Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67 (1949)
Heft: 38

Artikel: Die bildliche Darstellung der Vergleichspannung
Autor: Lehmann, E.A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-84136

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

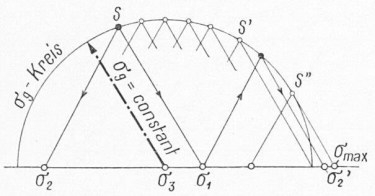


Bild 8

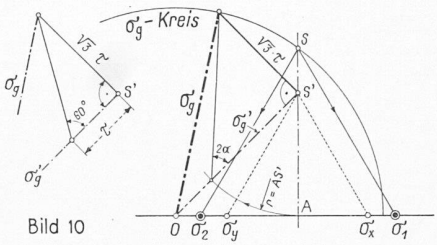


Bild 10

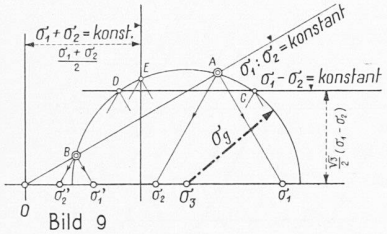


Bild 9

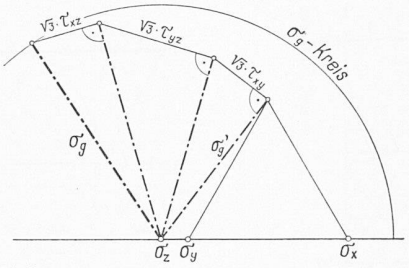


Bild 11

und zwar unter verschiedenen extremen Bedingungen. Ebenfalls durch Versuche könnte die Wirksamkeit der Lagerung im Sandbett überprüft werden. Wertvoll wären auch Versuche über die zweckmässigste Bauausführung. Für in Beton gelagerte Röhren sind Versuche durchgeführt worden, welche zeigten, dass die wirkliche Sicherheit grösser sein kann als die theoretisch zu erwartende.

Die bildliche Darstellung der Vergleichspannung

Von E. A. LEHMANN DK 531.252

I. Eine planimetrische Konstruktion

A. Aufgabe: Gegeben sind die Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3. Gesucht ist die Vergleichspannung nach der Theorie der Gestaltänderungsarbeit

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}$$

Lösung: Von den drei auf einer Axe aufgetragenen Punkten, deren Abstände vom Nullpunkt nach Grösse und Vorzeichen den Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 entsprechen, betrachte man deren zwei als Basiseckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Die gerade Verbindungslinie von dessen Spitze zum dritten Punkt stellt der Grösse nach die Vergleichspannung σ_g dar.

Die Lösung ist in den Bildern 1 bis 3 für verschiedene Grössenverhältnisse der Hauptspannungen dargestellt; Bild 4 zeigt für andere Werte eine Zusammenfassung. Der Beweis ist einfach und für Bild 3 dargestellt. Man erkennt, dass als Basen der gleichseitigen Dreiecke, die im folgenden «Spannungsdreiecke» genannt werden sollen, die horizontalen Durchmesser der Mohrschen Spannungskreise gedient haben.

In Bild 2 wird der Unterschied zwischen der Theorie der grössten Schubspannung nach Guest und derjenigen der (konstanten) Gestaltänderungsarbeit besonders deutlich. Die Dreieckseite entspricht $2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3$ und bleibt konstant, wie auch die mittlere Hauptspannung σ_2 sich ändert. Hingegen ändert sich σ_g mit der Lage von σ_2. σ_g wird zum Minimum für $\sigma_2 = (\sigma_1 \; {}_3)/2$. Die Extremwerte sind:

$$\sigma_{g\,min} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3); \quad \sigma_{g\,max} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max}$$

Der grösste Unterschied beträgt somit 13,4 %.

Bild 5 zeigt eine Anwendung der Konstruktion. Dort sind für verschiedene Spannungszustände nahe beim Bruch bzw. beim Fliessen die Vergleichspannungen σ_g für ein hypothetisches anisotropes Material konstruiert. Statt der Mohr'schen Kreise sind die Spannungsdreiecke verwendet. Für ein isotropes Material würden die σ_g alle gleich gross. Bilder 6 und 7 belegen die praktische Verwendung der Konstruktion an Hand von zwei ausgewählten Beispielen.

