. le Prof. E. Baumann et à l'un de ses principaux collaborateurs, M. le Dr. F. Held, l'expression de notre vive reconnaissance.

Nous remercions également MM. Robert et Bereuter, Dr. ès Sc. techn., anciens assistants du Laboratoire de Photoélasticité, qui ont collaboré aux recherches faisant l'objet de ce mémoire.

M. E. Schiltknecht, constructeur d'appareils de précision, nous a été utile à diverses occasions. Nous l'en remercions aussi.

<sup>1)</sup> H. G. Poertner: Photoelastic Analysis of the Bending Stresses in thin Plates, Dissertation of the Washington University, Saint Louis, Missouri, 1943.

<sup>2)</sup> Voir par exemple G. Oppel: Polarisationsoptische Untersuchung räumlicher Spannungs- und Dehnungszustände, Thèse de l'Ecole Polytechnique de Munich, 1936, et R. Hiltzner: Polarisationsoptische Untersuchung des räumlichen Spannungszustandes im konvergenten Licht, Thèse de la même école, 1938.

<sup>3)</sup> Des recherches dans cette direction avaient été déjà entreprises dès 1941 par H. Favre et ses assistants M. Robert et R. Bereuter. Elles avaient dû être abandonnées en 1944, à cause des difficultés qu'il y avait en Suisse, pendant la guerre mondiale, à se procurer des matières transparentes adéquates. Reprises en juin 1949 par les deux auteurs de ce mémoire, elles purent être alors rapidement menées à bonne fin.

### § 1. Rappel des principales propriétés mécaniques d'une plaque fléchie, faite d'une matière homogène et isotrope. Examen entre nicols croisés dans le cas d'une matière transparente.

Considérons une plaque mince d'épaisseur  $h$ , posée ou encastrée le long du contour et sollicitée par des forces extérieures perpendiculaires aux faces (fig. 1). La matière constituant la plaque est supposée homogène et isotrope. Choisissons un système cartésien rectangulaire fixe  $Oxyz$ , les axes  $x, y$  étant situés dans le plan du feuillet moyen, avant la déformation. Soit  $\zeta_0 = \overline{PP'}$  le déplacement, parallèle à  $z$ , d'un point  $P(x, y)$  de ce plan. Le lieu des points  $P'(x, y, \zeta_0)$  est la «surface élastique».

On démontre, dans la théorie classique de la flexion des plaques, que sur des éléments de surface respectivement perpendiculaires aux axes  $x$  et  $y$  agissent les efforts suivants<sup>4)</sup>:

1°) des tensions normales  $\sigma_x, \sigma_y$  et des tensions tangentes  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , qui sont toutes du même ordre de grandeur. Ces tensions varient linéairement en fonction de la coordonnée  $z$  du point considéré, comme le montre la figure 2a<sup>5)</sup>. Elles sont équivalentes, pour l'épaisseur  $h$ , aux moments de flexion  $M_x, M_y$  et aux moments de torsion  $M_{xy} = M_{yx}$  relatifs à l'unité de longueur (fig. 2b);

2°) il existe en outre des tensions tangentes  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$ , parallèles à l'axe  $z$ , réparties paraboliquement dans l'épaisseur de la plaque, mais qui sont en général très petites par rapport à  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ . Ces tensions peuvent être négligées, sauf au voisinage des points où agissent des forces concentrées<sup>6)</sup>.

Il importe donc avant tout de pouvoir déterminer  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ , c'est-à-dire les moments  $M_x, M_y$  et  $M_{xy}$ , car ces derniers sont liés aux tensions par les formules:

$$(1) \quad \sigma_x = \frac{12 M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12 M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{12 M_{xy}}{h^3} z.$$

Ces moments sont eux-mêmes liés aux déplacements  $\zeta_0$  par les relations:

$$(2) \quad \begin{cases} M_x = -D \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right), \\ M_y = -D \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

où

$$(3) \quad D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)},$$

$E$  désignant le module d'élasticité et  $\nu$ , le nombre de Poisson.

Enfin, les déplacements  $\zeta_0$  doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du 4<sup>e</sup> ordre:

$$(4) \quad \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} = \frac{p}{D},$$

où  $p$  désigne une surcharge répartie éventuelle, par unité de surface.

Cette dernière équation détermine la fonction  $\zeta_0(x, y)$ , compte tenu des conditions aux limites. Les moments et les tensions se déduisent de cette fonction par les relations (2) et (1).

<sup>4)</sup> Voir par exemple S. Timoshenko: Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1940.

<sup>5)</sup>  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont nuls pour  $z = 0$ , le feuillet moyen est donc une surface neutre.

<sup>6)</sup> Il en est de même des tensions normales  $\sigma_z$ , agissant sur des éléments de surface perpendiculaires à l'axe  $z$ .

