

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 67 (1949)
Heft: 30

Artikel: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Stützenmomente des Durchlaufträgers
Autor: Melan, Ernst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-84098>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Stützenmomente des Durchlaufträgers

Von Dr. techn. ERNST MELAN, Professor der Technischen Hochschule in Wien

DK 624.072.23

Das bekannte Verfahren von *H. Cross* wird häufig zur Berechnung von Durchlaufträgern verwendet. Man erhält für jedes Stützenmoment M_r eine Näherungsfolge von zwei Werten $M_{r,r-1}^{(0)}$, $M_{r,r-1}^{(1)}$... $M_{r,r-1}^{(n)}$ und $M_{r,r+1}^{(0)}$, $M_{r,r+1}^{(1)}$... $M_{r,r+1}^{(n)}$ und bricht die Rechnung dann ab, wenn mit hinreichender Genauigkeit $M_{r,r-1}^{(n)} = M_{r,r+1}^{(n)} = M_r$ ist.

Der Verfasser hat in einem Aufsatz¹⁾ gezeigt, dass das Cross'sche Verfahren bei einem beliebigen Tragwerk stets konvergiert; der selbe Gedanke, der bei diesem Konvergenzbeweis verwendet wurde, legt für die Berechnung des Durchlaufträgers eine Aenderung der Methode von Cross nahe, durch die an Stelle der beiden Momente $M_{r,r-1}^{(n)}$ und $M_{r,r+1}^{(n)}$ eine einzige Näherungsfolge $M_r^{(n)}$ erhalten wird; dieser Umstand bedeutet eine bemerkenswerte Vereinfachung der Rechnung. Der Rechnungsgang ist hierbei folgender:

Man bringt die bekannten Clapeyron'schen Gleichungen

$$\lambda_r X_r - 1 + 2(\lambda_r + \lambda_{r+1}) X_r + \lambda_{r+1} X_{r+1} + R_r \lambda_r + L_{r+1} \lambda_{r+1} = 0$$

auf die Form

$$X_r = -a_{r,r-1} X_{r-1} - a_{r,r+1} X_{r+1} - V_r$$

wobei

$$a_{r,r-1} = \frac{\lambda_r}{2(\lambda_r + \lambda_{r+1})}, \quad a_{r,r+1} = \frac{\lambda_{r+1}}{2(\lambda_r + \lambda_{r+1})}, \\ V_r = R_r a_{r,r-1} + L_{r+1} a_{r,r+1}$$

bedeutet. Mit den Werten $X_r^{(0)} = -V_r$ beginnend, erhält man allgemein aus den Werten $X_r^{(n-1)}$ die verbesserten $X_r^{(n)}$ mittels der Beziehung

$$X_r^{(n)} = -a_{r,r-1} X_{r-1}^{(n-1)} - a_{r,r+1} X_{r+1}^{(n-1)} - V_r$$

Vorteilhaft wird man, wie dies bei dem Verfahren von Cross üblich ist, nicht die Werte $X_r^{(n)}$, sondern die Korrekturen

$$\Delta X_r^{(n)} = X_r^{(n)} - X_r^{(n-1)} = -a_{r,r-1} \Delta X_{r-1}^{(n-1)} - a_{r,r+1} \Delta X_{r+1}^{(n-1)}$$

mit $\Delta X_r^{(0)} = -V_r$ und aus ihnen die $X_r^{(n)}$ mittels

$$X_r^{(n)} = \Delta X_r^{(0)} + \Delta X_r^{(1)} + \dots + \Delta X_r^{(n-1)} + \Delta X_r^{(n)}$$

berechnen. Dass dieses Verfahren wirklich gegen die richtigen Lösungen X_r konvergiert, ergibt die folgende Ueberlegung.

