Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67 (1949)
Heft: 4: Zum Rücktritt von Schulrats-Präsident Rohn, 2. Heft

Artikel: Ueber kleine Bewegungen in nicht vollkommen elastischen Körpern
Autor: Gassmann, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83991

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

67. Jahrgang Nr. 4

Zum Rücktritt von Schulratspräsident Rohn, 2. Heft

Ueber kleine Bewegungen in nicht vollkommen elastischen Körpern

DK 538.313

Von Prof. Dr. FRITZ GASSMANN, Zürich

1. Einleitung

In der Kontinuumsmechanik werden die kleinen Deformationen, die ein fester Körper unter der Einwirkung von Kräften erleidet, in erster Annäherung dadurch beschrieben, dass man den Körper als vollkommen elastisch betrachtet, d. h. die Gültigkeit des Hookeschen Elastizitätsgesetzes voraussetzt. Es gibt jedoch Phänomene, die auf diese Art nicht beschrieben werden können, wie z. B. die Dämpfung von mechanischen Schwingungen durch sog. innere Reibung. Zur Beschreibung solcher Phänomene existieren eine ganze Reihe von Ansätzen, von denen sich die bekanntesten als Spezialfälle eines allgemeinen Ansatzes darstellen lassen, der für isotrope Medien in der vorliegenden Arbeit besprochen werden soll.

2. Lineare Differentialoperatoren

Im folgenden sei jeder mit einem * versehene Buchstabe das Zeichen für ein Polynom einer Variabeln nach dem Muster

$$A^*(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots + A_h u^h. \tag{1}$$

Es sei t die Zeit und $\overline{A}$ der zu A^* gehörende Differentialoperator, d. h. wenn $f(t)$ eine gegebene Funktion von t ist, so ist

$$\overline{A}(f) = \overline{A} f = A_0 f + A_1 \frac{\partial f}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \ldots + A_h \frac{\partial^h f}{\partial t^h}. \tag{2}$$

Sind beispielsweise k_1 und k_2 von t unabhängige Grössen, so gilt

$$\overline{A}\, e^{k_1 t + k_2} = A^*(k_1)\, e^{k_1 t + k_2}. \tag{3}$$

Ist ferner $C^*(u)$ ein zweites Polynom, vom Grade h', und

$$L^*(u) = A^*(u)\, C^*(u), \tag{4}$$

so ist der Operator, der durch Hintereinanderausführung der Operationen $\overline{A}$ und $\overline{C}$ entsteht, gerade $\overline{L}$, d. h.

$$\overline{C}[\overline{A}(f)] = \overline{A}[\overline{C}(f)] = \overline{L}(f). \tag{5}$$

Es genügt daher, diesen Operator einfach mit $\overline{AC}$ zu bezeichnen.

3. Der Spannungszustand

In einem rechtwinkligen (x, y, z)-Koordinatensystem ist der Spannungszustand in einem Körper durch den symmetrischen Tensor (über Tensoren im dreidimensionalen Raum orientiert z. B. [1])

$$\Pi' = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} \tag{6}$$

gegeben.

$$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \tag{7}$$

ist die mittlere Normalspannung, und der Spannungszustand Π' lässt sich zerlegen in einen hydrostatischen Spannungszustand mit Spannung p und einen Spannungszustand Π mit mittlerer Normalspannung Null, also

$$\Pi' = \Gamma p + \Pi. \tag{8}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Einheitstensor.} \tag{9}$$

4. Der Verzerrungszustand

Die als klein vorausgesetzte Verzerrung, die der Körper infolge der Einwirkung der Spannungen erfährt, ist gegeben durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{s}$ mit den rechtwinkligen Komponenten s_x, s_y, s_z. $\mathfrak{s}$ verbindet die ursprüngliche Lage eines Materieteilchens mit der augenblicklichen Lage im verzerrten Zustand. Gleichung (10) stellt den Verzerrungstensor dar; Gleichung (11) die mittlere lineare Dehnung:

$$\vartheta = \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathfrak{s} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z}\right). \tag{11}$$