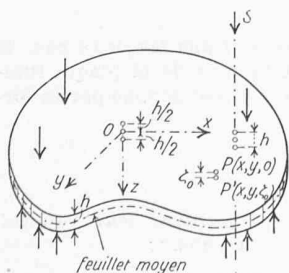


Fig. 1

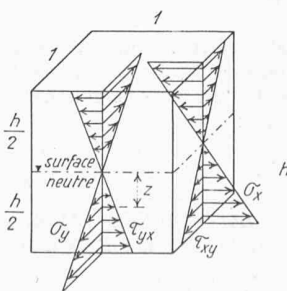


Fig. 2a

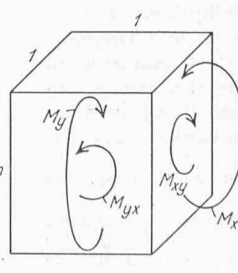


Fig. 2b

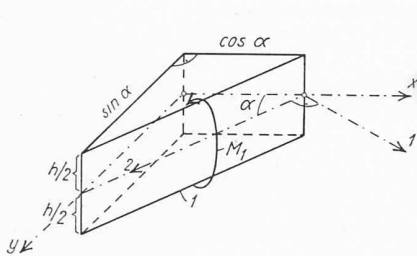


Fig. 3

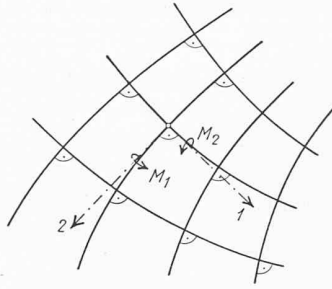


Fig. 4

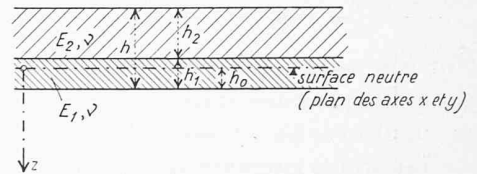


Fig. 5

Si le contour de la plaque est encastré ou posé, l'équation (4) montre que  $\zeta_0$  est inversement proportionnel à  $D^{(1)}$ . Dans ce cas, d'après les relations (2), les moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont indépendants de  $D$ , mais dépendent en général de la constante de Poisson  $\nu$ . Cette importante propriété nous sera utile plus loin.

Définissons les directions principales en un point  $(x, y)$  de la plaque. Ce sont deux directions orthogonales 1, 2, parallèles au plan du feuillet moyen, pour lesquelles les moments de torsion sont nuls. Les moments de flexion correspondants, que nous désignerons par  $M_1$ ,  $M_2$ , sont les moments de flexion principaux ou moments principaux.

Soit  $\alpha$  l'angle que fait une des directions principales, 2 par exemple, avec la partie négative de l'axe des  $x$  (fig. 3). Cet angle est déterminé, à  $\frac{\pi}{2}$  près, par la relation:

$$(5) \quad \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2M_{xy}}{M_y - M_x}$$

et les moments principaux ont les valeurs:

$$(6) \quad \begin{cases} M_1 = M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha, \\ M_2 = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha - M_{xy} \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Réciproquement, si l'on connaît l'angle  $\alpha$  et les moments principaux  $M_1$ ,  $M_2$ , les valeurs de  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont données par les formules:

$$(7) \quad \begin{cases} M_x = M_1 \sin^2 \alpha + M_2 \cos^2 \alpha, \\ M_y = M_1 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha, \\ M_{xy} = (M_1 - M_2) \sin \alpha \cos \alpha. \end{cases}$$

Ainsi, la connaissance de l'angle  $\alpha$  et des moments principaux  $M_1$ ,  $M_2$  nous renseigne complètement sur les moments de flexion et de torsion sollicitant la plaque et, conséquemment, sur les tensions intérieures  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ , grâce aux formules (1). Or  $\alpha$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont précisément les grandeurs que donnera la méthode optique décrite au § 3.

Les directions principales 1, 2 définissent les trajectoires des moments principaux (fig. 4).

Supposons maintenant que la plaque soit transparente et considérons un rayon lumineux polarisé rectilignement  $SS'$ , qui la traverse perpendiculairement à ses faces (fig. 1). Ce rayon subit, dans la première moitié  $-\frac{h}{2} < z < 0$  de l'épaisseur, des modifications importantes, dues à la biréfringence accidentelle engendrée par les tensions  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ . Ces modifications étant exactement compensées par celles de sens contraires qu'il subit dans la seconde moitié  $0 < z < +\frac{h}{2}$ , le rayon émerge de la plaque en ayant retrouvé sa constitution primitive.

En examinant entre nicols croisés une plaque transparente fléchée satisfaisant aux conditions indiquées, on n'observera donc aucun phénomène particulier de biréfringence accidentelle: le rayon sera éteint par le nicol analyseur<sup>8)</sup>.

Si l'on veut, à l'aide de la lumière polarisée, rendre apparentes les tensions dans une plaque fléchée, il est donc nécessaire d'empêcher le rayon de retrouver sa constitution pri-

<sup>7)</sup> Il en est de même si le contour est entièrement libre sur une certaine longueur.

