Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 67 (1949)

Heft: 38

Artikel: Zusammenhang zwischen Druck-, Biege- und Knick-Festigkeit von Beton und Eisenbeton

Autor: Voellmy, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-84132

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Baustoffe wurden von den Firmen Dachziegelwerk Frick, Borner & Co., Wallenstadt, und den Jura-Zement-Fabriken in Wildegg zur Verfügung gestellt. Ihnen allen sei der Dank für ihre Bereitwilligkeit, diese Untersuchungen zu unterstützen, an dieser Stelle ausgesprochen. Die Untersuchungen werden noch durch Versuche mit Pfeilern aus Kalksandsteinen ergänzt.

Zusammenhang zwischen Druck-, Biege- und Knick-Festigkeit von Beton und Eisenbeton

Von A. VOELLMY

DK 624.012.4

Mit dem Abschluss der auch für den Beton und Eisenbetonbau förderlichen Leitung der Eidg. Materialprüfungs- und Versuchsanstalt durch den bisherigen Direktionspräsidenten sind es zugleich 50 Jahre her, seit *W. Ritter*[1]) das Prinzip der Eisenbetonberechnung auf Biegung und Knicken auf Grund von Spannungs-Deformations-Diagrammen erstmalig formuliert hat; diese Methode wurde seither durch die EMPA, speziell durch die Arbeiten von *M. Roš, J. Brunner* und *O. Baumann* weiter entwickelt. Zur Erzielung eines Ueberblicks über den Einfluss der Verformungseigenschaften auf die Tragfähigkeit verschiedenartig beanspruchter Bauelemente eignen sich mathematische Formulierungen der Spannungs-Deformations-Diagramme, wofür nachfolgend einige Vorschläge in der Reihenfolge ihrer Veröffentlichung zusammengestellt werden.

I. Spannungs-Deformations-Diagramme

A. Druck-Stauchungs-Diagramm des Betons

Für den Zusammenhang zwischen der Druckspannung und dem zugehörigen Stauchungsgrad gelten folgende Formeln, die auf Grund besonderer Versuchsreihen aufgestellt worden sind.

(1) Hartig[2])-Ritter[1]) $\sigma = \beta\,(2\,\eta - \eta^2)$

Bezeichnungen:

β = Prismendruckfestigkeit (die übliche Bezeichnung $_p\beta_d$ wird hier abgekürzt)

$\eta = \varepsilon/\varepsilon_0$ = Stauchungsgrad

ε = zur Spannung σ gehörige Stauchung

$\varepsilon_0 = 2\,\beta/E$ = Stauchung beim Erreichen der Prismendruckfestigkeit

$T = d\,\sigma/d\,\varepsilon$ = Tangentenmodul

$E = (T)_{\sigma=0}$ = Elastizitätsmodul

(2) Ritter[1]) $\sigma = \beta\,(1 - e^{-1000\,\varepsilon})$

(3) Bach-Tetmajer[3]) $\varepsilon = \alpha\,\sigma^m$

worin α und m Materialkoeffizienten bedeuten

(4) Roš-Eichinger[4]) $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + 10^{-4}\,\dfrac{\sigma}{\beta - \sigma}$

(5) Baumann[5]) $\sigma = \dfrac{\beta\,\varepsilon}{(2\,c - 1)\,\varepsilon_B^2}\,(2\,c\,\varepsilon_B - \varepsilon)$

ε_B ist die Bruchdehnung, c eine Materialkonstante

(6) Schreyer[6]) $\varepsilon = 10^{-6}\,\dfrac{(400 + {}_w\beta_d)\,\sigma}{1{,}1\,{}_w\beta_d - \sigma}$

$_w\beta_d$ ist die Würfeldruckfestigkeit

(7) Haller[7]) $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} + 10^{-4}\,\dfrac{\sigma}{\beta + \dfrac{\beta^2}{2200} - \sigma}$

Die Abweichungen der durch die Formeln (1) bis (7) gegebenen Diagramme weisen auf den grossen Einfluss der Art der Versuchsdurchführung, insbesondere bezüglich Messbereich, Belastungsart und -geschwindigkeit, sowie auf beträchtliche Schwankungen der Materialeigenschaften hin. Die Stauchung nimmt mit wachsender Belastungszeit, mit abnehmender Prismenhöhe und mit wachsendem Verhältnis von Messlänge zu Prismenhöhe zu; die Bruchstauchung wächst ferner mit zunehmender Exzentrizität der Belastung und erreicht bei Biegung nach M. Roš etwa den Wert[8]):

$$\varepsilon_B = \left(3{,}5 + \frac{200}{\beta}\right)\,{}^0/_{00}$$

[1]) SBZ Bd. 33, S. 41*, 49*, 59* (Februar 1899).
[2]) «Civil-Ingenieur» 1893, S. 113, 435.
[3]) «Elastizität und Festigkeit» 1905.
[4]) Diskussionsbericht Nr. 8 der EMPA, 1925.
[5]) Diskussionsbericht Nr. 89 der EMPA, 1934.
[6]) «Beton und Eisen» 1939, Heft 1/3.
[7]) «Schweiz. Ing. Kalender», 1948, Anhang.
[8]) «Oesterreichische Bauzeitschrift» 1948, Heft 1/3.

Die Formeln (2) und (4) ergeben für $\sigma = \beta$ eine Stauchung $\varepsilon = \infty$; sie können nur für Dauerlast gelten, wobei nur 80 bis 90 % der Prismendruckfestigkeit erreicht werden (Dauerstandfestigkeit = 0,8 bis 0,9 β). Formel (3) ist unbrauchbar, da $(T)_{\sigma=0} = \infty$. Die Formeln (5) bis (7) ergeben für $\sigma = \beta$ einen bestimmten Wert für T, der nur in speziellen Fällen zutreffen kann. Formel (5) ist ein Spezialfall von (1) für $\varepsilon_B < \varepsilon_0$.

Das auf Bild 1 dargestellte Diagramm (1) erfüllt die wichtigsten, an einen Ansatz für das Druck-Stauchungs-Diagramm zu stellenden Forderungen, nämlich:

$$(T)_{\sigma=0} = E;\ (T)_{\sigma=\beta} \geqq 0$$

Die Krümmung des Stauchungs-Diagramms nimmt gegen den Bruch hin zu. Für $\varepsilon_B < \varepsilon_0$, $\eta_B < 1$ und $(T)_{\sigma=\beta} > 0$ ist an Stelle von β der ideelle Maximalwert β_i des über β hinaus verlängerten Diagrammes einzusetzen, nämlich:

$$\beta_i = \frac{E}{4}\,\frac{\varepsilon_B^2}{\varepsilon_B - \beta/E}$$

Für $\varepsilon_B > \varepsilon_0$, $\eta_B > 1$ wird das Diagramm über ε_0 hinaus horizontal verlängert.

