

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67 (1949)
Heft: 31

Artikel: Die Elastizitätstheorie der parallelogrammförmigen Scheibe
Autor: Lardy, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-84105>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Elastizitätstheorie der parallelogrammähnlichen Scheibe

Von Prof. Dr. P. LARDY, ETH, Zürich

DK 624.072.1

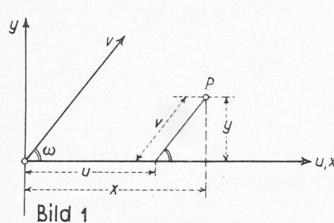


Bild 1

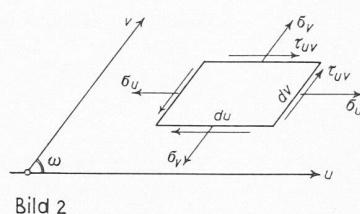


Bild 2

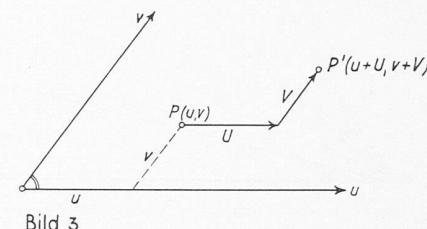


Bild 3

Eines der geeignetsten und wohl fruchtbarsten Mittel zur Bestimmung der strengen Lösungen von elastizitätstheoretischen Problemen ergibt sich aus der Wahl eines Koordinatensystems, das der Form des zu untersuchenden Trägkörpers angepasst ist. Aus diesem Grunde wurden neben den kartesischen die Polarkoordinaten, die elliptischen und neuerdings die Bipolarkoordinaten, sowie die schiefwinkeligen Koordinaten eingeführt¹⁾.

Im folgenden werden die theoretischen Grundlagen der parallelogrammähnlichen Scheibe entwickelt, die im Bauingenieurwesen zahlreiche Anwendungen aufweist, wobei als wichtigster Sonderfall die dreieckförmige Scheibe bei Staumauerberechnungen auftritt. In einem I. Teil werden die Gleichgewichtsbedingungen, die Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Dehnungen, sowie den Dehnungen und Spannungen hergeleitet. Aus der Verträglichkeitsbedingung wird die Bestimmungsgleichung der Airy'schen Spannungsfunktion gewonnen²⁾. Die Spannungen und Dehnungen können somit durch die Airy'sche Spannungsfunktion ausgedrückt werden. Durch Integration folgen aus den Dehnungen die Verschiebungen, die in expliziter Form dargestellt werden und die Lösung der Probleme mit «geometrischen» Randbedingungen ermöglichen. Im II. Teil soll an einigen Beispielen die Wirksamkeit der schiefwinkeligen Koordinaten aufgezeigt werden.

I. Theoretische Grundlagen

a) Bezeichnungen

Der Zusammenhang zwischen den schiefwinkeligen und rechtwinkeligen Koordinaten folgt aus Bild 1 mit folgenden Abkürzungen:

$$\cos \omega = c, \sin \omega = s$$

$$(1) \quad x = u + cv \quad u = x - \frac{c}{s}y \\ \text{und} \\ y = sv \quad v = \frac{1}{s}y$$

Die Spannungen und ihre positiven Vorzeichen sind aus Bild 2 definiert.

Die Gleichheit der Schubspannungen ist auch am Element von Bild 2 verwirklicht³⁾, d. h. es gilt:

$$\tau_{uv} = \tau_{vu}$$

¹⁾ Prof. Dr. H. Favre: Sur l'introduction des coordonnées obliques dans la théorie de l'élasticité; «Bull. Techn. de la Suisse Romande» 1946, S. 321* und S. 333*.

²⁾ Prof. Dr. H. Favre hat diese Gleichung durch direkte Koordinatentransformation aufgestellt; loc. cit.

³⁾ H. Favre: loc. cit.