<sup>8)</sup> Ceci suppose que le feuillet moyen ne subisse aucun étirement et que les tensions tangentielles  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  soient partout négligeables. Si l'une ou l'autre de ces deux conditions n'était pas remplie, le rayon émergeant de la plaque ne serait pas complètement éteint par l'analyseur. Ce sera en particulier le cas au voisinage du point d'application d'une force concentrée.

mitive. On arrive à ce résultat en utilisant une plaque formée de deux couches parallèles adhérentes, de matières transparentes différentes, comme nous le verrons plus loin. C'est pourquoi nous examinerons tout d'abord ce que devient dans ce cas les équations et les propriétés indiquées plus haut.

## § 2. Propriétés mécaniques d'une plaque fléchée, formée de deux couches adhérentes, de matières différentes.

Soit une plaque mince fléchée, formée de deux couches de matières différentes, totalement adhérentes l'une à l'autre, par exemple par collage (fig. 5). Nous supposons que chaque couche soit une lame à faces parallèles, faite d'une matière homogène et isotrope.

Désignons par  $h_1$ ,  $h_2$  les épaisseurs respectives de ces lames et par  $E_1$ ,  $E_2$  leurs modules d'élasticité, qui peuvent être quelconques. Nous admettrons par contre que les deux nombres de Poisson correspondants aient la même valeur. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la répartition des tensions dans les corps solides élastiques ne dépend que très peu du nombre  $\nu$ , comme le montre la théorie de l'élasticité.

Faisons une seconde hypothèse simplificatrice. Admettons, comme dans la théorie des plaques homogènes fléchies, que tout segment rectiligne, perpendiculaire aux faces de la plaque avant la déformation, se transforme en un nouveau segment de droite, situé sur une normale commune aux surfaces limitant les deux couches.

Des considérations élémentaires montrent alors que les tensions  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  sont réparties dans l'épaisseur de la plaque selon la figure 6<sup>9)</sup>. Ces tensions varient linéairement et restent entre elles dans le même rapport, mais accusent une discontinuité dans la surface séparant les deux couches. Elles sont d'autre part équivalentes, pour l'épaisseur  $h = h_1 + h_2$ , aux moments de flexion  $M_x$ ,  $M_y$  et de torsion  $M_{xy} = M_{yx}$  représentés dans la figure 2b. En conséquence, tout ce que nous avons dit au § 1 au sujet des moments de flexion principaux  $M_1$ ,  $M_2$  est encore valable ici.

Il existe également, dans le cas considéré, une surface neutre, qui est le plan où  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont nuls. Ce plan, dans lequel nous choisissons les axes  $x$  et  $y$ , ne subit aucun étirement. Sa transformée est la surface élastique. La surface neutre est dans la couche d'épaisseur  $h_1$  ou dans celle d'épaisseur  $h_2$ , selon que l'expression

$$(8) \quad \frac{n h_2 (h + h_1) + h_1^2}{2(h_1 + n h_2) h_1},$$

où

$$(9) \quad n = \frac{E_2}{E_1},$$

est inférieure ou supérieure à l'unité. Dans les deux cas, la distance  $h_0$  de la surface neutre à la face de la plaque limitant d'un côté la couche d'épaisseur  $h_1$  est donnée par la formule:

$$(10) \quad h_0 = \frac{n h_2 (h + h_1) + h_1^2}{2(h_1 + n h_2)}.$$

Les équations (2) et (4) du § 1 gardent leur validité, mais le coefficient  $D$  a maintenant la valeur:

<sup>9)</sup> Ici encore, les tensions  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  et  $\sigma_z$  sont très petites et peuvent être négligées, sauf au voisinage des points d'application des forces concentrées.

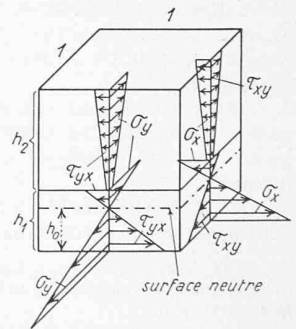


Fig. 6

$$(11) \quad D = \frac{1}{3(1-\nu^2)} \left\{ E_1 [(h_1 - h_0)^3 + h_0^3] + E_2 [(h - h_0)^3 - (h_1 - h_0)^3] \right\}.$$

Dans cette équation,  $\nu$  désigne le nombre de Poisson commun aux deux couches<sup>10)</sup>.

Nous arrivons ainsi à la même conclusion que dans le cas de la plaque homogène: Si le contour est encastré ou posé, les moments  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  ne dépendent pas de  $D$ , mais seulement de  $\nu$ .

On pourra donc étudier la répartition des moments dans une plaque de bois, d'acier ou de béton armé, encastrée ou posée, en mesurant les moments dans un modèle réduit constitué par deux couches de matières différentes, pourvu que les nombres de Poisson de l'objet et de son modèle ne diffèrent pas notablement<sup>11)</sup>.

### § 3. La mesure purement optique des moments dans une plaque fléchie, formée de deux couches transparentes et adhérentes.