Bringt man das lineare Gleichungssystem von s Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten x_k

$$\sum_k c_{ik} x_k + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

auf die Form

$$x_i = -\sum_k \frac{c_{ik}}{c_{ii}} x_k - \frac{b_i}{c_{ii}} = -\sum_k a_{ik} x_k - d_i \quad (a_{ii} = 0)$$

und verwendet die Näherungslösungen

$$x_i^{(n)} = -\sum_k a_{ik} x_k^{(n-1)} - d_i$$

so beträgt der Fehler der n -ten Näherungslösung

$$z_i^{(n)} = x_i - x_i^{(n)} = \sum_k a_{ik} x_k + \sum_k a_{ik} x_k^{(n-1)} \\ = -\sum_k a_{ik} z_k^{(n-1)}$$

Sollen sich also die Näherungen $x_i^{(n)}$ den richtigen Lösungen

x_i nähern, so müssen die $z_i^{(n)}$ bei hinreichend grossem n beliebig klein werden, d. h. es muss

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_i^{(n)} = 0$$

sein.

Beginnt man mit beliebigen Werten $z_i^{(0)}$, so wird der Fehler der ersten Verbesserung $z_i^{(1)}$

$$z_i^{(1)} = -\sum_k a_{ik} z_k^{(0)}$$

und der zweiten Verbesserung

$$z_i^{(2)} = -\sum_k a_{ik} z_k^{(1)}$$

Setzt man hierin den Wert

$$z_k^{(1)} = -\sum_j a_{kj} z_j^{(0)}$$

ein, so erhält man

$$z_i^{(2)} = (-1)^2 \sum_k a_{ik} \sum_j a_{kj} z_j^{(0)}$$

und nach der Vertauschung der Summationsfolge

$$z_i^{(2)} = (-1)^2 \sum_j \sum_k a_{ik} a_{kj} z_j^{(0)}$$

Bezeichnet man

$$\sum_k a_{ik} a_{kj} = a_{ij}^{(2)}$$

so ergibt sich

$$z_i^{(2)} = (-1)^2 \sum_j a_{ij}^{(2)} z_j^{(0)}$$

Weiter wird

$$z_i^{(3)} = -\sum_k a_{ik} z_k^{(2)}$$

mit $z_k^{(2)}$

$$z_k^{(2)} = (-1)^2 \sum_j a_{kj}^{(2)} z_j^{(0)}$$

also mit der unwesentlichen Vertauschung von j und k

$$z_i^{(3)} = (-1)^3 \sum_j a_{ij}^{(3)} z_j^{(0)}$$

und daraus ebenso wie früher

$$z_i^{(3)} = (-1)^3 \sum_k a_{ik}^{(3)} z_k^{(0)}$$

wobei

$$a_{ik}^{(3)} = \sum_j a_{ij}^{(2)} a_{jk}^{(2)}$$

gesetzt wurde. Allgemein erhält man durch Wiederholung

$$z_i^{(n)} = (-1)^n \sum_k a_{ik}^{(n)} z_k^{(0)}$$

$$a_{ik}^{(n)} = \sum_j a_{ij}^{(n-1)} a_{jk}^{(n-1)} \quad \text{mit} \quad a_{ik}^{(2)} = \sum_j a_{ij}^{(1)} a_{jk}^{(1)}$$

Daraus folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} z_i^{(n)} = 0$ wird, wenn auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ik}^{(n)} = 0$$

und dies lässt sich wie folgt zeigen, vorausgesetzt, dass $\sum_k |a_{ik}| < 1$ ist.

Bezeichnet $a_{j'k}^{(n-1)}$ das grösste aller $a_{jk}^{(n-1)}$ ($j = 1, 2, \dots, s$), so ist

$$a_{ik}^{(n)} = \sum_j a_{ij}^{(n-1)} a_{jk}^{(n-1)} < \sum_j a_{ij}^{(n-1)} a_{j'k}^{(n-1)} = s_i a_{j'k}^{(n-1)}$$

¹⁾ Eine Vereinfachung der Methode von Cross, «Oesterr. Bauzeitung» 1947.