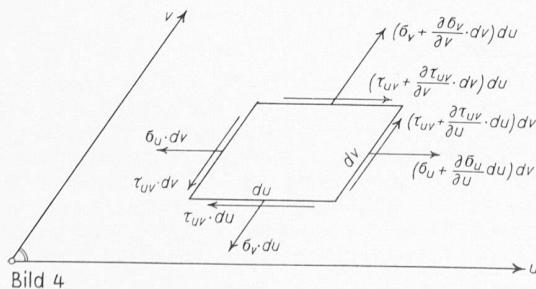


Bild 4

Die Verschiebungen werden mit grossen Buchstaben U und V bezeichnet und sind positiv wie in Bild 3.

Der «Verzerrungszustand» ist durch die axenparallelen Dehnungen ϵ_u und ϵ_v sowie durch die Winkeländerung γ_{uv} des Winkels ω (im Gegensatz zum rechten Winkel bei den rechtwinkeligen Koordinaten) definiert.

b) Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Richtungen u und v folgen aus Bild 4.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} + c \left(\frac{\partial \sigma_v}{\partial v} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial v} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} + c \left(\frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind nur dann identisch erfüllt (Determinante $\neq 0!$), wenn

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial v} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

sind. Die Form dieser Gleichungen ist die selbe wie in den Koordinaten x, y .

c) Zusammenhang der Spannungen in beiden Koordinatensystemen⁴⁾

Aus Bild 5 folgt am Element $du = dx$ und $dv = dy = 0$:

$$\sigma_y = s \sigma_v, \tau_{xy} = \tau_{uv} + c \sigma_v$$

und nach Bild 6 entsteht für das Gleichgewicht in der u -Richtung:

$$\sigma_u + c \tau_{uv} + c \tau_{xy} - s \sigma_x = 0$$

Die drei letzten Gleichungen ergeben aufgelöst:

$$(3') \quad \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{1}{s} (s^2 \sigma_x + c^2 \sigma_y) - 2c \tau_{xy} \\ \sigma_v &= \frac{1}{s} \sigma_y \\ \tau_{uv} &= \tau_{xy} - \frac{c}{s} \sigma_y \end{aligned}$$

oder:

$$(3'') \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s} (\sigma_u + c^2 \sigma_v + 2c \tau_{uv}) \\ \sigma_y &= s \sigma_v \\ \tau_{xy} &= \tau_{uv} + c \sigma_v \end{aligned}$$

d) Verzerrungszustand

Die Dehnungen ϵ_u und ϵ_v sowie die Winkeländerung γ_{uv} des Winkels ω werden direkt aus Bild 7 hergeleitet, unter Verzicht auf die analytische Berechnung, die zum selben Ergebnis führt, jedoch langwieriger ist. Bild 7 stellt den Verschiebungszustand zweier axenparalleler Elemente $\overline{OA} = du$ und $\overline{OB} = dv$ dar, wobei ohne Einschränkung der Allgemein-

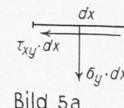


Bild 5a

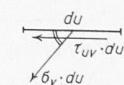


Bild 5b

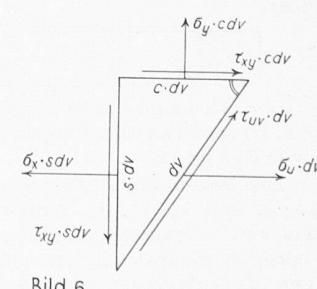


Bild 6

⁴⁾ H. Favre: loc. cit.