Der Einfluss eines der jeweiligen Beanspruchung σ angenähert proportionalen Kriechens $\varkappa\,\varepsilon$ kann durch entsprechende Reduktion von E in den Formeln von Bild 1 berücksichtigt werden. Wird Wert darauf gelegt, die Bruchstauchung ε_0 für $\sigma = \beta$ frei wählen zu können, so ist das durch den Ansatz einer kubischen Parabel möglich; die mathematische Behandlung der Probleme wird aber dadurch schwerfälliger.

In den Fällen, bei denen sich der Ansatz (1) als unzutreffend erweist, besonders bei genauer Berücksichtigung des Kriechens unter ständiger Last, wird man zweckmässig die gegebenen Druck-Stauchungs-Diagramme direkt auswerten. Mit den Bezeichnungen von Bild 1 bedeuten hierbei F_η die Spannungsfläche $0 - \eta$ und s_η den Schwerpunktsabstand dieser Fläche von der Ordinate η_B.

B. Armierung

Im allgemeinen darf das Druck-Stauchungs-Diagramm dem Zug-Dehnungs-Diagramm gleichgesetzt werden. Soweit hierfür keine besonderen Messungen vorliegen, kann für Stähle mit ausgesprochenem Fliessbereich gesetzt werden:

(8) $\sigma = E_e\,\varepsilon;\ \sigma_{max} = \sigma_s$ (Fliessgrenze)

Fliessbereich $\varepsilon = \sigma_s/E_e$ bis ε_s

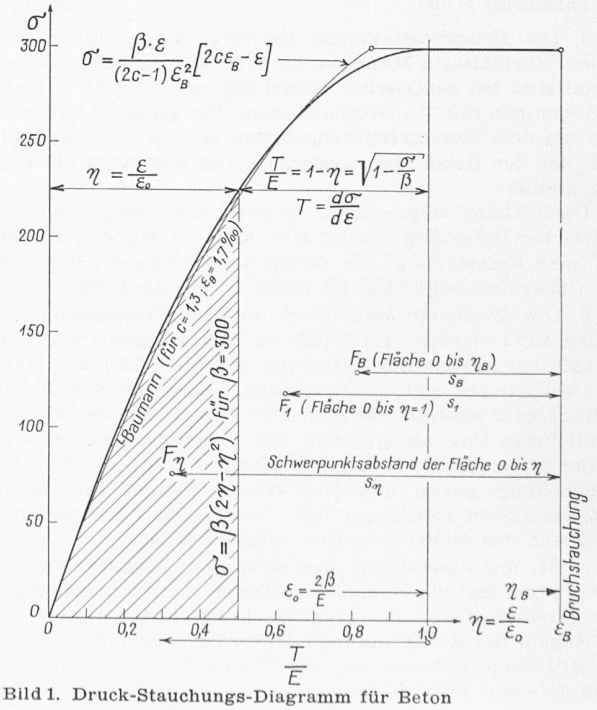

Bild 1. Druck-Stauchungs-Diagramm für Beton

II. Tragfähigkeit von armiertem und unarmiertem Beton

Das nachfolgend angegebene allgemeine Verfahren der Tragfähigkeitsermittlung wird als Beispiel und zur Erzielung eines Ueberblicks für das Druck-Stauchungs-Diagramm (1) ausgewertet. Um die Versuche von Baumann[5]) zur Bestätigung der vereinfachten Theorie beiziehen zu können, werden den Zahlenbeispielen die bei seinen ersten Hauptversuchen festgestellten Materialeigenschaften zu Grunde gelegt, nämlich:

Beton: $\beta = 300$ kg/cm²; $E = 285\,000$ kg/cm² (dieser Versuchswert für E ist ausnahmsweise gering und durch die Feinkörnigkeit des Zuschlags verursacht).

Bruchdehnung: $\varepsilon_B \backsim 2\beta/E$ (bei anderweitigen langsam durchgeführten Versuchen wurden grössere Bruchstauchungen festgestellt. Die Beschränkung auf den angegebenen verhältnismässig geringen Wert dürfte der untersten Grenze der Tragfähigkeit entsprechen).

Armierung: 1 % des Gesamtquerschnittes; $\sigma_s = 3000$ kg/cm²; $E_e = 2\,050\,000$ kg/cm²; Fliessbereich 1,5 bis 25 ‰. Aequivalenzzahl für kleine Spannungen: $n = E_e/E = 7{,}2$. Bei Dauerbelastung ist n mit dem Kriechfaktor $\varkappa$ zu multiplizieren; dieser kann je nach den Verhältnissen Werte zwischen 2 und 4 erreichen[9]).

A. Der exzentrische Druck als allgemeiner Fall

Die Untersuchung erfolgt mit Ausschluss der Betonzugfestigkeit und unter der vielfach überprüften Annahme, dass der Querschnitt im Verlauf der Deformation eben bleibe. Der exzentrische Zug von unarmiertem Beton und die reine Biegung als Grenzfall wurden mit Berücksichtigung der Zugfestigkeit andernorts untersucht[10]).

Die Gleichungen werden mit positiver Bezeichnung der Druckspannungen für Rechteckquerschnitte, bei Belastung in einer Symmetrieebene aufgestellt.

Aus den Bildern 1 und 2 ergibt sich die Bedingung für den Abstand x der Null-Linie (inbezug auf P heben sich die Momente sämtlicher Spannungen auf):

$$(9)\qquad x\left[\frac{F_B}{\eta_B}\left(\frac{s_B}{\eta_B}x - a'\right) - F_\eta\left(\frac{s_\eta}{\eta_B}x - a'\right)\right] + \frac{\varepsilon_B E_e}{x}\left[(x-h')\,\mu e - (x-u)\,\mu' e'\right] = 0$$

Die mittlere Spannung, bezogen auf die Betonfläche beträgt:

$$(10)\qquad \sigma_m = \frac{P}{b\,h} = \left(\frac{F_B}{\eta_B} - F_\eta\right)x + \frac{\varepsilon_B E_e}{x}\left[(x-h')\,\mu + (x-u)\,\mu'\right]$$

Wenn die Null-Linie den Querschnitt schneidet, ist in dieser und in den folgenden Gleichungen $\eta = 0$ zu setzen.

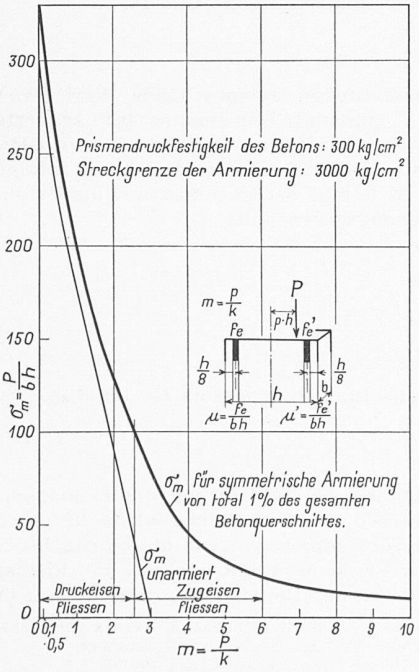

Bild 2. Exzentrischer Druck

[9]) Vgl. Diskussionsbericht der EMPA Nr. 124. 1940.