Umkehrung der Aufgabe

Gegeben seien die Vergleichspannung σ_g und die Hauptspannung σ_3. Wie Bild 8 zeigt, ist der mit dem Radius $r = \sigma_g$ um das Zentrum σ_3 geschlagene Kreis der geometrische Ort der Spitzen der Spannungsdreiecke mit den Basiseckpunkten σ_1 und σ_2. Wenn nun noch σ_1 bekannt ist, so erhält man σ_2 wie auf Bild 8 angegeben. In Bild 9 sind wiederum σ_g und σ_3 gegeben. Gesucht sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2, wenn deren Summe, deren Differenz oder deren Verhältnis bekannt ist. Die Lösung ergibt sich durch Konstruktion der geometrischen Orte der Spitzen der Spannungsdreiecke.

B. Aufgabe: Gegeben seien die Normalspannungen σ_x und σ_y, sowie die zugehörige Schubspannung τ. Gesucht sei die Vergleichspannung

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2}$$

Lösung: Wir bestimmen vorerst mit der gezeigten Konstruktion

$$\sigma_g' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$$

und dann durch Zusammensetzen nach Pythagoras

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_g'^2 + 3\tau^2}$$

Bild 10 zeigt das Vorgehen. Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 ergeben sich mittels der Beziehung

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

unter Verwendung des σ_g-Kreises. Der Stellungswinkel ist mit

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{3}\,\tau}{\sqrt{3}\,(\sigma_x - \sigma_y)}$$

ebenfalls gefunden durch Hinüberschlagen der Strecke AS' auf σ_g'.

Für den dreiaxigen Spannungszustand ist die Konstruktion für

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2}$$

in Bild 11 angegeben. Eine direkte planimetrische Bestimmung der Hauptspannungen ist nicht möglich, weil eine Gleichung dritten Grades vorliegt; hingegen kann der σ_g-Kreis als Hilfsmittel zur Bestimmung von weiteren zwei Hauptspannungen dienen, falls die erste durch Rechnung gefunden wurde und die Beziehung $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ beachtet wird.

II. Darstellung der Vergleichspannung in einem Koordinatensystem

Der Zweck dieser Darlegungen ist, eine Darstellung des dreiaxigen Spannungszustandes und seiner Vergleichspannung in der Zeichenebene und ohne Zuhilfenahme räumlicher Vorstellungen zu geben. Dies kann wie folgt geschehen: In einem schiefwinkligen Koordinatensystem (Bild 12) mit dem Axen-

Bild 12

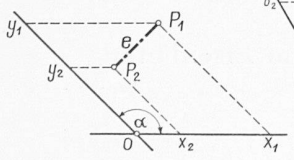
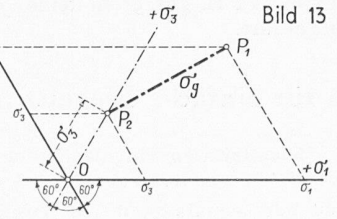