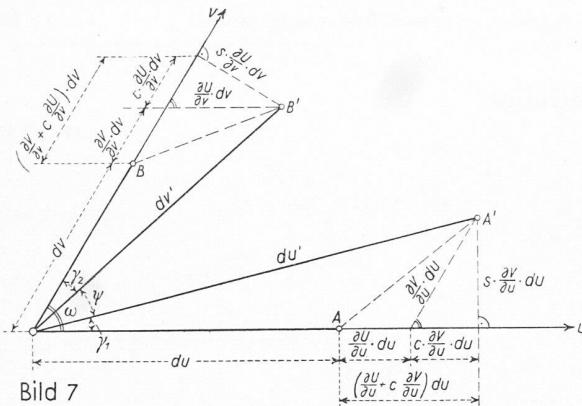


Bild 7

gültigkeit der Nullpunkt O als unverschieblich angenommen ist (der Verzerrungszustand hängt ja nur von der Differenz der Verschiebungen ab!). Dies hat zur Folge, dass die Verschiebungen der Punkte A und B nur von den partiellen Ableitungen der Größen U und V abhängen.

Die Dehnung ε_u folgt aus dem Vergleich der Strecken $OA' = du'$ und $OA = du$. Aus Bild 7 folgt:

$$du' = \sqrt{\left[du + \left(\frac{\partial U}{\partial u} + c \frac{\partial V}{\partial u} \right) du \right]^2 + \left[s \frac{\partial V}{\partial u} du \right]^2}$$

Bei Beschränkung auf, gegenüber du und dv , sehr kleine Verschiebungen U und V können für die weitere Berechnung die Quadrate und die Produkte der partiellen Ableitungen vernachlässigt werden. Es folgt dann:

$$du' = du \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial u} + c \frac{\partial V}{\partial u} \right)}$$

Wird die Wurzel entwickelt, so folgt für ε_u :

$$\varepsilon_u = \frac{du' - du}{du} = \frac{\partial U}{\partial u} + c \frac{\partial V}{\partial u}$$

Analog wird:

$$\varepsilon_v = \frac{dv' - dv}{dv} = \frac{\partial V}{\partial v} + c \frac{\partial U}{\partial v}$$

Die Winkeländerung γ_{uv} ist die Summe von γ_1 und γ_2 . Aus Bild 7 folgt weiter:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 \cong \gamma_1 = \frac{s \frac{\partial V}{\partial u} du}{(1 + \varepsilon_u) du}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 \cong \gamma_2 = \frac{s \frac{\partial U}{\partial v} dv}{(1 + \varepsilon_v) dv}$$

Wegen der oben gemachten Voraussetzung können im Nenner die Dehnungen vernachlässigt werden und man gelangt zu:

$$\gamma_{uv} = \gamma_1 + \gamma_2 = s \left(\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \right)$$

Zusammenfassend folgt das Ergebnis:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{\partial U}{\partial u} + c \frac{\partial V}{\partial u} \\ \varepsilon_v &= \frac{\partial V}{\partial v} + c \frac{\partial U}{\partial v} \\ \gamma_{uv} &= s \left(\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

e) Verträglichkeitsbedingung

Aus den Gleichungen (4) folgt durch Elimination der Verschiebungen U und V sofort die Verträglichkeitsbedingung, die durch Einsetzen der Werte aus (4) kontrolliert wird:

$$(5) \quad s \frac{\partial^2 \gamma_{uv}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \varepsilon_u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial u^2} - c \frac{\partial^2 (\varepsilon_u + \varepsilon_v)}{\partial u \partial v}$$

f) Beziehungen zwischen den Verzerrungszuständen in schiefwinkligen und rechtwinkligen Koordinaten

Die Beziehungen zwischen den Verzerrungszuständen ε_x , ε_y , γ_{xy} und ε_u , ε_v , γ_{uv} sind notwendig, um die Verbindung zwischen Spannungszustand und Verzerrungszustand in schiefwinkligen Koordinaten zu erhalten. Werden im rechtwinkligen Koordinatensystem (x, y) die Verschiebungen mit ξ

und η bezeichnet, so vermittelt Bild 8 den Zusammenhang von (U, V) mit (ξ, η) wie folgt:

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi &= U + cV & U &= \xi - \frac{c}{s} \eta \\ \eta &= sV & V &= \frac{1}{s} \eta \end{aligned}$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial v} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

Es folgen zwei analoge Gleichungen für $\partial V/\partial x$ und $\partial V/\partial v$. Andererseits ergeben die Gleichungen (1):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \frac{\partial x}{\partial v} = c, \frac{\partial y}{\partial v} = s$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{c}{s} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{c}{s} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

und analoge Beziehungen für $\partial V/\partial x$ und $\partial V/\partial y$.