[10]) «Hunziker Mitteilungen», Nr. 1/2 und 3/4, 1944 und 1945.

Wenn $\sigma_e = \varepsilon_B E_e\,(1 - h'/x) < -\sigma_s$

$\sigma_e' = \varepsilon_B E_e\,(1 - u/x) > \sigma_s$

ist σ_e dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm zu entnehmen.

Für weite praktische Anwendungsbereiche lässt sich bei Berücksichtigung der Erhöhung der Eisenspannungen durch Schwinden und Kriechen nachweisen, dass die vereinfachende Annahme $\sigma_e = \sigma_e' = \sigma_s$ zulässig ist. Im allgemeinen wird man x wählen und Gleichung (9) mit Berücksichtigung von $a' = {}^1/_2 - p$; $e = {}^1/_2 - u + p$; $e' = {}^1/_2 - u - p$ nach p auflösen. Hiermit lässt sich mit Beizug von Gleichung (10) die mittlere Spannung σ_m als Funktion von p oder von $m = p/k = 6\,p$ darstellen. (k = Kennweite des vollen Querschnitts.)

Für den Fall des quadratischen Stauchungs-Gesetzes (1) ergibt sich mit $n = E_e/E$ und $\varepsilon_B = \varepsilon_0$:

$$(9')\qquad p\,x\left(\frac{2}{3} - \eta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right) + 2\,p\,n\left[\mu\left(1 - \frac{h'}{x}\right) + \mu'\left(1 - \frac{u}{x}\right)\right] = \frac{x}{2}\left[\frac{2}{3} - \eta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right] - x^2\left[\frac{1}{4} - \eta^2 + \eta^3 - \frac{\eta^4}{4}\right] - 2\,n\,v\left[\mu\left(1 - \frac{h'}{x}\right) - \mu'\left(1 - \frac{u}{x}\right)\right]$$

$$(10')\qquad \sigma_m = x\,\beta\left(\frac{2}{3} - \eta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right) + 2\,n\,\beta\left[\mu\left(1 - \frac{h'}{x}\right) + \mu'\left(1 - \frac{u}{x}\right)\right]$$

$\eta = 1 - 1/x$, für $x \leqq 1$ ist $\eta = 0$

Fliessen der Armierungseisen:

Wenn $1 - \frac{u}{x} > \frac{\sigma_s}{2\,n\,\beta}$ und $1 - \frac{h'}{x} < -\frac{\sigma_s}{2\,n\,\beta}$ so sind in den Gleichungen (9′) und (10′) obige Grenzwerte einzusetzen.

Als Beispiel wurde die Anwendung von Gl. (9′) und (10′) in Bild 2 für die dort angegebenen Verhältnisse dargestellt.

Die Nachrechnung von 39 exzentrischen Druckversuchen im Bereich $\mu = \mu' = 0$ bis $\mu = 4\,{}^1/_2$ ‰, $\mu' = 1$ ‰ und $p = 0$ bis $p = {}^5/_4\,h$ ergab im Mittel 10,5 % geringere, rechnerische Tragfähigkeiten. Positive Abweichungen (bis + 27 %) treten gelegentlich bei kleinen Exzentrizitäten auf, negative Abweichungen (bis — 40 %) bei grösseren Exzentrizitäten infolge der effektiven Betonzugfestigkeit, die in der Rechnung vernachlässigt wurde. Eine Berücksichtigung grösserer Bruchstauchungen führt zu etwas besserer Uebereinstimmung von Rechnung und Versuchen.

1. Armierungseisen im Fliessbereich (grosse Exzentrizitäten)

Für $\sigma_e = \sigma_e' = \sigma_s$ und $\eta = 0$ gibt Gleichung (10′):

$$(11)\qquad x = \frac{3}{2\,\beta}\left[\sigma_m + \sigma_s\,(\mu - \mu')\right]$$

Mit $\Omega = \mu + \mu'$ beträgt die zulässige Exzentrizität p der Normalkraft $\sigma_m\,b\,h$:

$$(12)\qquad p = \frac{1}{\sigma_m}\left[\frac{2}{3}\beta x\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}x\right) + \sigma_s\left(\frac{1}{2} - u\right)\Omega\right]$$

Für symmetrische Armierung gilt für grosse Exzentrizitäten:

$$(12')\qquad p = \frac{1}{2} - \frac{9}{16}\,\frac{\sigma_m}{\beta} + \frac{\sigma_s}{\sigma_m}\left(\frac{1}{2} - u\right)\Omega$$

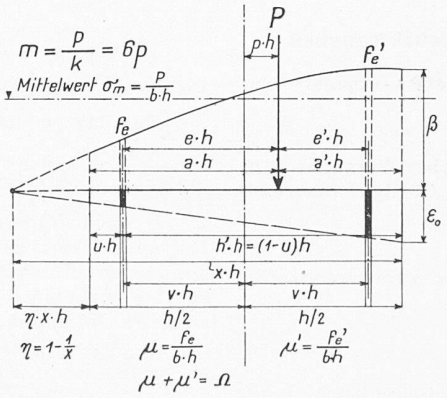

Bild 3. Exzentrischer Druck

Aus $\varepsilon_B\,(1 - x - u) = \varepsilon_s\,x$ ergibt sich für den Gültigkeitsbereich der Formeln (11) und (12):

$$(13)\qquad \mu = \mu' + \frac{2\,\beta}{3\,\sigma_s}\,\frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_B + \varepsilon}\,(1 - u) - \frac{\sigma_m}{\sigma_s}$$

und die untere Grenze von p durch Einsetzen von

$$x = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_s}\,(1 - x - u)$$

Für ε sind die Dehnungsgrenzen des Fliessbereiches einzusetzen. Für $\varepsilon < \sigma_s/E_e$ ergibt sich der Armierungsgehalt, bei dessen Ueberschreitung die Druckfestigkeit des Betons allein massgebend wird. Für $\varepsilon > \varepsilon_s$ (Streckbereich beim Fliessen) gerät die Zugarmierung ins Verfestigungsgebiet; es ist spröder Bruch des Balkens zu befürchten.

2. Unarmierter Beton

Mit $\mu = \mu' = 0$ geben die Gleichungen (9') und (10')

$$(14) \qquad \left(\frac{1}{2} - p\right)\left(\frac{2}{3} - \eta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right) = x\left(\frac{1}{4} - \eta^2 + \eta^3 - \frac{\eta^4}{4}\right)$$

$$(15) \qquad \sigma_m = \beta x\left(\frac{2}{3} - \eta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right)$$

Die Auswertung dieser Gleichungen für $\beta = 300$ kg/cm² ist in Bild 2 dargestellt.