Bild 13



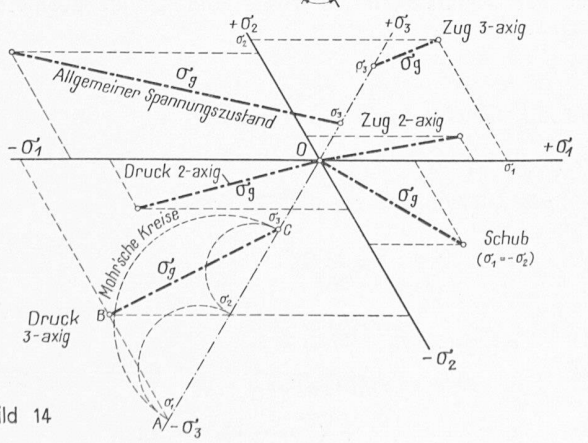


Bild 14

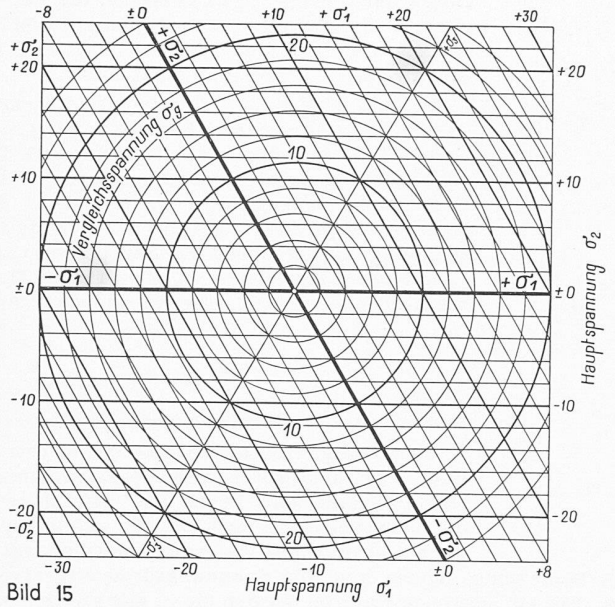


Bild 15

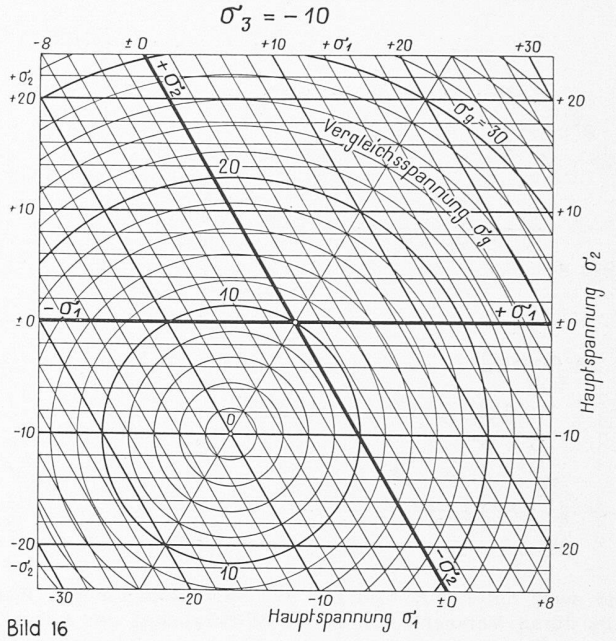


Bild 16

winkel α ist der Abstand zweier Punkte P_1 (x_1, y_1) und P_2 (x_2, y_2) bestimmt durch

$$e = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\alpha}$$

Mit $x_1 = \sigma_1$, $y_1 = \sigma_2$, $x_2 = y_2 = \sigma_3$, $\cos\alpha = \cos 120^0 = -1/2$ wird

$$e = \sigma_g = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$
$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

Daraus folgt: Im schiefwinkligen Koordinatensystem mit dem Axenwinkel $\alpha = 120^0$ stellt der Abstand zweier Punkte, wovon einer die Koordinaten σ_1, σ_2, der andere die Koordinaten σ_3, σ_3 hat, die Vergleichspannung dar. Beim zweiaxigen Spannungszustand mit $\sigma_3 = 0$ ist die Vergleichspannung gleich dem Abstand des mit den Koordinaten σ_1, σ_2 aufgetragenen Punktes vom Nullpunkt (Bild 13). Es ist anschaulicher, den Punkt mit den Doppelkoordinaten σ_3, σ_3, nicht mit diesen Koordinaten, sondern auf einer neu zu bestimmenden σ_3-Axe vom Nullpunkt aus aufzutragen. Diese σ_3-Axe ist die Winkelhalbierende zwischen der σ_1- und der σ_2-Axe. Dies ist in Bild 13 bereits durchgeführt.

Eine allgemeine Darstellung ergibt Bild 14. Dort sind, ähnlich wie in Bild 5, für ein anisotropes Material verschiedene Spannungszustände nahe beim Bruch bzw. beim Fliessen eingetragen. Die Grösse der Vergleichspannung ist sofort ersichtlich. Im untern Teil des Bildes sind vergleichsweise die Mohr'schen Kreise zu finden, und im Dreieck ABC erkennen wir dasjenige von Bild 3 wieder.