$i \ k$	$a_{i \ k}$	$L_{i \ k}$ $R_{i \ k}$	$a_{i \ k} L_{i \ k}$ $a_{i \ k} R_{i \ k}$	$\Delta X_k^{(0)}$ ΔX_k	$a_{i \ k} \Delta X_k^{(0)}$ ΔX_k	$\Delta X_k^{(1)}$ ΔX_k	$a_{i \ k} \Delta X_k^{(1)}$ ΔX_k	$\Delta X_k^{(2)}$ ΔX_k	$a_{i \ k} \Delta X_k^{(2)}$ ΔX_k	$\Delta X_k^{(3)}$ ΔX_k	$a_{i \ k} \Delta X_k^{(3)}$ ΔX_k	$\Delta X_k^{(4)}$ ΔX_k	$a_{i \ k} \Delta X_k^{(4)}$ ΔX_k	$\Delta X_k^{(5)}$ ΔX_k	$a_{i \ k} \Delta X_k^{(5)}$ ΔX_k	$\Delta X_k^{(6)}$ ΔX_k
1-0	0,240	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-2	0,260	75,00	-19,500	-75,825	19,715	15,341	-3,989	-8,729	2,270	2,527	-0,657	-1,203	0,313	0,395	-0,103	-0,103
		$\Delta X_1 = -19,500$	$\Delta X_1 = 19,715$	$\Delta X_1 = -75,825$	$\Delta X_1 = -3,989$	$\Delta X_1 = 2,270$	$\Delta X_1 = -0,657$	$\Delta X_1 = -1,203$	$\Delta X_1 = 0,313$	$\Delta X_1 = -0,657$	$\Delta X_1 = -1,203$	$\Delta X_1 = 0,313$	$\Delta X_1 = -0,657$	$\Delta X_1 = -1,203$	$\Delta X_1 = 0,313$	$\Delta X_1 = -0,103$
2-1	0,325	75,00	-24,375	-19,500	6,338	19,715	-6,407	-3,989	1,296	2,270	-0,738	-0,657	0,214	0,313	-0,102	-0,102
2-3	0,175	294,00	-51,450	-51,450	9,003	13,269	-2,322	-7,033	1,231	2,658	-0,465	-1,036	0,181	0,436	-0,076	-0,076
		$\Delta X_2 = 75,825$	$\Delta X_2 = 15,341$	$\Delta X_2 = -19,500$	$\Delta X_2 = -8,729$	$\Delta X_2 = 2,270$	$\Delta X_2 = -0,657$	$\Delta X_2 = -1,203$	$\Delta X_2 = 0,313$	$\Delta X_2 = -0,657$	$\Delta X_2 = -1,203$	$\Delta X_2 = 0,313$	$\Delta X_2 = -0,657$	$\Delta X_2 = -1,036$	$\Delta X_2 = 0,395$	$\Delta X_2 = -0,178$
3-2	0,175	294,00	-51,450	-75,825	13,269	15,341	-2,685	-8,729	1,528	2,527	-0,442	-1,203	0,211	0,395	-0,069	-0,069
3-4	0,325	0	0	0	0	13,377	-4,348	-3,478	1,130	1,829	-0,594	-0,691	0,225	0,269	-0,088	-0,088
		$\Delta X_3 = 51,450$	$\Delta X_3 = 13,269$	$\Delta X_3 = -51,450$	$\Delta X_3 = -7,033$	$\Delta X_3 = 2,658$	$\Delta X_3 = -0,657$	$\Delta X_3 = -1,036$	$\Delta X_3 = 0,436$	$\Delta X_3 = -1,036$	$\Delta X_3 = -1,036$	$\Delta X_3 = 0,436$	$\Delta X_3 = -1,036$	$\Delta X_3 = -0,691$	$\Delta X_3 = 0,269$	$\Delta X_3 = -0,157$
4-3	0,260	0	0	-51,450	13,377	13,269	-3,478	-7,033	1,829	2,658	-0,691	-1,036	0,269	0,436	-0,113	-0,113
4-5	0,240	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		$\Delta X_4 = 0$	$\Delta X_4 = 13,377$	$\Delta X_4 = -51,450$	$\Delta X_4 = -3,478$	$\Delta X_4 = 1,829$	$\Delta X_4 = -0,691$	$\Delta X_4 = -1,036$	$\Delta X_4 = 0,269$	$\Delta X_4 = -0,691$	$\Delta X_4 = -1,036$	$\Delta X_4 = 0,269$	$\Delta X_4 = -0,691$	$\Delta X_4 = -1,036$	$\Delta X_4 = 0,269$	$\Delta X_4 = -0,113$