Wenn eine Last P' bei einer Exzentrizität m nach der üblichen Berechnung (Hooke-Navier) die Randspannung β ergibt, so kann dank dem plastischen Verhalten des Betons diese Last noch um ein mit der Exzentrizität wachsendes Mass weiter bis zur Bruchlast gesteigert werden. Für gleiche Bruchsicherheit sind deshalb bei der üblichen Berechnung die zulässigen Randspannungen σ_r höher als die zulässigen Schwerpunktspannungen; für das quadratische Stauchungsgesetz (1) gilt angenähert:

$$\sigma_r = \sigma_s\left(1 + \frac{m}{3}\right)$$

Für eine effektive Exzentrizität, die grösser als 1 ist, muss in dieser Formel $m = 1$ belassen werden. Diese Regel bleibt angenähert auch für Eisenbeton mit vernachlässigbarer Druckarmierung gültig; bei reiner Biegung ist die Erhöhung der zulässigen Randspannung als untere Grenze zu betrachten, da die hierbei auftretenden, grösseren Bruchstauchungen die Bruchsicherheit etwas erhöhen.

B. Reine Biegung

Die Auswertung der Gleichungen (9) und (10) führt für $\sigma_m = 0$, $p = \infty$ und $\eta = 0$ auf die von *F. Stüssi*[11]) angegebenen Formeln. Befindet sich die Armierung im Fliessgebiet, so ergibt sich mit den oben gemachten Annahmen nach Gleichung (11) und (12) mit $1 - u = h'$, $\mu' = 0$ das Bruchmoment:

$$(16) \qquad \frac{M}{b h'^2} = \mu \sigma_s\left(1 - \frac{9}{16}\frac{\mu \sigma_s}{\beta}\right)$$

Die Angaben für reine Biegung werden im Gegensatz zu den übrigen Formeln dieser Arbeit auf den Nutzquerschnitt bh' bezogen. Der Gültigkeitsbereich der Formel (16) folgt aus Gleichung (13) für $\mu' = 0$, $\sigma_m = 0$ zu:

$$(17) \qquad \mu = \frac{2\beta}{3\sigma_s}\frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_B + \varepsilon}$$

Für $\varepsilon < \sigma_s/E_e$ ergeben sich Armierungsgehalte, bei denen die Druckfestigkeit des Betons für den Bruch massgebend ist. Für $\varepsilon > \sigma_s$ (Streckbereich beim Fliessen) ergeben sich Armierungsgehalte, bei denen der Streckbereich bei Biegebruch der Balken überwunden wird und sich die Eisenspannungen bis gegen den Bruchzustand steigern. Für $\beta = 300$, $\sigma_s = 3000$, $\varepsilon_B = 2$ ‰, $\varepsilon_s = 25$ ‰ ergibt sich für den Gültigkeitsbereich der vereinfachten Bruchformeln $\mu = 0{,}5$ bis 4 %. Geringere Armierungsgehalte sollten zur Vermeidung von sprödem Bruch der Eisenbetonbalken möglichst wenig angewendet werden. Mit zunehmender Bruchstauchung des Betons nähert sich das Spannungsdiagramm bei Biegung dem Rechteck und das Bruchmoment dem Wert:

$$(16') \qquad M = b h'^2 \mu \sigma_s\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu \sigma_s}{\beta}\right)$$

Diese Berechnungsart wurde im Prinzip bereits von Hennebique[1]) vorgeschlagen.

Für die Prismendruckfestigkeit

$$\beta = \frac{3}{4} \text{ bis } \frac{27}{32}\,{}_w\beta_d \quad ({}_w\beta_d = \text{Würfeldruckfestigkeit})$$

folgt aus Gleichung (16) bzw. (16') die EMPA-Formel[12])

$$M = b h'^2 \mu \sigma_s\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\mu \sigma_s}{{}_w\beta_d}\right)$$

Diese Formel hat sich auf Grund zahlreicher Versuche[4]) in dem durch Gleichung (17) bezeichneten Gültigkeitsbereich als gut zutreffend erwiesen.

C. Zentrischer Druck

Gleichung (10) führt für $\eta = 1$, $x = \infty$ zum Grenzwert:

$$(18) \qquad \sigma_m = \beta + \frac{\varepsilon_B}{E_e}\Omega$$

Für $\varepsilon_B > \sigma_s/E_e$ ist, sofern kein besonderes Stauchungsdiagramm vorliegt:

$$(19) \qquad \frac{P}{b h} = \sigma_m = \beta + \sigma_s \Omega$$

Bei kurzfristigen Versuchen wird nach Gleichung (18) σ_s oft nicht ausgenützt, bei Dauerversuchen gilt aber in der Regel das durch Gleichung (19) angegebene Additionsgesetz von *Emperger*.

III. Knicken

Das anschauliche graphische Näherungsverfahren der Knickuntersuchung von *Roš-Brunner*[13]) wurde von *Baumann*[5]) auf Eisenbeton angewandt und hierfür von *Habel*[14]) weiter ausgebaut. Zur Erzielung eines Gesamtüberblicks über den Einfluss der wichtigsten Faktoren wird nachfolgend auf Grund vereinfachender Annahmen eine abgekürzte Berechnungsmethode entwickelt, wobei es grundsätzlich empfehlenswert bleibt, ihre Ergebnisse in kritischen Fällen nach dem graphischen Verfahren nachzuprüfen.

A. Steifigkeit

Bei Knickproblemen ist im Gegensatz zu den Fällen vorwiegender Biegebeanspruchung die Veränderlichkeit der Steifigkeit mit der Belastung und ihrer Exzentrizität von ausschlaggebender Bedeutung. Die im elastischen Bereich gültige Beziehung:

$$(20) \qquad M_i = \frac{EJ}{\varrho}$$

ergibt für Material, das dem Hooke'schen Gesetz nicht folgt, einen variablen Verformungsmodul $E(\sigma)$. Damit wird auch das Verhältnis der Beanspruchung des Eisens zu derjenigen des Betons $n(\sigma)$ variabel. Die Trägheitsmomente J und die mittleren Beanspruchungen σ_m werden hier auf den gesamten Betonquerschnitt allein bezogen und die Mitwirkung der Armierung sowie der Ausschluss der Beton-Zugzonen durch die Variable $E(\sigma)$ zum Ausdruck gebracht, die jeweils durch eine virtuelle Ausbiegung der unter einer bestimmten Last $P = bh\sigma_m$ stehenden Stütze bestimmt wird.