Durch diese Transformationen können die Verzerrungsgrößen ε_u , ε_v und γ_{uv} in Abhängigkeit derjenigen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

gesetzt werden; es folgt:

$$(7) \quad \boxed{\begin{aligned} \varepsilon_u &= \varepsilon_x \\ \varepsilon_v &= c^2 \varepsilon_x + s^2 \varepsilon_y + cs \gamma_{xy} \\ \gamma_{uv} &= s [c(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + s \gamma_{xy}] \end{aligned}}$$

g) Spannungs-Dehnungs-Gleichungen in schiefwinkligen Koordinaten

Man gelangt nun sehr einfach zu den Grundbeziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen im System (u, v) durch Kombination der Gleichungen (3) und (7) sowie der bekannten Spannungs-Dehnungs-Gleichungen im System (x, y) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$(8) \quad \boxed{\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{1}{sE} [\sigma_u + (c^2 - \nu s^2) \sigma_v + 2c \tau_{uv}] \\ \varepsilon_v &= \frac{1}{sE} [\sigma_v + (c^2 - \nu s^2) \sigma_u + 2c \tau_{uv}] \\ \gamma_{uv} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \left[\tau_{uv} + \frac{c}{2} (\sigma_u + \sigma_v) \right] \end{aligned}}$$

h) Airy'sche Spannungsfunktion

Durch direkte Koordinatentransformation und mittels der Gleichungen (3) kann im System (u, v) die Airy'sche Spannungsfunktion $\Phi(u, v)$ eingeführt werden. Da sie bis auf einen konstanten Faktor definiert ist, folgt⁵⁾:

$$(9) \quad \boxed{\begin{aligned} \sigma_u &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \\ \sigma_v &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \\ \tau_{uv} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \end{aligned}}$$

Die Form der Gleichungen hat sich in schiefwinkligen Koordinaten nicht geändert. Die Gleichungen (9) erfüllen identisch die Gleichgewichtsbedingungen (2) und führen zur Bestimmungsgleichung der Funktion Φ durch Einsetzen in die Verträglichkeitsbedingung (5). Damit entsteht die «biharmonische Differentialgleichung» im System (u, v) und zugleich eine willkommene Kontrolle der hier abgeleiteten Theorie, da diese Differentialgleichung auch direkt durch Koordi-

⁵⁾ H. Favre: loc. cit.

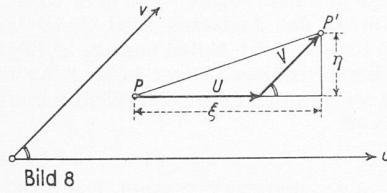


Bild 8

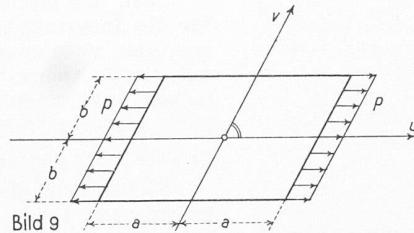


Bild 9

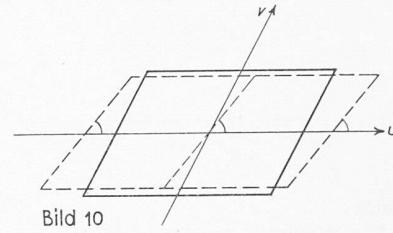


Bild 10

natentransformation aufgestellt werden kann. Mit dem «Laplace'schen Symbol» $\mathcal{A}\Phi$ folgt im System (u, v) :

$$(10) \quad \mathcal{A}\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - 2c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}$$

und damit die biharmonische Differentialgleichung zur Bestimmung der Airy'schen Spannungsfunktion Φ :

$$(11) \quad \mathcal{A}\mathcal{A}\Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial u^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial v^4} + 2(1+2c^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial u^2 \partial v^2} - 4c \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial u^3 \partial v} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial u \partial v^3} \right) = 0$$

i) Formänderungen (Verschiebungszustand)

Die Verschiebungen U und V können in expliziter Form dargestellt werden. Dies ist bei zahlreichen Randwertproblemen mit rein geometrischen oder geometrisch-statischen Randbedingungen wertvoll. Die Ableitung sei hier nur skizziert.