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Der Verzerrungszustand Ψ' lässt sich zerlegen in eine gleichmässige Dilatation mit der linearen Dehnung ϑ und eine Verzerrung Ψ mit mittlerer Dehnung Null, also

$$\Psi' = \Gamma \vartheta + \Psi. \tag{12}$$

5. Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung

Für den vollkommen elastischen isotropen Körper bestehen die das Hooke'sche Gesetz ausdrückenden Beziehungen

$$p = 3k\vartheta, \quad \Pi = 2G\Psi. \tag{13}$$

k ist der Kompressionsmodul, G der Schubmodul des Materials. Der Zugmodul E ist durch die Gleichung

$$\frac{3}{E} = \frac{1}{G} + \frac{1}{3k} \tag{14}$$

gegeben. Die Beziehungen (13) sollen nun dadurch verallgemeinert werden, dass an Stelle der konstanten Faktoren Differentialoperatoren im Sinne von Abschnitt 2 gesetzt werden, nämlich

$$\overline{A}(p) = \overline{B}(\vartheta), \quad \overline{C}(\Pi) = \overline{D}(\Psi). \tag{15}$$

6. Bewegungsgleichungen des Mediums

Ist $\mathfrak{K}$ die auf das Massenelement wirkende äussere Kraft pro Volumeneinheit und ϱ die Dichte des Mediums, so besteht für kleine Bewegungen die Gleichung

$$\varrho \ddot{\mathfrak{s}} - \mathfrak{K} = \operatorname{div} \Pi' \quad \text{mit} \quad \ddot{\mathfrak{s}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2}. \tag{16}$$

Zu den Differentialgleichungen für die Komponenten von $\mathfrak{s}$ gelangt man nun durch folgende Umformungen: Mit der Identität $\operatorname{div}(\Gamma p) = \operatorname{grad} p$ wird nach (8) $\operatorname{div} \Pi' = \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \Pi$. Dies setzt man in (16) ein und wendet dann auf diese Gleichung den durch (4) und (5) definierten Operator $\overline{L} = \overline{AC}$ an:

$$\overline{AC}(\varrho \ddot{\mathfrak{s}} - \mathfrak{K}) = \overline{CA} \operatorname{grad} p + \overline{AC} \operatorname{div} \Pi.$$

Nach (15) und (11) ist

$$\overline{CA} \operatorname{grad} p = \overline{C} \operatorname{grad} \overline{A} p = \overline{C} \operatorname{grad} \overline{B}\vartheta = \frac{1}{3}\overline{CB} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{s}.$$

Ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Operator von Laplace, so gilt die Identität

$$\operatorname{div} \Psi = \frac{1}{2}\Delta \mathfrak{s} + \frac{1}{6} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{s}. \tag{17}$$

Nach (15) wird demgemäss

$$\overline{AC} \operatorname{div} \Pi = \overline{AD} \operatorname{div} \Psi = \overline{AD}\left(\frac{1}{2}\Delta \mathfrak{s} + \frac{1}{6} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{s}\right).$$

Die Gleichung (16) wird nunmehr zu

$$\overline{AC}(\varrho \ddot{\mathfrak{s}} - \mathfrak{K}) = \frac{1}{2}\overline{AD}\Delta \mathfrak{s} + \left(\frac{1}{6}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{BC}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{s}. \tag{18}$$

Eine zweite Form dieser Gleichung erhält man durch Anwendung der Identität $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{s} = \Delta \mathfrak{s} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{s}$.

$$\overline{AC}(\varrho \ddot{\mathfrak{s}} - \mathfrak{K}) = \left(\frac{2}{3}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{BC}\right)\Delta \mathfrak{s} + \left(\frac{1}{6}\overline{AD} + \frac{1}{3}\overline{BC}\right) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{s}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (18) und (19) sind zwei Formen der Bewegungsgleichung für $\mathfrak{s}$, von denen die bekannten Bewe-

gungsgleichungen für vollkommen elastische isotrope Körper (siehe z. B. [2], Seite 66) Spezialfälle darstellen, entsprechend der Tatsache, dass das Hooke'sche Gesetz (13) ein Spezialfall des allgemeinen Gesetzes (15) ist.

7. Fortschreitende Wellen

Die Bewegungsgleichungen (18) oder (19) bilden die Grundlage zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Mediums. Als Beispiel werde das Medium als allseitig unendlich ausgedehnt angenommen und es soll die Möglichkeit der Fortpflanzung von Wellen im Medium untersucht werden. Es soll der einfachste Fall $\mathfrak{K} = 0$, $\varrho = \text{const.}$ angenommen werden. Zur Erzeugung der Wellen denke man sich die Materieteilchen, die in der Ruhelage in der (y, z)-Ebene liegen, zu einer starren Ebene (= Grundebene) verbunden, die gezwungen wird, sinusförmige Parallelverschiebungen von gegebener fester Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ auszuführen. Es sollen die ebenen, homogenen Wellen betrachtet werden, die dadurch im Halbraum $x \geqq 0$ entstehen und sich in $+x$-Richtung fortpflanzen. Dabei sollen folgende beiden Fälle a) und b) behandelt werden, aus denen sich allgemeinere Fälle zusammensetzen lassen.