1. Zentrische Belastung

a) Die Stütze erleidet bis zur maximalen Last keine wesentliche Ausbiegung und knickt dann plötzlich aus. Der Spannungsabfall auf der konvexen Seite des Querschnitts folgt dem Elastizitätsgesetz $\sigma = E\varepsilon$. Der diesen Voraussetzungen entsprechende Ausdruck für $E(\sigma)$ wurde in der Arbeit von *Baumann*[5]) hergeleitet und wird Knickmodul T_k genannt.

b) Die Ausbiegung der Stütze erfolgt sukzessive und stetig während der Laststeigerung. Die Spannungsverteilung im Querschnitt entspricht immer einem Teil des Stauchungs-Diagramms. Eine kleine virtuelle Ausbiegung verursacht Spannungen, die nach dem Tangentengesetz mit den entsprechenden Stauchungen zusammenhängen (Bild 1):

$$\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\varepsilon = T\varepsilon$$

Der diesen Voraussetzungen entsprechende Wert $E(\sigma)$ wird Belastungsmodul T_0 genannt. Für symmetrisch armierte Querschnitte ergibt sich mit Bezug auf Bild 2 und Gleichung (20), wenn ε' die maximale Druckstauchung infolge virtueller Ausbiegung ist und Ω der gesamte, auf die Betonfläche bezogene Armierungsquerschnitt

$$M_i = \varepsilon' b h^2\left(\frac{T}{6} + 2 v^2 E_e \Omega\right)$$

$$\varrho \cong \frac{x}{\varepsilon'} = \frac{h}{2\varepsilon'}; \quad J = \frac{b h^3}{12}$$

$$(21) \qquad T_0 = T + 12 v^2 E_e \Omega$$

Für das parabolische Stauchungsgesetz ist (Bild 1):

$$T = E\sqrt{1 - \frac{\sigma}{\beta}}$$

Je nach Vollkommenheit der Zentrierung und Homogenität können bei zentrischen Knickversuchen beide der oben genannten Brucharten vorkommen, woraus die häufig beobachtete Streuung dieser Versuche erklärlich ist. Bei kleiner Druckexzentrizität tritt in der Regel, bei grösserer immer

[11]) Abhandlungen I.V.B.H. 1932, S. 487.

[12]) *M. Roš*, Monatsnachrichten des Oesterreichischen Betonvereins, Februar 1937 und «Technische Rundschau», Bern 1932.

[13]) «TKVSB-Bericht» 1926, Verhandl. Internat. Kongress für techn. Mechanik, sowie Berichte der EMPA, speziell Nr. 13 und 143.

[14]) «Beton und Eisen» 1938, S. 188, 1939, S. 221, 248, 1940, S. 117; «Bauingenieur» 1942, S. 381; «Beton und Stahlbeton» 1944, S. 13.

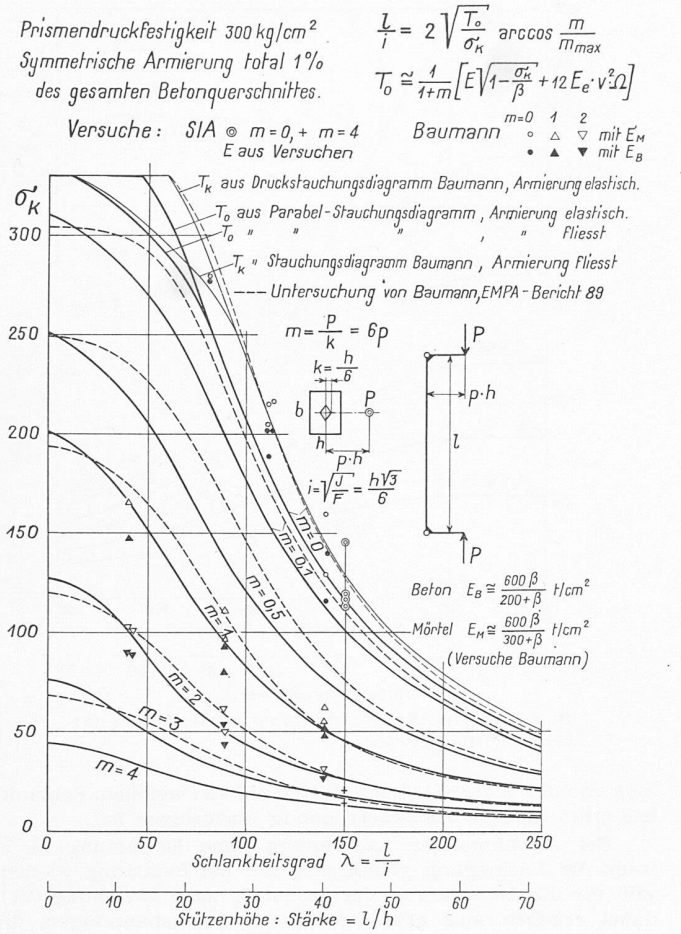

Bild 4. Knicken von Eisenbeton

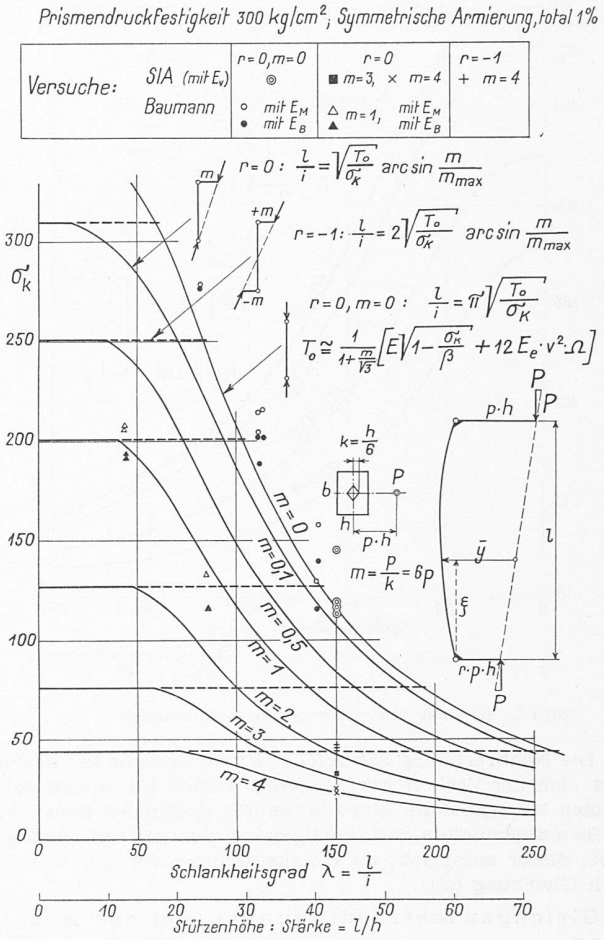

Bild 5. Exzentrisches Knicken von Eisenbeton

der letztgenannte Bruchvorgang auf. Dieser gibt mit Gültigkeit von T_0 etwas kleinere Knicklasten, als bei Annahme von T_k; es wird deshalb in der Folge zur Ermittlung der unteren Grenze der Knickfestigkeit immer mit T_0 nach Gleichung (21) gerechnet.