In den ersten beiden Gleichungen (8) seien die Dehnungen als Funktion der Verschiebungen und die Spannungen in Abhängigkeit der Airy'schen Spannungsfunktion ausgedrückt. Die Integration der ersten Gleichung nach u und der zweiten Gleichung nach v ergibt die Größen: $U + cV$ und $V + cU$; jede von ihnen ist mit einer noch unbestimmten Integrationsfunktion $\varphi(v)$ und $\psi(u)$ behaftet. Die Auflösung nach U und V geschieht leicht; unter Benützung der dritten Gleichung (8) kann die Beziehung zwischen den beiden Integrationsfunktionen hergestellt werden. Die Verschiebungen ergeben sich zu:

$$(12) \quad U = \frac{1}{s^3 E} \left[\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} du - c \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} dv + (3c^2 - rs^2) \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right. \\ \left. - c(2+c^2-rs^2) \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \varphi(v) - c\psi(u) \right] \\ V = \frac{1}{s^3 E} \left[\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} dv - c \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} du + (3c^2 - rs^2) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right. \\ \left. - c(2+c^2-rs^2) \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \psi(u) - c\varphi(v) \right]$$

Die Beziehung zwischen den Integrationsfunktionen $\varphi(v)$ und $\psi(u)$ lautet:

$$(13) \quad \frac{d\varphi(v)}{dv} + \frac{d\psi(u)}{du} + \int \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3} dv + \int \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^3} du \\ - 4c \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right) + 2(1+2c^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = 0$$

Diese Gleichung ist, was die Glieder in Φ anbelangt, nichts anderes als das Ergebnis der doppelten, partiellen Integration nach u und v des Ausdrückes für $\mathcal{A}\mathcal{A}\Phi$.

j) Bemerkungen zum theoretischen Teil

Sämtliche Größen zur Berechnung der parallelogramm-förmigen Scheibe sind somit explizite dargestellt. Man überzeugt sich leicht, dass für $c=0$ und $s=1$, d. h. für ein rechtwinkliges System, alle Größen in die bekannten Ausdrücke des Systems (x, y) übergehen. Ueber die Integration der Gleichung

$$\mathcal{A}\mathcal{A}\Phi = 0$$

mag der zweite Teil in einigen Beispielen Aufschluss geben.

II. Beispiele

Nach steigender Schwierigkeit (wachsende Ränderzahl!) geordnet sollen einige Beispiele die abgeleitete Theorie veranschaulichen. Im Falle periodischer Randbelastungen können die verschiedenen Ansätze auf der selben Grundlage gefunden werden, die bei der Behandlung der schiefen Platte benutzt wurde⁶⁾.

⁶⁾ P. Lardy: Die strenge Lösung des Problems der schiefen Platte. «SBZ» 1949, Nr. 15, S. 207*.

a) Elementarer Fall

Auch hier bilden Ansätze mit Polynomen in u und v für die Airy'sche Spannungsfunktion Φ eine Kategorie von Problemen, die wegen der mathematischen Einfachheit des Ansatzes leicht zu lösen sind. Selbstverständlich können damit nur «einfache» Randbedingungen berücksichtigt werden.

Im folgenden wird eine parallelogramm-förmige Scheibe an zwei gegenüberliegenden Rändern durch gleichmässig verteilte Zugkräfte beansprucht (Bild 9).

Randbedingungen:

Für $u = \pm a$ müssen $\sigma_u = p$ und $\tau_{uv} = 0$ und für $v = \pm b$ müssen $\sigma_v = \tau_{uv} = 0$ sein.