Ebenso ist

$$a_{j'k}^{(n-1)} = \sum_m a_{j'm}^{(n-2)} a_{mk}^{(n-2)} < \sum_m a_{j'm}^{(n-1)} a_{mk}^{(n-1)} = s_{j'} a_{m'k}^{(n-2)}$$

wenn $a_{m'k}^{(n-2)}$ wiederum das grösste aller a_{mk} ($m = 1, 2, \dots, s$) bedeutet. Also ist

$$a_{ik}^{(n)} < a_{m'k}^{(n-2)} s_i s_{j'}$$

und durch Wiederholung findet man

$$a_{ik}^{(n)} < a_{pk} s_i s_j \dots s_{k'}$$

$a_{ik}^{(n)}$ wird also mit wachsendem n gegen Null abnehmen, wenn die Summe der Koeffizienten in jeder Gleichung i

$$s_i = \sum_k |a_{ik}| < 1$$

beträgt.

Bei den Clapeyron'schen Gleichungen hat aber diese Koeffizientensumme den Wert

$$s_r = \frac{\lambda_r}{2(\lambda_r + \lambda_{r+1})} + \frac{\lambda_r + 1}{2(\lambda_r + \lambda_{r+1})} = 1/2$$

mit Ausnahme der ersten und letzten Gleichung, bei welchen wegen des Fehlens von X_0 bzw. X_s

$$s_1 = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} < 1/2 \text{ und } s_s = \frac{\lambda_s}{2(\lambda_s - 1 + \lambda_s)} < 1/2$$

Damit ist der Beweis erbracht, dass das beschriebene Verfahren tatsächlich Lösungen liefert, die gegen die richtigen konvergieren.

Die Anwendung soll an einem Durchlaufträger über fünf Felder gezeigt werden, von denen das zweite mit einer gleichmässig verteilten Last von 3,00 t/m, das dritte mit 6,00 t/m belastet ist. Die Stützweiten l_r , die Verhältnisse der Trägheitsmomente J_0/J_r und die reduzierten Feldweiten $l_r \frac{J_0}{J_r} = \lambda_r$ sowie die Werte $a_{r,r-1}$ und $a_{r,r+1}$, endlich die Belastungsglieder L_r bzw. $R_r = \frac{q l^2}{4}$ sind der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

	0	1	2	3	4	5
l_r	8,00	10,00	14,00	10,00	8,00	
J_0/J_r	3,00	2,60	1,00	2,60	3,00	
λ_r	24,00	26,00	14,00	26,00	24,00	
$2(\lambda_r + \lambda_{r+1})$	100	80	80	100		
$a_{r,r-1}$ bzw. $a_{r,r+1}$	0,240	0,260	0,325	0,175	0,175	0,325
$q l^2 / 4$	0	75,00	294,00	0	0	