2. Exzentrische Belastung

Es lässt sich graphisch nachweisen, dass die für die Stabilität bei Druckexzentrizität m krititische Ausbiegung bei $m_k \backsim 1$ angenommen werden darf, weil dort das Anwachsen der inneren Momente infolge Ueberwindung der Beton-Zugfestigkeit plötzlich geringer wird. Einer fallweisen, genaueren Ermittlung der kritischen Ausbiegung m_k steht nichts im Wege; diese Untersuchung wird einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Wird für die kritische Ausbiegung $m_k \backsim 1$ angenommen, so verursacht eine weitere virtuelle Ausbiegung $d\,m$ gleichen spezifischen Zuwachs der äusseren und inneren Momente:

$$\frac{d\,M_i}{d\,m} = \frac{M_i}{1+m}$$

Da $E(\sigma)$ nach Gleichung (20) vorwiegend von der mittleren Belastung σ_m und sehr wenig von deren Exzentrizität abhängig ist, darf angenähert gesetzt werden:

$$(22) \qquad T_m = \frac{T_0}{1+m_0}$$

worin T_0 durch Gleichung (21) gegeben ist und m_0 die Anfangsexzentrizität der Belastung im gefährlichen Schnitt bedeutet. Diese kann genügend genau dem Schnitt entnommen werden, in dem nach der elementaren Biegelehre die maximale Ausbiegung zu erwarten ist. Aus der Bedingung, dass für diesen Schnitt die Querkräfte aus der Belastung durch die Momentenflächen verschwinden müssen, ergibt sich mit den Bezeichnungen von Bild 5:

$$(23) \qquad m_0 = m\sqrt{r^2 + \frac{(1-r)(1+2r)}{3}}$$

Für $r = 1$ ist $m_0 = m$; für $r = 0$ und $r = -1$ ist $m_0 = m/\sqrt{3}$

B. Ausbiegung

Die bereits von *A. Sarrasin*[15]) für den elastischen Bereich untersuchte Differentialgleichung für die Biegelinie lautet ohne Berücksichtigung des Einflusses der Schubkräfte mit den Bezeichnungen von Bild 5, wenn $\overline{y}$ den Abstand im Schnitt ξ der deformierten Stabaxe von der Drucklinie bedeutet

$$\frac{d^2\overline{y}}{d\,\xi^2} = -\frac{P}{EJ}\,\overline{y}$$

Mit der Bezeichnung

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}; \quad \alpha\,l = \lambda\sqrt{\frac{\sigma_m}{E}}; \quad \lambda = \frac{l}{i}$$

ergibt sich mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen:

$$(24) \qquad \overline{y} = \frac{p}{\sin\alpha\,l}\left[\sin\alpha\,\xi + r\sin(\alpha\,l - \alpha\,\xi)\right]$$

Aus $d\overline{y}/d\xi = 0$ folgt für die Bestimmung des Schnittes für $\overline{y}_{max}$:

$$(25) \qquad \operatorname{tg}\alpha\,\xi = \frac{1 - r\cos\alpha\,l}{r\sin\alpha\,l}$$

und mit dieser aus Gleichung (24) nach einigen Umformungen und mit $m = p/k$:

$$(26) \qquad m_{max} = \frac{m\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\alpha\,l}}{\sin\alpha\,l}$$

Beispielsweise wird für $r = 1$: $m = m_{max}\cos\alpha\,l/2$
$r = 0$: $m = m_{max}\sin\alpha\,l$
$r = -1$: $m = m_{max}\sin\alpha\,l/2$

Nach Gleichung (25) muss der Wert für $\cos\alpha\,l$ zwischen den Werten für r und $1/r$ liegen, ansonst sind die Eckexzentrizitäten, bzw. Eckmomente massgebend. Es ist demnach bei verschränkter Exzentrizität ($r = -1$) nur die Biegebeanspruchung infolge Eckmoment und anderseits zentrisches Knicken massgebend.

[15]) SBZ Bd. 114, S. 130* (9. Sept. 1939).

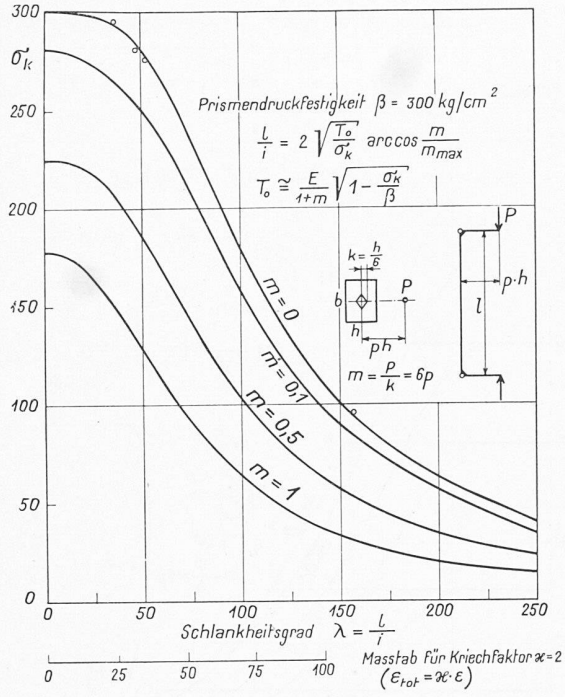

Bild 6. Knicken von unarmierten Betonstützen

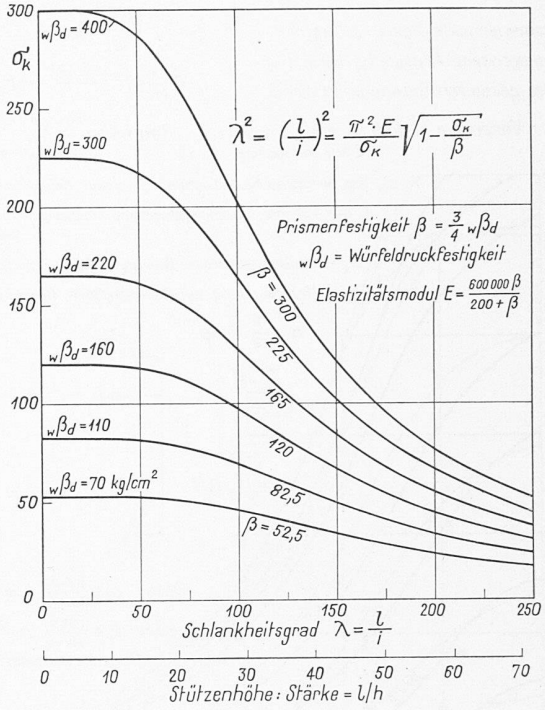

Bild 7. Zentrisches Knicken unarmierter Säulen für verschiedene Betonarten

Die Nachrechnung zahlreicher Knickversuche hat gezeigt, dass sich der Verlauf der Biegelinien auch im unelastischen Bereich bei Annahme eines längs der Stablänge konstanten Verformungsmoduls mit genügender Genauigkeit verfolgen lässt; dieser entspricht im Knickstadium etwa dem Wert T_m nach Gleichung (22).