Ansatz: Hier genügt:?

$$\Phi = Av^2$$

$\sigma_u = \Phi_{vv} = 2A = p = \text{const.}$, woraus $A = p/2$ und

$$\Phi = \frac{p}{2} v^2$$

Die Randbedingungen sind identisch erfüllt!

Sehr anschaulich wird hier die Berechnung des Formänderungszustandes aus den expliziten Verschiebungsgleichungen (12). Es folgt aus dem eingesetzten Ansatz für Φ :

$$U = \frac{1}{s^3 E} [pu - c(2+c^2-rs^2)pv + \varphi(v) - c\psi(u)] \\ V = \frac{1}{s^3 E} [-cpu + (3c^2-rs^2)pv + \psi(u) - c\varphi(v)]$$

Die Beziehung (13) zwischen den Integrationsfunktionen $\varphi(v)$ und $\psi(u)$ ergibt:

$$-4cp + \frac{d\varphi(v)}{dv} + \frac{d\psi(u)}{du} \equiv 0$$

woraus, wie leicht zu erkennen ist, folgt:

$$\varphi(v) = C_1 v + C_3 \\ \psi(u) = (4cp - C_1)u + C_4$$

Die Integrationskonstanten C_1 , C_3 und C_4 entsprechen den drei Freiheitsgraden des starren Körpers in der Ebene. Sie seien durch folgende Bedingungen bestimmt: Für $u=0$ und $v=0$ soll der Nullpunkt O unverschieblich sein, d. h. es ist dort: $U=V=0$. Ferner soll die Richtung der u -Achse in O unverändert bleiben, d. h. in O wird: $\partial V/\partial u = 0$. Wegen der Linearität von U und V bleibt dann die u -Achse in ihrer Richtung erhalten. Es folgt sofort:

$$C_3 = C_4 = 0, C_1 = 3cp$$

und daher endgültig:

$$U = \frac{p}{sE} [u + c(1+r)v]$$

$$V = -\frac{rp}{sE} v$$

Das generelle Formänderungsbild folgt gestrichelt aus Bild 10 und stellt wieder ein Parallelogramm dar.

Für $c=0$ folgen die bekannten Ergebnisse für die Rechteckscheibe.

b) Schiefe Halbebene (ein Rand)

Bei Voraussetzung einer periodischen, schiefen Randbelastung (Periode $= 2a$) gehört dieser Fall nicht mehr zu den elementaren. Die Randbelastung σ_R sei schief-symmetrisch, d. h. es gelte im Abschnitt $-a$ bis $+a$:

$$\sigma_R(-u) = \sigma_R(u)$$

und stelle daselbst ein Gleichgewichtssystem dar (s. Bild 11). Es gilt daher folgende Fourier'sche Entwicklung als gerade Funktion in u :

$$\sigma_R = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} K_m \cos A_m u$$

mit $A_m = m\pi/a$

⁷⁾ Die partiellen Ableitungen werden durch Indices ersetzt.

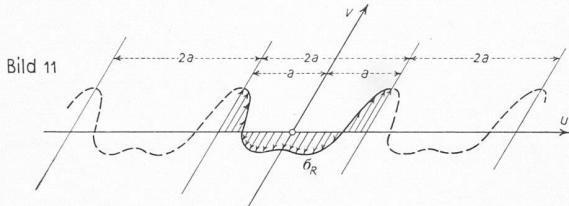


Bild 11

Ansatz:

Die Wirkung der Randbelastung verliert sich mit wachsendem v (σ_R im Gleichgewicht). Daher muss im Ansatz für Φ als Faktor eine Exponentialfunktion in v mit negativem Exponent auftreten. Die Form des Ansatzes selbst folgt, in Analogie mit dem Problem der schiefen Platte, zu:

$$\Phi = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} e^{-A_m s v} [\cos A_m (u + c v) \{ C_{1m} + C_{2m} v \} + \sin A_m (u + c v) \{ C_{3m} + C_{4m} v \}]$$