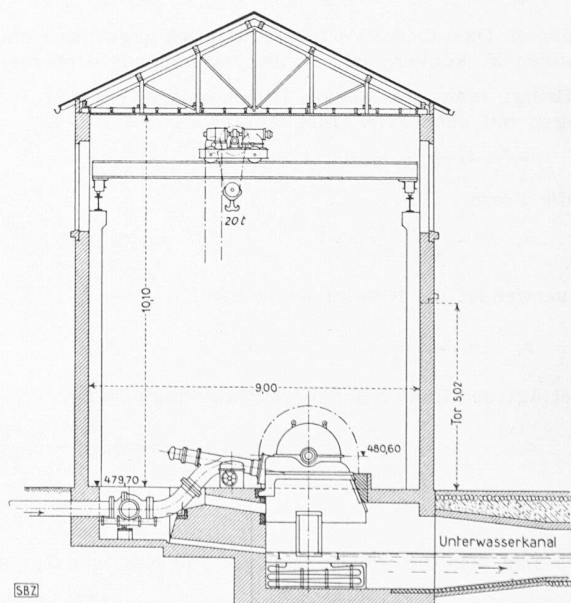


Bild 15. Querschnitt durch das Maschinenhaus Plons, 1:200

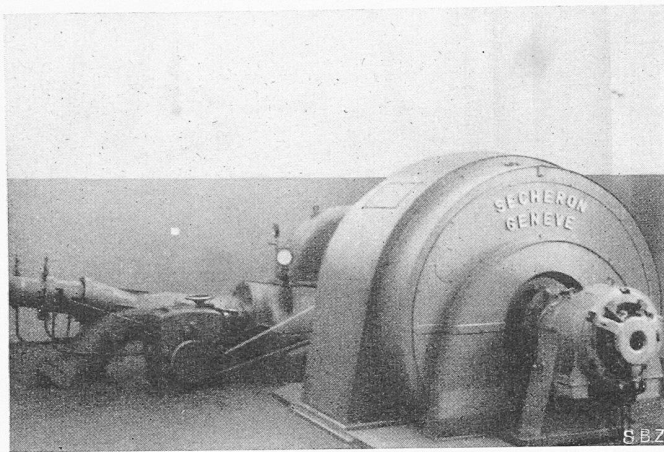


Bild 13. Escher-Wyss-Freistrahlturbine von 6000 PS, direkt gekuppelt mit Drehstrom-Generator von Sécheron

Entsprechend den Gleichungen

$$\Delta X_r^{(n)} = -a_{r,r-1} \Delta X_{r-1}^{(n-1)} - a_{r,r+1} \Delta X_{r+1}^{(n-1)}$$

erhält man die in der Tabelle berechneten Verbesserungen

$$\Delta X_r^{(n)}$$

Damit ergeben sich nach der Gleichung

$$X(n) = \sum_{r=0}^n X_r^{(r)}$$

	$X_1^{(x)}$	$X_2^{(y)}$	$X_3^{(y)}$	$X_4^{(y)}$
0	— 19,500	— 75,825	— 51,450	— 0
1	19,715	15,341	13,269	13,377
2	— 3,989	— 8,729	— 7,033	— 3,478
3	2,270	2,527	2,658	1,829
4	— 0,657	— 1,203	— 1,036	— 0,691
5	0,313	0,395	0,436	0,269
6	— 0,103	— 0,178	— 0,157	— 0,113

$X_r^{(6)}$ — 1,951 — 67,672 — 43,311 — 11,193

Die genauen Werte betragen hingegen für die Stützenmomente

— 1,914 — 67,628 — 43,258 — 11,222

Die Konvergenz ist demnach durchaus befriedigend und wie man sich überzeugen kann, die gleiche wie bei dem Verfahren von Cross, das doppelt so viel Multiplikationen und Additionen erfordert.

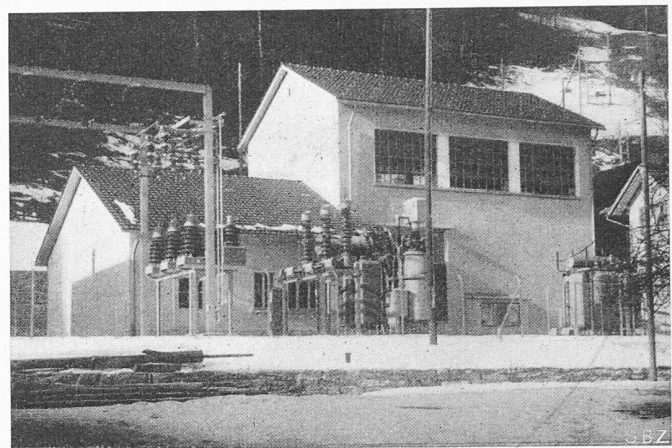


Bild 14. Ansicht der Zentrale von Osten. Vorn die Freiluft-Schaltanlage, hinten rechts die 50 kV-Holzmastenleitung der NOK

Das Kraftwerk Plons-Mels

DK 621.311.21 (494.282)

Nach Mitteilungen von Obergering. A. L. CAFLISCH, Zürich;
Ing. K. J. FETZ, Zürich und Obergering. W. SCHÜEPP, Zürich;
zusammengefasst von Dipl. Ing. A. OSTERTAG

8. Das Maschinenhaus

(Schluss von S. 392)

Als Standort wurde eine Stelle am Fuss des Steilhanges östlich der Chemischen Fabrik Neher so gewählt, dass sich ein maximales Nutzgefälle ergibt. Eine kurze Zufahrtstrasse und der Unterwasserkanal konnten mit geringen Kosten erstellt werden.