C. Gleichgewichtsbedingungen bei der Ausbiegung

Eine vereinfachte Berechnung für zentrisches und exzentrisches Knicken von Eisenbeton bei beliebigem Verlauf der Drucklinie kann demnach auf Grund folgender Gleichung erfolgen:

$$\frac{m_{\max}}{m} = \frac{\sqrt{1 + r^2 - 2\,r \cos \alpha l}}{\sin \alpha l} \tag{27}$$

worin

$$\alpha = \lambda \sqrt{\frac{\sigma_k}{T_m}}; \quad \lambda = \frac{l}{i}$$

$$\sigma_k = \sigma_s + 2\,\Omega\, n\, \beta\, \frac{E - T}{E}; \quad n = \frac{E_e}{E} \text{ für } \sigma \to 0$$

$$T_m = \frac{1}{1 + m_0}\,(T + 12\,E_e\, v^2\, \Omega); \quad T = E \sqrt{1 - \frac{\sigma_s}{\beta}}$$

Bei geringem Armierungsgehalt darf die der maximalen Ausbiegung $m_{\max}$ entsprechende Druckspannung $\sigma_{\max} \backsim \sigma_s$ gesetzt werden. Diese Vereinfachung verringert etwas die berechneten Knicklasten und liegt somit auf der sicheren Seite. Das Verhältnis $m_{\max}/m$ wird für eine gegebene Anfangsexzentrizität m gewählt und hierfür die Gleichung (27) nach αl gelöst, was mit Rücksicht auf die Vereinfachung von Gleichung (26) für Spezialfälle sehr einfach ist. Für reines Knicken wird $m_{\max}/m = \infty$ gesetzt.

Für exzentrischen Druck wird die der gewählten Verformung $m_{\max}$ entsprechende mittlere Bruchspannung σ_m dem Bild 2 entnommen, und hierfür nach den oben aufgeführten Gleichungen der vorher ermittelte Ausdruck für αl nach l/i aufgelöst. Numerische Auswertungen dieser Gleichungen, wofür die Mitwirkung von Ing. *R. Joosting* und *E. Husmann* verdankt wird, sind in den Bildern 4 bis 7 dargestellt.

Die obersten Kurven von Bild 4 entsprechen dem zentrischen Knicken mit elastischer Entlastung (Druckstauchungskurve nach Baumann, Bild 1), ohne Erreichen der Fliessgrenze bei maximaler Betonstauchung.

Wenn die Stauchungskurve bei Bruch eine horizontale Tangente aufweist und die Fliessgrenze der Armierungseisen überwunden wird, verschwindet der Bereich, in dem noch kein Spannungsabfall infolge Knicken entsteht (Bild 4, Kurve für T_0 aus quadratischer Parabel). Es hängt demnach vollkommen von den Materialeigenschaften ab, von welchem Schlankheitsgrad an eine Knickberechnung einzusetzen hat.

Bei Annahme der Ausbiegung ohne Entlastung, d. h. wenn die Ausbiegung gleichzeitig mit der Belastung wächst, gilt für die Berechnung der Modul T_0 nach Gleichung (21); dabei ergeben sich etwas geringere Knickspannungen, die unseres Erachtens als untere Grenze praktisch massgebend sind (ausgezogene Kurven in Bild 4). Im Gesamten entspricht die vereinfachte Berechnung den Untersuchungsergebnissen von Baumann und liegt entsprechend dem Sinn der getroffenen vereinfachenden Annahmen meist auf der sicheren Seite. Die Unterschiede sind hauptsächlich durch die Abweichung des vereinfachten Druck-Stauchungs-Diagramms und weniger durch die Berechnungsmethode bedingt.

In Bild 5 sind die Knickspannungen für Kopfexzentrizität und für verschränkte Exzentrizität dargestellt. Mit Abnahme des algebraischen Wertes von r schieben sich die Kurven gegen diejenige für zentrisches Knicken hin und erreichen diese gerade im Grenzfall $r = -1$, wofür demnach nur noch exzentrischer Druck und zentrisches Knicken massgebend bleibt.

Bild 6 zeigt als Grenzfall für $\Omega = 0$ das zentrische und exzentrische Knicken von unarmiertem Beton von der Art, wie er für die Hauptversuche von Baumann verwendet wurde. Bild 7 zeigt die zentrischen Knickkurven bei gelenkiger Lagerung für verschiedene Betonarten auf der Grundlage der nach Auswertung zahlreicher Versuche formulierten mittleren Elastizitätsmoduli.

Wenn durch das *Kriechen* des Betons die spezifischen Stauchungen ε auf das Mass $\varkappa\,\varepsilon$ erhöht werden, so sind bei unarmiertem Beton die einer bestimmten Knickspannung zugehörigen Schlankheiten λ mit dem Mass $\sqrt{1/\varkappa}$ zu multiplizieren. Bei unarmiertem Beton kann das Kriechen lediglich durch eine Aenderung des l/i-Masstabes der Knickdiagramme berücksichtigt werden (Bild 6). Bei armiertem Beton ist im Ausdruck für T, Gleichung (21), der Wert E durch $\varkappa$ zu dividieren.

Das Näherungsverfahren erlaubt auch, auf Grund der durchgerechneten Kurven, Bilder 4 bis 7, Stützen mit abweichender Festigkeit oder Armierung zu beurteilen — oder anderseits nicht zu weitgehende Abweichungen der Armierungen, Festigkeits- und Elastizitätseigenschaften bei Versuchsauswertungen sinngemäss zu berücksichtigen.

Für eine gegebene Schlankheit l/i ist bei bestimmter Lagerungsart und Exzentrizität jeweils T_0/σ_k konstant, diese Verhältniszahl K wird durch Einsetzen der Versuchsdaten in Gleichung (21) ermittelt. Hätte die Probesäule die den be-

rechneten Kurven entsprechenden Materialeigenschaften aufgewiesen:

$\beta = 300$ kg/cm²; $E = 285\,000$ kg/cm²; $E_e = 2\,050\,000$ kg/cm², $\Omega = 1\,\%$ (total); $v = {}^3/_8$

so hätte sie eine angenähert gemäss folgender Gleichung abweichende Knickfestigkeit $\sigma_k{}^*$ ergeben:

$$\frac{E}{\sigma_k{}^*}\sqrt{1 - \frac{\sigma_k{}^*}{\beta}} + 12\frac{E_e}{\sigma_k{}^*}v^2\Omega = K$$

woraus

$$\sigma_k{}^* = \frac{E}{K}\left(A - B + \sqrt{1 - \frac{EA}{\beta K} + B^2}\right)$$

worin

$$A = 12\,n\,v^2\,\Omega; \quad n = \frac{E_e}{E}$$

$$B = \frac{E}{2\,\beta\,K}$$

Einige, auf diese Weise auf die Grundlagen der Bilder 4 und 5 bezogene Versuchsresultate, soweit die Beschaffenheit der Probesäulen von den angenommenen Mittelwerten abwichen, sind dort eingetragen.