Fall a): Die Grundebene schwingt in x-Richtung. $\mathfrak{s}$ hat im ganzen Raume nur eine x-Komponente $s = s_x$, die von x und t, nicht aber von y und z abhängt. Die Wellen sind longitudinal und rot $\mathfrak{s} = 0$. Gleichung (19) erhält die Form

$$(20) \qquad \overline{H}\,\ddot{s} = \overline{M}\,\Delta s\,,$$

wobei $\overline{H} = \overline{H}_a = \overline{AC}$ und $\overline{M} = \overline{M}_a = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{2}{3}\,\overline{AD} + \frac{1}{3}\,\overline{BC}\right)$ ist.

Fall b): Die Grundebene schwingt in y-Richtung. $\mathfrak{s}$ hat im ganzen Raum nur eine y-Komponente $s = s_y$, die von x und t, nicht aber von y und z abhängt. Die Wellen sind transversal und in y-Richtung polarisiert, div $\mathfrak{s} = 0$ und Gleichung (18) erhält wiederum die Form (20), wobei

$$\overline{H} = \overline{H}_b = \overline{C} \text{ und } \overline{M} = \overline{M}_b = \frac{1}{2\varrho}\,\overline{D}$$

zu setzen ist. Auf Grund von (20) lassen sich beide Fälle einheitlich behandeln. Es sei der Ansatz

$$(21) \qquad s = s_0\, e^{-(\varepsilon + j\beta)\,x + j\omega t}$$

gemacht. $j = \sqrt{-1}$; s_0, ε, β sind positive Konstanten. Der Ansatz ist komplex. Da aber die Differentialgleichung (20) linear und mit reellen Koeffizienten versehen ist, sind sowohl der reelle wie der imaginäre Teil von (21) für sich reelle Lösungen von (20). (21) ergibt für $x = 0$ die Bewegung der Grundebene, die wie vorausgesetzt eine reine Sinusbewegung ist. Allgemein ist in (21) $s_0\, e^{-\varepsilon x}$ die Amplitude, ε der Dämpfungsexponent, $\Lambda = 2\pi/\beta$ die Wellenlänge, $c = \omega/\beta$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Setzt man (21) in (20) ein, so erhält man unter Beachtung von (3):

$$(22) \qquad (\varepsilon + j\beta)^2 = \frac{-\omega^2 H^*(j\omega)}{M^*(j\omega)} = \alpha_1 + j\alpha_2\,.$$

α_1 ist der Realteil, α_2 der Imaginärteil des Quotienten in (22). Beides sind reelle, bekannte Funktionen der gegebenen Grösse ω. Die Auflösung nach ε und β ergibt

$$(23) \qquad \varepsilon = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right)}\,,$$

$$\beta = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right)}\,.$$

Geht man von (21) zu einer reellen Lösung zurück und berechnet nach (16) daraus den Spannungszustand, so kann man die Energie K berechnen, die im Mittel in der Zeiteinheit durch eine senkrecht zur x-Axe stehende Einheitsfläche in $+x$-Richtung fliesst ([5], § 125, Seite 210).

$$(24) \qquad K = \left| -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\Pi'\,\dot{\mathfrak{s}})\,dt \right| = \frac{\varrho\, s_0^2}{2}\,\frac{\omega^3\beta}{\varepsilon^2 + \beta^2}\, e^{-2\varepsilon x}\,.$$

$$(25) \qquad -\frac{\partial K}{\partial x} = \varrho\, s_0^2\,\frac{\omega^3\beta\,\varepsilon}{\varepsilon^2 + \beta^2}\, e^{-2\varepsilon x}$$

ist die mechanische Energie pro Volumeneinheit, die im Mittel in der Zeiteinheit in irgendeinem Punkte des Mediums verloren geht. Der Energieverlust ist also Null, wenn $\varepsilon = 0$ ist. Dies ist beim vollkommen elastischen Medium (13) der Fall, wie man aus (22) und (23) abliest. Die Polynome H^* und M^* reduzieren sich nämlich in diesem Falle auf reelle positive Konstanten. Bekanntlich sind in diesem Falle die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Longitudinal- und der Transversalwellen von der Wellenlänge unabhängig. Im allgemeinen Fall (15) hingegen wird $\varepsilon > 0$. Es tritt Verlust an mechanischer Energie und überdies Dispersion ein, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt von der Wellenlänge ab. Weicht das Medium nur wenig von einem vollkommen elastischen ab, so enthalten die Polynome H^* und M^* Koeffizienten, die klein sind gegenüber den der vollkommenen Elastizität entsprechenden Hauptkoeffizienten. ε und β in (23) lassen sich dann in Reihen nach den kleinen Koeffizienten entwickeln. Es zeigt sich dabei, dass z. B. in den in Abschnitt 8 und 9 erwähnten Fällen in erster Annäherung wohl Absorption, aber keine Dispersion auftritt.