Considérons maintenant une plaque transparente, satisfaisant aux conditions énoncées au début du paragraphe précédent et supposons qu'un rayon polarisé incident  $SG$  de lumière monochromatique la traverse perpendiculairement (fig. 7). Tout le long de son parcours, ce rayon rencontrera successivement des couches élémentaires d'épaisseur  $dz$  où l'on peut admettre que l'état de tension est bidimensionnel, car  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont négligeables (fig. 8)<sup>12)</sup>.

D'autre part, nous avons vu que les tensions  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  restent entre elles dans le même rapport; les directions des tensions principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  de chacune de ces couches seront donc parallèles. Ces directions coïncident d'ailleurs avec celles 1, 2 des moments principaux  $M_1$ ,  $M_2$  définies au § 1. En traversant la première couche, le rayon sera donc transformé en deux nouveaux rayons polarisés, vibrant parallèlement aux directions 1, 2 respectivement. Chacun des deux rayons ainsi formés traversera les couches suivantes en restant polarisé rectilignement et en gardant la même direction de vibration, puisque les tensions principales de même indice sont parallèles en tous les points de ce rayon.

A la sortie de la plaque, on aura en définitive deux rayons polarisés rectilignement, vibrant parallèlement aux directions 1 et 2. A l'aide d'un nicol analyseur, il sera donc facile de déterminer ces directions en un nombre quelconque de points, c'est-à-dire de mesurer en ces points l'angle  $\alpha$  défini au premier paragraphe. On en déduira ensuite graphiquement les trajectoires des moments principaux.

Les deux rayons émergents accusent une différence relative de marche  $\delta_3$ , qui est la somme de celles acquises en traversant les différentes couches élémentaires. Pour une couche d'épaisseur  $dz$ , cette différence est, d'après la loi de Wertheim:

$$d(\delta_3) = c(\sigma_1 - \sigma_2) dz,$$

<sup>10)</sup> Si le nombre de Poisson n'est pas le même pour les deux couches, il n'existe plus de surface neutre, c'est-à-dire de surface où les trois tensions  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont nulles toutes les trois. Dans ce cas cependant les trois points de chaque normale où s'annulent respectivement ces tensions sont suffisamment voisins les uns des autres pour que l'on puisse utiliser les relations (2) et (4) comme de très bonnes équations approchées.

<sup>11)</sup> Cette condition jouera un rôle tout à fait secondaire dans les applications puisque, comme nous l'avons déjà dit, le nombre de Poisson n'a qu'une très faible influence sur la valeur des tensions.

<sup>12)</sup> Nous exceptons les zones voisines des points d'application des forces concentrées.

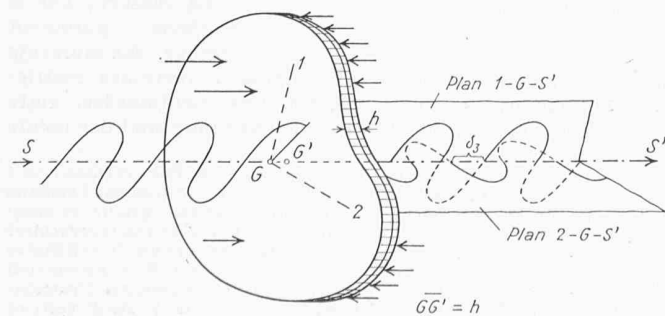


Fig. 7

$c(z)$  désignant un coefficient dépendant de la matière traversée et de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayon dans l'air. Or  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant proportionnels aux moments  $M_1$  et  $M_2$ , on peut poser

$$\sigma_1 = f(z) \cdot M_1, \quad \sigma_2 = f(z) \cdot M_2,$$

$f(z)$  désignant une fonction qu'il serait facile de déterminer, d'où:

$$\delta_3 = \int_c (\sigma_1 - \sigma_2) dz = (M_1 - M_2) \int_c f(z) f(z) dz,$$

ou encore:

$$(12) \quad \delta_3 = C(M_1 - M_2),$$

$C = \int_c f(z) f(z) dz$  étant une constante dépendant des matières

constituant les deux couches, de leurs épaisseurs  $h_1$ ,  $h_2$  et de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayon dans l'air. Cette constante  $C$  peut être déterminée directement, à l'aide d'une éprouvette où les moments  $M_1$ ,  $M_2$  sont connus, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

En mesurant  $\delta_3$  à l'aide d'un compensateur, la relation (12) constituera ainsi une première équation pour déterminer les deux inconnues  $M_1$  et  $M_2$ .

Il est possible d'obtenir deux autres équations. Soit  $\delta_1$  la variation absolue de marche, produite par la mise en charge de la plaque, que subit un rayon polarisé qui la traverse en vibrant parallèlement à la direction 1 et soit  $\delta_2$  la grandeur analogue relative à la direction 2. Pour une couche élémentaire d'épaisseur  $dz$ , les variations absolues correspondantes sont données par les formules<sup>13)</sup>:

$$\begin{cases} d(\delta_1) = (a\sigma_1 + b\sigma_2) dz, \\ d(\delta_2) = (b\sigma_1 + a\sigma_2) dz, \end{cases}$$

où  $a$ ,  $b$  désignent des coefficients dépendant de la matière traversée et de la longueur d'onde  $\lambda$ .