Das Stauchungs-Diagramm des Betons sollte bei jedem Knickversuch gleichzeitig gemessen werden. Zur Orientierung über den Einfluss des Elastizitätsmoduls wurden in den Bildern 4 und 5 die Versuche von Baumann einerseits auf den von ihm angegebenen, mittleren Elastizitätsmodul E_M, andererseits auf den im Mittel für Beton zutreffenden Elastizitätsmodul E_B bezogen:

$$E_M = \frac{600\,\beta}{300 + \beta} \text{ t/cm}^2 \text{ (Mörtel)}$$

$$E_B = \frac{600\,\beta}{200 + \beta} \text{ t/cm}^2 \text{ (Beton)}$$

Ueber das Knicken von unarmierten Betonstützen (Bild 6) sind nur wenige vollständige Versuchsangaben verfügbar; hier ist weitere experimentelle Abklärung erforderlich.

Genauere Untersuchungen, mit Berücksichtigung der längs dem Stab veränderlichen Steifigkeit und der Schubkräfte können nach dem Verfahren von *Vianello-Engesser* durchgeführt werden, wenn besondere Versuche über die Spannungs-Deformations-Diagramme des Materials und die mit Belastung und Exzentrizität veränderliche Stabsteifigkeit vorliegen.

Im Hinblick auf die genannten, komplizierten Zusammenhänge kann aber dieses Verfahren nur in absehbarer Zeit zum Ziel führen, wenn als Ausgangspunkt ein gut zutreffender Näherungswert zur Verfügung steht. Die Aufstellung von Näherungsverfahren entspricht dem von *L. Vianello* am Schluss seiner grundlegenden Abhandlung [16]) gemachten Hinweis:

Es kann nur empfohlen werden, alle Fälle auf die möglichst einfachen zurückzuführen und durch die hierdurch erzielte höhere Sicherheit gegen Umstände gedeckt zu sein, die sich der Berücksichtigung entziehen.

[16]) Z.VDI 1898, Bd. 42, S. 1436.

Knickstabilität des Obergurtes oben offener Brücken

DK 624.075.25

Von J. BRUNNER

Die Eidg. Materialprüfungs-Anstalt hatte es seit ihrer Gründung als eine ihrer Aufgaben betrachtet, die Knickstabilität von Konstruktionselementen aus den technisch wichtigsten Baustoffen zu untersuchen. Schon unter ihrem ersten Direktor L. v. Tetmajer wurden umfangreiche Versuche durchgeführt, die zu den noch heute bekannten und in ihrem Bereich noch brauchbaren Knickformeln und Graphiken (Tetmajer'sche Gerade) führten. Ein spezielles Interesse widmet die Anstalt auch den Vorschriften und Normen über die Berechnung und Ausführung von Bauten; die Knickstabilität des Obergurtes oben offener Brücken verdient besonders diese Aufmerksamkeit, da es sich hier immer noch um ein umstrittenes Gebiet handelt.

Im neuen Entwurf der Normen des S. I. A. ist aus der alten Vorschrift von 1935 die modifizierte «Engesser-Formel» übernommen worden; sie wurde aber gegenüber der früheren Formulierung wesentlich vereinfacht dargestellt. Darnach beträgt die ideelle Knicklänge des quergestützten Stabes

$$l_k = \pi\sqrt[4]{\frac{1}{4}EJ\,a\,\delta}$$

Hierin bedeuten a die Feldweite und δ die Federkonstante des stützenden Querrahmens, z. B. in cm/t, für eine am Rahmenkopf angreifende Horizontalkraft.

Die vorliegende kurze Abhandlung will zum prinzipiellen Verständnis der sonst wenig übersichtlichen Formel beitragen und zeigen, wie von ihr ausgehend die Stabilitätsuntersuchungen des Obergurtes wesentlich erweitert werden können.

Zunächst sei die Formel selbst kurz betrachtet und übersichtlich abgeleitet. Sie geht davon aus, dass ein Knickstab (hier der Obergurt) in einem elastischen Medium eingebettet liege, das dem seitlichen Ausweichen entgegenwirkt. Es wird vorerst angenommen, dass die Stützung kontinuierlich erfolge; dann wird die physikalische Knicklänge l_0 gesucht, die ein Minimum der Tragkraft ergibt. l_k ist die zur Tragkraftberechnung einzusetzende ideelle Knicklänge des ungestützt gedachten Stabes.

Die Tragkraft O_K des Tragsystems setzt sich zusammen aus der Tragkraft O_{K_0} der Knickwelle (ungestützt) und der Vermehrung der Tragkraft infolge Querstützung, also

$$O_K = O_{K_0} + O_{KR} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} + \frac{c\,l^2}{9{,}6}$$

Der Ausdruck O_{KR} ergibt sich aus der Momentengleichung inbezug auf die Stabmitte bei Annahme einer sinusförmigen Ausbiegung der Stabaxe (oder angenähert zur Vereinfachung der Berechnung einer parabelförmigen Ausbiegung, wobei $9{,}6 \backsim \pi^2$) und der Proportionalität von Seitenkraft und Ausbiegungsgrösse (Bild 1). c ist die Querbelastung pro cm (wenn wir alle in der Formel vorkommenden Werte in cm dimensionieren!) und pro cm Ausbiegung. Um nun das Minimum der Tragkraft für ein zu bestimmendes l_0 zu finden, wird die Gleichung nach l differenziiert und ergibt

$$l_0 = \pi\sqrt[4]{\frac{EJ}{c}}$$

Durch Einsetzen dieser Knicklänge ergibt sich der minimale Wert für O_K zu:

$$O_K = \sqrt{EJ\,c} + \sqrt{EJ\,c} = 2\sqrt{EJ\,c}$$

oder nach einiger Umformung

$$O_K = 2\,\frac{\pi^2 EJ}{l_0{}^2}$$

Der quergestützte Stab trägt also in dem gesuchten minimalen Fall genau das Doppelte des ungestützten Stabes.

Um die zur Tragkraftberechnung einzuführende *ideelle* Knicklänge zu erhalten, sei daran erinnert, dass die Tragkraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Knicklänge wächst; also ist hier eine Knicklänge $l_k = \frac{l_0}{\sqrt{2}}$ zu berücksichtigen.

$$l_k = \pi\sqrt[4]{\frac{1}{4}\frac{EJ}{c}}$$

Wir setzen nun diese kontinuierliche Stützung mit der wirklichen Stützung durch Querrahmen in Beziehung. Wir bezeichnen mit $R_1 = c\,a$ die Reaktion des Halbrahmenkopfes pro cm Einbiegung, bzw. mit $\delta = 1/R_1$ die Einbiegung des Halbrahmenkopfes pro t Seitenlast (Federkonstante). Hiermit wird $c = R_1/a = 1/a\,\delta$, woraus folgt:

$$l_k = \pi\sqrt[4]{\frac{1}{4}EJ\,a\,\delta}$$

Für neu auszuführende Brükken wird nun der Rahmenwiderstand am günstigsten so gewählt

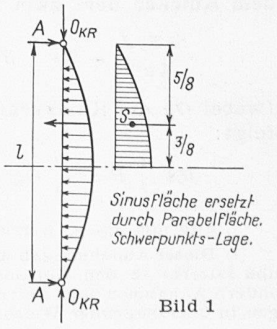

Bild 1