*Randbedingungen:*Für $v = 0$ ist:

$$\sigma_v = \Phi_{uu} = \sigma_R = \sum_m K_m \cos A_m u \\ \tau_{uv} = -\Phi_{uv} = 0$$

Die Berechnung ergibt:

$$C_{1m} = -\frac{K_m}{A_m^2}, \quad C_{2m} = -s \frac{K_m}{A_m} \\ C_{3m} = 0, \quad C_{4m} = -c \frac{K_m}{A_m}$$

und es folgt als Ergebnis:

$$\Phi = -\sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{K_m}{A_m^2} e^{-A_m s v} \times \\ \times [(1 + A_m s v) \cos A_m (u + c v) + A_m c v \sin A_m (u + c v)]$$

Daraus lassen sich sämtliche Spannungen und Formänderungen ohne Schwierigkeit berechnen.

c) Der schiefe Streifen (zwei Ränder)

Die Randbelastungen seien hier wieder periodisch und schiefsymmetrisch in u , sodass gilt:

$$\sigma_{R_0} = \frac{A_0}{2} + \sum_m K_{0m} \cos A_m u$$

$$\sigma_{Ru} = \frac{A_u}{2} + \sum_m K_{um} \cos A_m u$$

mit $A_m = m\pi/a$

σ_{R_0} und σ_{Ru} bilden zusammen ein Gleichgewichtssystem. Die Situation erhellt Bild 12.

*Randbedingungen:*Für $v = +b$ ist:

$$\sigma_v = \sigma_{R_0} \\ \tau_{uv} = 0$$

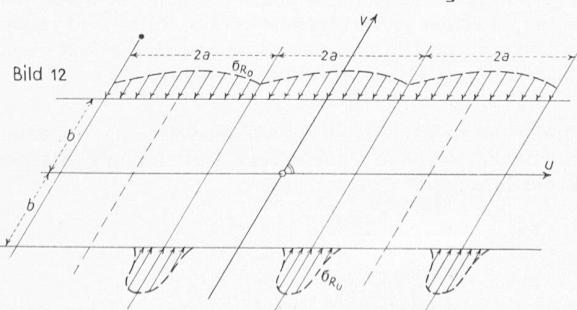
Für $v = -b$ ist:

$$\sigma_v = \sigma_{Ru} \\ \tau_{uv} = 0$$

Ansatz:

Im Falle von Bild 12 weist Φ keine Symmetrie auf. Der allgemeine Ansatz ist:

$$\Phi = B u^2 + \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \cos A_m (u + c v) \times \\ \times [C_{1m} Ch A_m s v + C_{2m} Sh A_m s v + \\ + v (C_{3m} Ch A_m s v + C_{4m} Sh A_m s v)] \\ + \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sin A_m (u + c v) \times \\ \times [D_{1m} Ch A_m s v + D_{2m} Sh A_m s v + \\ + v (D_{3m} Ch A_m s v + D_{4m} Sh A_m s v)]$$



Jede der vier Randbedingungen ergibt, bei $m = \text{const.}$, für die Integrationskonstanten des Ansatzes zwei Gleichungen, also zusammen acht für die acht Unbekannten. B folgt aus A . Die Auswertung dieses Problems bietet keine Schwierigkeit mehr, kann jedoch im Rahmen dieser Veröffentlichung nicht weiter verfolgt werden.

d) Die vierseitige, schiefe Scheibe (vier Ränder)

Bild 13 zeigt die hier angenommene Situation. Die Randkräfte $p(v)$ für $u = \pm a$ seien im Gleichgewicht und zur u -Axe schiefsymmetrisch. Es gilt daher die Entwicklung:

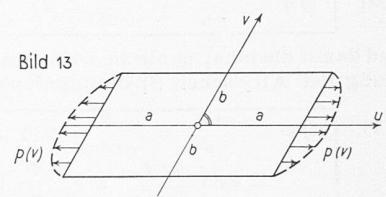
$$p(v) = \frac{l_0}{2} + \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} l_n \cos B_n v$$

mit $B_n = n\pi/b$ *Randbedingungen:*Für $u = \pm a$ ist:

$$\sigma_u = \Phi_{vv} = p(v) \\ \tau_{uv} = -\Phi_{uv} = 0$$

Für $v = \pm b$ ist:

$$\sigma_v = \Phi_{uu} = 0 \\ \tau_{uv} = -\Phi_{uv} = 0$$

*Ansatz:*

Die Funktion Φ weist hier nur Polarsymmetrie auf, d. h.: $\Phi(-u, -v) \equiv \Phi(u, v)$

Der Ansatz ist der selbe wie für die homogene Plattengleichung, mit einem Zusatz $A v^2$ für das Glied $l_0/2$ der Entwicklung von $p(v)$:

$$\Phi = A v^2 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [\cos A_m (u + c v) \{ C_{1m} Ch A_m s v + C_{2m} Sh A_m s v \} \\ + \sin A_m (u + c v) \{ C_{3m} Sh A_m s v + C_{4m} Ch A_m s v \}] \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [\cos B_n (cu + v) \{ D_{1n} Ch B_n s u + D_{2n} Sh B_n s u \} \\ + \sin B_n (cu + v) \{ D_{3n} Sh B_n s u + D_{4n} Ch B_n s u \}]$$

Die Randbedingungen sind mit diesem Ansatz streng erfüllt. Die Auswertung ist hier jedoch umfangreicher als früher, da Entwicklungen von gewissen Funktionenreihen in Fourier'sche Reihen notwendig sind. Unter Benutzung geeigneter mathematischer Methoden kann der sonst beträchtliche Arbeitsaufwand wesentlich herabgemindert werden.

Das neue Motorschiff „Waldstätter“

DK 629.122.1 – 843.6 (494)

Eine Rundfahrt mit dem «Waldstätter» anlässlich des 4. Städtebaukongresses in Luzern¹⁾ bot verschiedenen Kollegen Gelegenheit, das neue Boot²⁾ nach alter Schweizerart und unbeschwert von genauerer Fachkenntnis massiv zu kritisieren. Wir erhielten dabei den Eindruck, dass diese Kritik an der richtigen Stelle vorgebracht werden sollte und teilten einige uns wichtig erscheinende Punkte der Direktion der Dampfschiffgesellschaft des Vierwaldstättersees mit, worauf uns Dipl. Ing. A. Perrig im wesentlichen wie folgt antwortete.

A. Form der Aufbauten

Es ist verständlich, dass viele Architekten leicht versucht sind, ein wesentlich technisches Bauwerk, wie es ein Schiff ist, von gleichen oder ähnlichen Voraussetzungen ausgehend zu beurteilen, wie wenn es sich um irgend einen profanen Bau, ein Wohnhaus, ein Verwaltungsgebäude und dgl. handeln würde. «Reinheit der Struktur ist, architektonisch betrachtet, alles bei einem Bau» sagt der Rembrandtdeutsche in seinem Werk «Der Geist des Ganzen». Diese Reinheit liegt jedenfalls dann vor, wenn das Bauwerk eine organische Einheit, seine Form der adäquaten, klare, wahre und logische Ausdruck dieser Einheit und ihres Sinnes und Zweckes ist. Dass die Lage des Steuerhauses unmittelbar über dem Maschinenraum, dass die direkte Verbindung zwischen den Maschinen und dem Führerstand und dass der daraus zwangsläufig sich ergebende frontale Aufbau u. a. die logische Konsequenz der Konzentration von Steuerung und Maschinenbedienung in einer Hand sind, ist dem Ingenieur, nicht aber dem Architekten, ohne weiteres klar. Wir hatten übrigens für die Pro-

¹⁾ s. Nr. 24, S. 335 lfd. Jgs.²⁾ Beschreibung s. Nr. 19, S. 257* lfd. Jgs.