On en déduit, par un raisonnement analogue à celui utilisé plus haut pour  $\delta_3$ :

$$(13) \quad \begin{cases} \delta_1 = A M_1 + B M_2 \\ \delta_2 = B M_1 + A M_2 \end{cases},$$

où les coefficients  $A$ ,  $B$  dépendent, comme  $C$ , des matières constituant les deux couches, de leurs épaisseurs et de la longueur d'onde  $\lambda$ . Ces coefficients peuvent être déterminés à l'aide de la même éprouvette dont il est question plus haut.

En mesurant  $\delta_1$  et  $\delta_2$  à l'aide d'un interféromètre, les relations (13) constituent ainsi deux nouvelles équations pour déterminer  $M_1$  et  $M_2$ .

Remarquons en passant qu'en introduisant les valeurs (12) et (13), obtenues pour  $\delta_3$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  dans la relation évidente

$$(14) \quad \delta_3 = \delta_1 - \delta_2,$$

on obtient:

$$(15) \quad C = A - B.$$

En résumé, on dispose des trois équations (12) et (13) pour calculer, en chaque point de la plaque, les deux inconnues  $M_1$  et  $M_2$ . A l'aide de la méthode des moindres carrés de Gauss, il est alors facile de déterminer les valeurs les plus probables de  $M_1$ ,  $M_2$  en fonction des grandeurs mesurées  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , ainsi que les erreurs moyennes  $\mu_{M_1}$ ,  $\mu_{M_2}$  des résultats. On obtient<sup>14)</sup>:

$$(16) \quad \begin{cases} M_1 = R_{11} \delta_1 + R_{21} \delta_2 + R_{31} \delta_3, \\ M_2 = R_{12} \delta_1 + R_{22} \delta_2 + R_{32} \delta_3, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \mu_{M_1} = \pm \Theta_1 (\delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \\ \mu_{M_2} = \pm \Theta_2 (\delta_1 - \delta_2 - \delta_3). \end{cases}$$

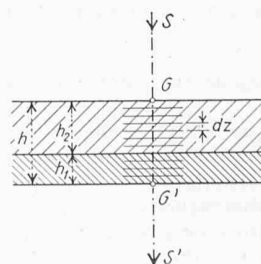


Fig. 8

Dans ces formules,  $R_{11}$ ,  $R_{21}$ , ...,  $\Theta_2$  sont des coefficients qui sont uniquement fonctions des trois constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et des «poids»  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  attribués aux

<sup>13)</sup> Voir H. Favre: Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures, Editions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale, Paris, 1929; voir aussi Schweiz. Bauzeitung des 3 et 10 décembre 1927.

<sup>14)</sup> Voir H. Favre: Loc. cit., où le même calcul a été fait pour la photo-élasticité bidimensionnelle.