Das Maschinenhaus kam vollständig auf Fels zu stehen. Die Bauarbeiten wurden durch den engen, zwischen den umliegenden Häusern verfügbaren Platz sowie durch den Umstand erschwert, dass die Baupläne erst nach erfolgtem Baubeschluss und nur in ständigem Kontakt mit den Lieferanten der mechanischen und elektrischen Ausrüstungen erstellt werden konnten. Das Gebäude ist ein Eisenbetonbau von rd. 26 m Länge, 10 m Breite und 10 m l. Höhe, der mit einem auf Profileisenbindern abgestützten Ziegeldach überdeckt ist und sich schön in die Landschaft einfügt. Ein späterer Ausbau ist ohne weiteres möglich und vorbereitet.

Schon während der Projektierung des Werkes wurde dem Umstand Rechnung getragen, dass nur ein Teil der erzeugten Energie in Mels und Umgebung abgesetzt werden kann, während der Rest von einem grossen Hochspannungsnetz übernommen werden muss. Da ein solches Netz in der Lage ist, allfällige Betriebsunterbrüche in der neuen Zentrale zu überbrücken, durfte man sich mit der Aufstellung einer einzigen Maschinengruppe begnügen. Dies erlaubte gegenüber der ursprünglich vorgesehenen Ausführung mit zwei Gruppen eine wesentliche Vereinfachung der Wasserzuleitung zur Turbine; Raumbedarf und Anlagekosten konnten verringert werden, und der halbautomatische Betrieb gestaltet sich besonders einfach.

Bei dem verfügbaren Bruttogefälle von rd. 550 m führten eingehende Untersuchungen zu einer günstigsten Turbinenleistung von 6000 PS. Dabei ergab sich ein Nettogefälle von 505 m und eine Wassermenge von 1024 l/s. Mit der gewählten verhältnismässig hohen Drehzahl von 750 U/min konnte mit noch guten Wirkungsgraden über einen grösseren Lastbereich gerechnet wer-

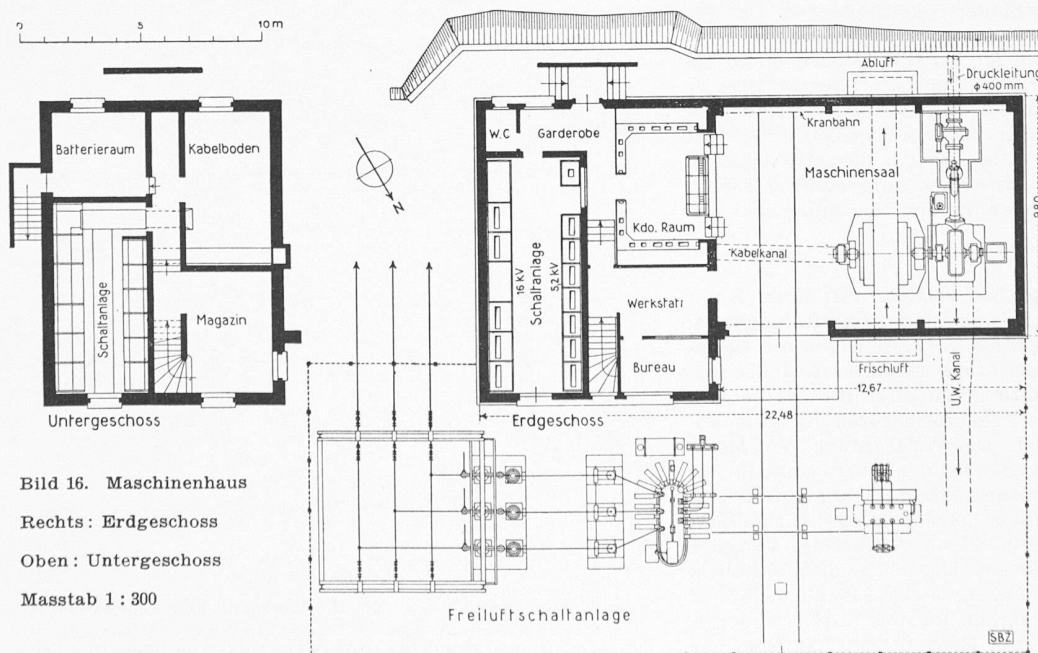


Bild 16. Maschinenhaus

Rechts: Erdgeschoss

Oben: Untergeschoss

Masstab 1: 300