Auf diesen Grundlagen sind die Bilder 15, 16 und 17 entstanden. Bild 15 ergibt die Vergleichspannung für den zweiaxigen Zustand. Die σ_g-Linien sind im Kreise und stellen die transformierten Ellipsen des rechtwinkligen Koordinatensystems Becker-Westergaard dar. Die Tafel lässt sich auch für dreiaxigen Spannungszustand verwenden, indem man mit den reduzierten Werten $\sigma_1^* = \sigma_1 - \sigma_3$, $\sigma_2^* = \sigma_2 - \sigma_3$ rechnet. Die Reduktion ist erlaubt, weil ein allseitiger Druck oder Zug auf die Gestaltänderungsarbeit keinen Einfluss hat. Es ist somit

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} - \sigma_1^* \sigma_2^*}$$

worin $\sigma_1^* = \sigma_1 - \sigma_3$ und $\sigma_2^* = \sigma_2 - \sigma_3$. Diese Formel bietet auch rechnerisch Vorteile.

Ein Spezialfall ist in Bild 16 dargestellt. σ_3 ist als konstant und zwar zu -10 angenommen, während σ_1 und σ_2 beliebig gross sein können. Gegenüber Bild 15 ist lediglich das Zentrum der σ_g-Kreise auf der σ_3-Axe verschoben.

Mit Bild 17 sind wir zu einem rechtwinkligen Axensystem zurückgekehrt. Wir finden die Vergleichspannung als Funktion der Summe und der Differenz der Hauptspannungen. Die Einheit der Ordinate ist das $\sqrt{3}$fache derjenigen der Abszisse, und die σ_g-Linien sind Kreise.

In durchaus ähnlicher Weise wie früher in Bild 10 lassen sich im schiefwinkligen System aus den Normal- und Schubspannungen die Vergleichspannungen und die Hauptspannungen finden. Diese Konstruktionen bieten aber gegenüber den im Abschnitt I. B. gezeigten keine Vorteile und werden hier nicht aufgeführt.

Ueber die Bedeutung der Dimensionierungsformeln für einfache Biegung im Eisenbeton

Von G. A. RYCHNER

DK 624.012.4

Wir betrachten den Fall eines auf Biegung beanspruchten Rechteckquerschnitts, der nur eine Zugarmierung aufweist oder in dem die Druckarmierung (meist Montagearmierung) vernachlässigt wird. Der T-Querschnitt, bei dem die neutrale Axe in die Druckplatte fällt, kann bekanntlich einem Rechteckquerschnitt von der gleichen Nutzhöhe gleichgesetzt werden, so dass sich unsere Untersuchung auch auf ihn anwenden lässt. Unsere Berechnung befasst sich wie üblich mit dem im Zugbereich gerissenen Betonquerschnitt und stützt sich vorderhand auf das Proportionalitätsgesetz von Hooke und auf die Hypothese von Bernoulli-Navier, nach der ein ebener Querschnitt auch nach der Deformation eben bleibt.

Bezeichnungen (Bild 1)

F_e totaler Eisenquerschnitt der auf Zug beanspruchten Stahleinlagen

h Nutzhöhe, b Breite des Querschnitts

$\mu = F_e/b\,h$ Armierungsgehalt des Querschnitts

σ_e Zugspannung der Stahleinlagen

σ_b Druckspannung des Betons am gedrückten Rand

E_e Elastizitätsmodul des Stahls

E_b Elastizitätsmodul des Betons

$n = E_e/E_b$ Aequivalenzzahl

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt die geometrische Beziehung

$$(1) \qquad \frac{x}{h-x} = \frac{n\,\sigma_b}{\sigma_e}; \quad \frac{x}{h} = \frac{n\,\sigma_b}{n\,\sigma_b + \sigma_e}$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \qquad Z = \sigma_e F_e = \sigma_e \mu\, b\, h = D = \sigma_b \frac{b\,x}{2}; \quad \frac{x}{h} = 2\mu\frac{\sigma_e}{\sigma_b}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man:

$$(3) \qquad \mu = \frac{n}{2\,\frac{\sigma_e}{\sigma_b}\left(n + \frac{\sigma_e}{\sigma_b}\right)}$$

$$(4) \qquad \sigma_b = \mu\,\sigma_e\left(\sqrt{1 + 2/n\mu} + 1\right)$$

$$(5) \qquad \sigma_e = 1/2 \cdot n\,\sigma_b\left(\sqrt{1 + 2/n\mu} - 1\right)$$

$$(5') \qquad \sigma_e/\sigma_b = n/2\left(\sqrt{1 + 2/n\mu} - 1\right) = A$$

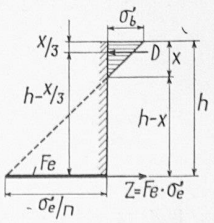


Bild 1