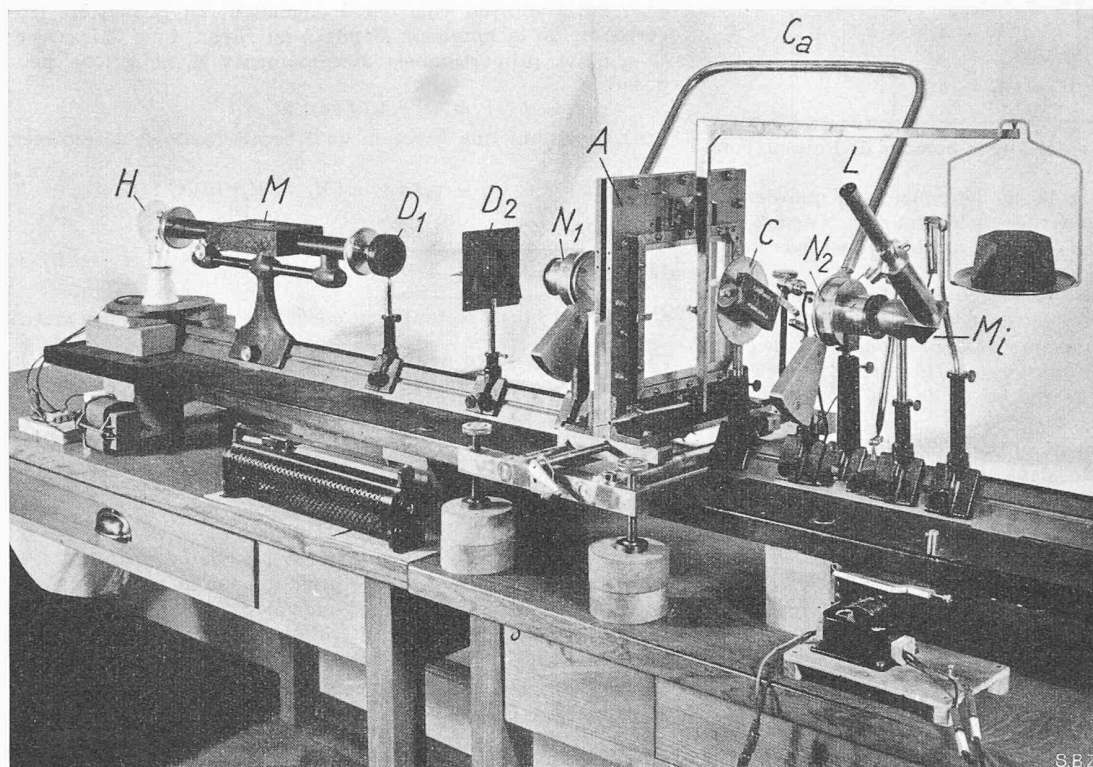


Fig. 9. Installation pour la détermination de  $\alpha$  et de  $\delta_3$ . H lampe à mercure, M monochromateur,  $D_1, D_2$  diaphragmes,  $N_1, N_2$  nicols croisés reliés par le cadre  $Ca$ , C compensateur de Bravais,  $M_i$  miroir, L lunette, A appareil supportant la plaque fléchée étudiée et lui appliquant une force au centre

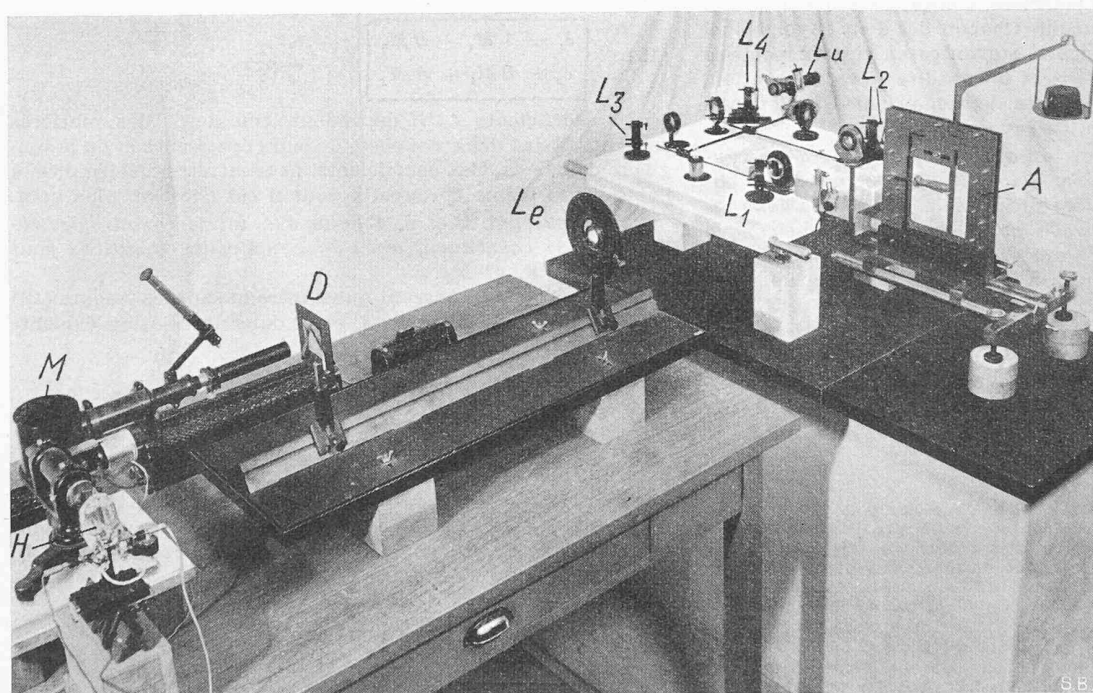


Fig. 10. Installation pour la détermination de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . H lampe à mercure, M monochromateur, D diaphragme et filtre polariseur,  $L_e$  lentille,  $L_1, L_2, L_3, L_4$  lames principales de l'interféromètre,  $L_u$  lunette où s'observent les franges d'interférence, A appareil supportant la plaque fléchée étudiée et lui appliquant une force au centre (cet appareil est déplacé vers la droite)

mesures de  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ . Ces coefficients se calculent une fois pour toutes pour une plaque donnée.

La méthode purement optique que nous venons d'exposer présente une analogie parfaite avec celle utilisée depuis 22 ans par le Laboratoire de Photoélasticité de l'E. P. F. pour étudier les états de tension à deux dimensions. Dans la nouvelle méthode, en effet, on mesure trois grandeurs  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  tout à fait analogues à celles intervenant dans le cas de deux dimensions et les inconnues  $M_1, M_2$  sont liées aux grandeurs mesurées par des systèmes d'équations qui sont les mêmes que celles liant les tensions principales  $\sigma_1, \sigma_2$  à  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ,

dans un état de tension bidimensionnel. Ceci n'a rien de surprenant, puisque nous avons vu qu'une plaque fléchée, formée de deux couches adhérentes, peut être considérée comme la juxtaposition d'un grand nombre de couches élémentaires parallèles, où règnent des états de tension bidimensionnels qu'on peut tous obtenir en multipliant les tensions de l'un d'eux par un facteur convenablement choisi.