8. Der isotrope Festkörper nach Jeffreys ([4] und [7])

Für dieses Beispiel haben die Gleichungen (15) folgende Form:

$$(26) \qquad p = 3k\vartheta\,,\ \eta\Pi + \frac{\partial}{\partial t}\Pi = 2G\frac{\partial}{\partial t}\Psi + \alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\,.$$

k, G, η und α sind Materialkonstanten, von denen η und α Viskositätskoeffizienten darstellen. Man liest folgende Operatoren ab:

$$\overline{A} = 1\,,\ \overline{B} = 3k\,,\ \overline{C} = \eta + \frac{\partial}{\partial t}\,,\ \overline{D} = 2G\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,.$$

Man erhält daraus für Longitudinalwellen

$$H^*(j\omega) = H_a^*(j\omega) = \eta + j\omega\,,$$

$$M^*(j\omega) = M_a^*(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{\varrho}\left[k\eta - \frac{2}{3}\alpha\omega^2 + \left(\frac{4}{3}G + k\right)j\omega\right];$$

für Transversalwellen wird

$$H^*(j\omega) = H_b^*(j\omega) = 3k\,,$$

$$M^*(j\omega) = M_b^*(j\omega) = -\frac{\alpha}{2\varrho}\omega^2 + \frac{G}{\varrho}j\omega\,.$$

Mit diesen Werten lassen sich für beide Wellenarten nach (22) und (23) alle interessierenden Wellengrössen, wie Dämpfung, Wellenlänge usw. berechnen. Es seien noch folgende Spezialfälle des Festkörpers von Jeffreys angeführt:

I.	$\eta = \alpha = 0$:	vollkommen elastischer Körper
II.	$\eta = 0$:	«firmoviskoser» Körper nach Voigt [9]
III.	$\alpha = 0$:	«elasticoviskoser» Körper nach Maxwell [6]
IV.	$\eta = G = 0$:	viskose Flüssigkeit (oder Gas)
V.	$\eta = G = \alpha = 0$:	reibungslose Flüssigkeit (oder Gas)
VI.	$\frac{1}{k} = 0$:	inkompressible Flüssigkeit

9. Der isotrope Festkörper nach Sezawa [8] und [3]

In Erweiterung des Ansatzes von Voigt wird neben der Scherungsviskosität α auch eine Volumänderungsviskosität k' angenommen. Die Gleichungen (15) erhalten folgende Form:

$$(27) \qquad p = 3k\vartheta + 3k'\frac{\partial}{\partial t}\vartheta\,,\ \Pi = 2G\Psi + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\Psi\,.$$

Die Operatoren sind daher

$$\overline{A} = 1\,,\ \overline{B} = 3k + 3k'\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \overline{C} = 1\,,\ \overline{D} = 2G + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Literaturverzeichnis

[1] *P. Frank* und *R. von Mises*, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Band I.

[2] *H. Geiger* und *K. Scheel*, Handbuch der Physik. Band VI 1928.

[3] *E. Hardtwig*, Ueber die Wellenausbreitung in einem visko-elastischen Medium. Zeitschrift für Geophysik *18*, 1943, Seite 1.

[4] *H. Jeffreys* in «Monthly Notices Roy. Astron. Soc.» London. Bd. 77, 1917, Seite 449.

[5] *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität. Uebersetzung von A. Timpe, 1907.

[6] *J. C. Maxwell*, «Phil. Mag.» Bd. 35, Seite 134, 1868.

[7] *F. Popert*, Mechanische Eigenschaften quasi-elastischer isotroper Körper. Promotionsarbeit ETH 1945.

[8] *K. Sezawa*, On the decay of waves in visco-elastic solid bodies. «Bulletin Earthquake Res. Inst.» Tokyo. Bd. 3, 1927, Seite 43.

[9] *W. Voigt*, Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle. «Annalen der Physik und Chemie.» Bd. 47, 1892.