La conséquence immédiate de cette analogie est que les mêmes appareils peuvent servir dans les deux cas. Aussi nous permettons-nous de renvoyer le lecteur à des publications antérieures pour la description de ces appareils et la technique des mesures<sup>15)</sup>.

La figure 9 représente l'installation pour la détermination de  $\alpha$  et de  $\delta_3$ . Pour mesurer la différence de marche relative  $\delta_3$ , nous utilisons un compensateur de Bravais. Cet appareil est enlevé du banc optique, lorsqu'on détermine l'angle  $\alpha$ .

La figure 10 montre l'installation pour la détermination de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Cette détermination est faite à l'aide d'un interféromètre à quatre lames de Mach-Zehnder.

Dans toutes les mesures, le rayon traversant le modèle de plaque a un diamètre d'environ 0,5 mm. La lumière monochromatique utilisée est la raie verte de l'arc de mercure, dont la longueur d'onde est de 0,5461  $\mu$ .

#### Remarque

La mesure, par la méthode purement optique, des moments

dans les plaques fléchies est soumise à certaines restrictions. Pour des raisons plusieurs fois mentionnées, cette méthode ne peut être utilisée au voisinage immédiat des points

<sup>15)</sup> Voir H. Favre: Loc. cit. Voir également les Publications Nos. 1 à 4 du Laboratoire de Photoélasticité de l'E. P. F., éditées par Leemann Frères, 64, Stockerstr., Zurich. La méthode purement optique est aussi utilisée, en photoélasticité bidimensionnelle, par d'autres laboratoires que celui de l'E. P. F., notamment par le Laboratoire du United States Bureau of Reclamation, à Denver (Colorado); voir J. H. A. Brahtz and J. E. Soehrens: Direct Optical Measurement of Individual Principal Stresses; Journal of Applied Physics, Vol. 10, 1939, p. 242 et suiv. et également les différents rapports du laboratoire de Denver.

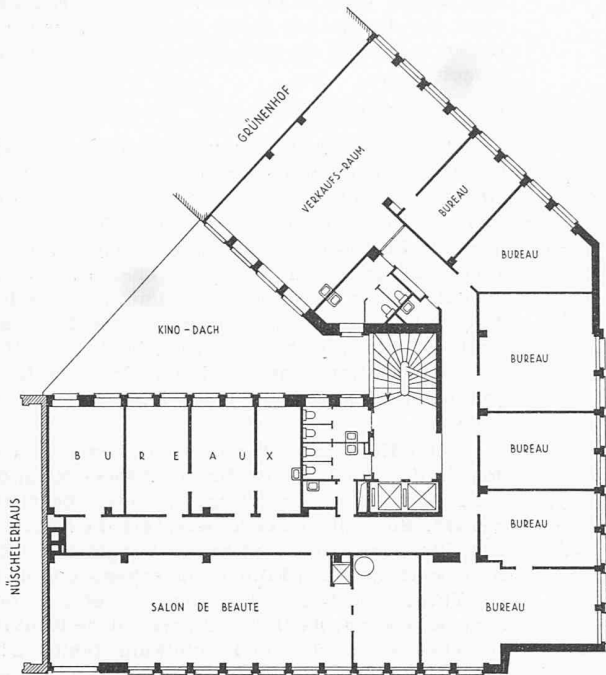


Bild 1. Obergeschoss, 1:400

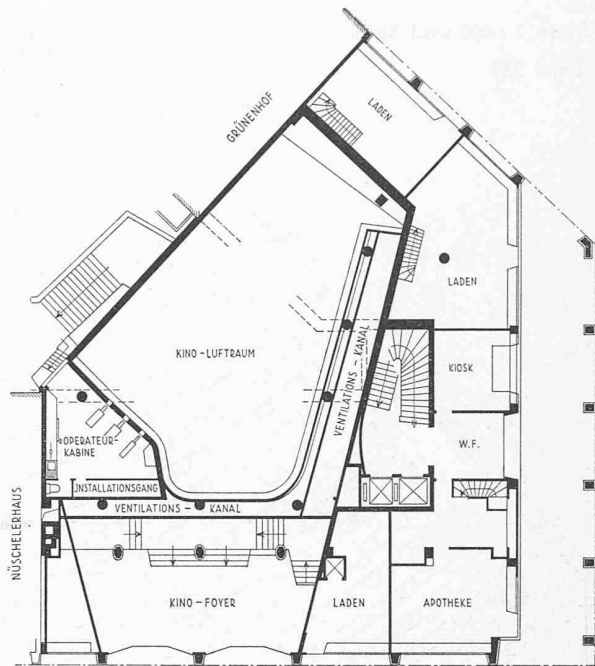


Bild 2. Zwischengeschoss mit Operateurkabine

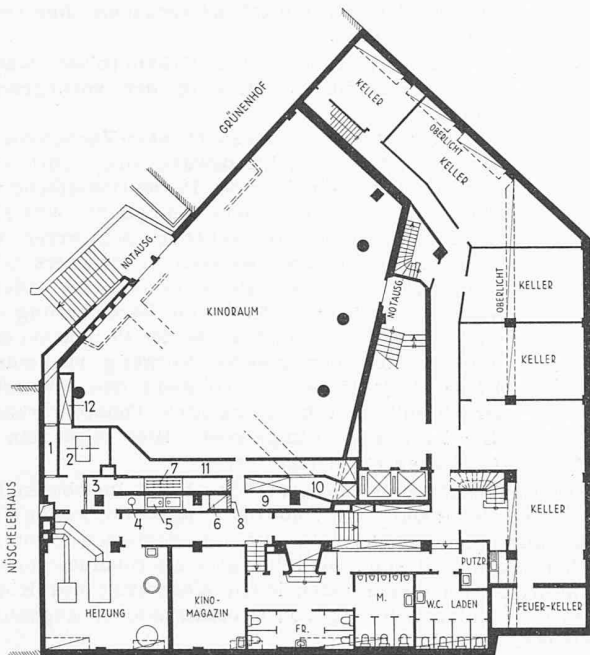


Bild 4. Kellergeschoss mit Nebenräumen. 1 Frischluftkanal, 2 Ventilator, 3 Filter, 4 Pumpe, 5 Wasserbecken, 6 Erhitzer, 7 Wascher, 8 Klappen, 9 automatische Steuerung, 10 Schalldämpfer Zuluft, 11 Abluft, 12 Schalldämpfer Abluft

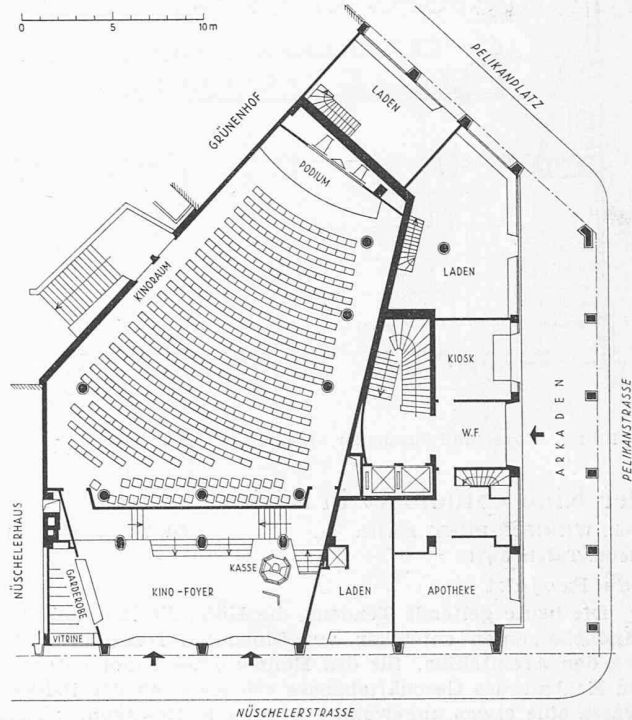


Bild 3. Erdgeschoss mit Kinoraum und Läden, 1:400

d'application des forces concentrées. Ceci n'a d'ailleurs qu'une importance relative, car en de tels points les moments sont infiniment grands, comme l'indique la théorie classique des plaques fléchies. Plus important est par contre le fait qu'il est peu commode de faire une mesure optique quelconque en un point situé dans une zone soumise à l'action directe d'une surcharge répartie, la présence de cette surcharge étant un obstacle à cette mesure. Enfin, l'interprétation des mesures à l'interféromètre est délicate en tout point où l'inclinaison de la surface élastique dépasse une certaine limite. Nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur ce dernier point. (à suivre)

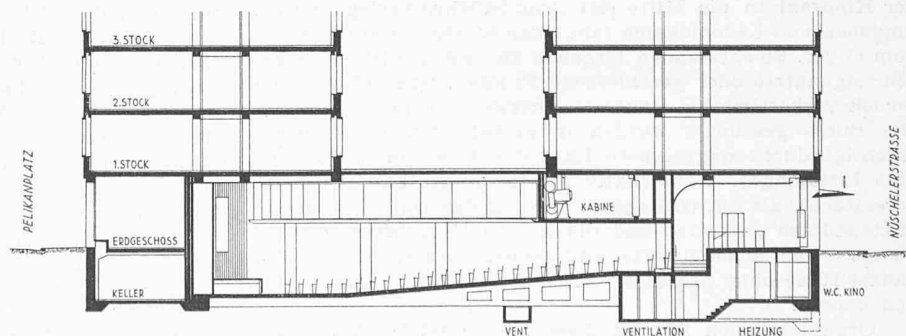


Bild 5. Schnitt durch Kinoraum und Foyer, 1:400

Der Kino „Studio 4“ in Zürich. Arch. W. FREY, Zürich