Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 67 (1949)

Heft: 3: Zum Rücktritt von Schulrats-Präsident Rohn

Artikel: Etude de l'influence du poids propre sur la stabilité d'une plaque rectangulaire

Autor: Favre, Henry

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83977

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Etude de l'influence du poids propre sur la stabilité d'une plaque rectangulaire

Par HENRY FAVRE, Prof. Dr., Zurich

DK 624.075.4

La stabilité d'un élément de construction peut, dans certains cas, être influencée par le poids de ses différentes parties. *Euler*, puis, beaucoup plus tard, *Greenhill, Jasinsky, Dondorff, Grishcoff, Timoshenko* et d'autres auteurs, ont étudié l'influence du poids propre sur le flambage des barres prismatiques[1]). Nous nous proposons d'examiner ici cette question pour une plaque rectangulaire, en nous bornant à un cas fondamental.

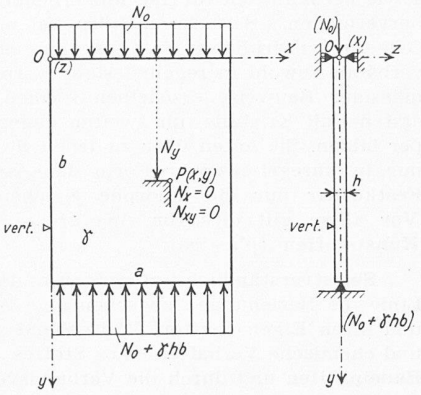


Fig. 1

Soit une plaque rectangulaire mince, articulée le long du contour et dont deux côtés sont verticaux (fig. 1). Examinons, en tenant compte du poids propre, dans quelles conditions cette plaque peut flamber sous l'action d'une surcharge verticale uniforme N_0, agissant sur le côté supérieur.

Introduisons les axes x, y, z indiqués dans la figure et désignons par a, b les côtés de la plaque, h son épaisseur et γ le poids spécifique. En un point quelconque $P(x, y)$ du feuillet moyen, les forces normales, agissant sur des éléments de surface $1 \cdot h$ respectivement parallèles aux plans y, z et z, x, sont, avant le flambage:

$$(1) \qquad N_x = N_{xy} = 0, \qquad N_y = N_0 + \gamma h y,$$

N_y étant considéré comme positif dans le cas d'une compression.

Appliquons la méthode de l'énergie de S. Timoshenko. Imaginons que la plaque flambe légèrement, et désignons par w le déplacement, parallèle à l'axe z, d'un point du feuillet moyen. On peut représenter ce déplacement par la série double:

$$(2) \qquad w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Soit, dans ce déplacement, ΔT_h le travail produit par les forces extérieures, y compris les forces massiques, et ΔV, l'énergie de déformation due à la flexion. On a:

$$(3) \qquad \underline{\Delta T_h = \Delta V},$$

où

$$(4) \qquad \left\{ \Delta T_h = \frac{1}{2} \int\int \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \times \right. \\ \times\, dx\, dy,$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta V = \frac{D}{2} \int\int \Bigg\{ & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \\ & - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right)^2 \right] \Bigg\} dx\, dy, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(6) \qquad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)},$$

E désignant le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson[2]). Nous supposons que la limite d'élasticité ne soit en aucun point dépassée, à l'instant où la plaque commence à flamber.

En remplaçant N_x, N_y, N_{xy} et w par les expressions (1) et (2), la formule (4) devient, après intégration dans le domaine de la plaque:

$$\Delta T_h = \frac{\pi^2 a}{8b} N_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^2_{mn} + \\ + \frac{\pi^2}{4} \gamma h a \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^2 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i}^{\infty} \frac{n^2 + i^2}{(n^2 - i^2)^2} n i a_{mn} a_{mi} \right\},$$

les nombres i étant tous les entiers supérieurs à n et tels que $n + i$ soit impair. La formule (5) devient:

$$\Delta V = \frac{\pi^4 a b}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 a^2_{mn}.$$

En égalant ces deux valeurs et en résolvant par rapport à N_0, on obtient:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_0 = \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^2_{mn}} \Bigg[& \pi^2 b^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 a^2_{mn} - \\ & - \frac{\gamma h b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ n^2 a^2_{mn} - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i}^{\infty} \frac{n^2 + i^2}{(n^2 - i^2)^2} n i a_{mn} a_{mi} \right\} \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

La valeur critique pour le flambage $(N_0)_{cr.}$ correspond au minimum de N_0. Nous devons donc choisir les coefficients a_{mn} de façon à annuler les dérivées partielles $\frac{\partial N_0}{\partial a_{mn}}$, ce qui donne le système:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2\pi^2 b^2 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 a_{mn} - \\ & - \gamma h b \left\{ n^2 a_{mn} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i}^{\infty} \frac{(n^2 + i^2)\, n i}{(n^2 - i^2)^2} a_{mi} \right\} - \\ & - 2 (N_0)_{cr.} n^2 a_{mn} = 0, \\ & (m \text{ et } n = 1, 2, \ldots, \infty) \end{aligned} \right.$$

où l'on doit prendre pour i tous les nombres entiers positifs tels que $n + i$ soit impair.

Pour simplifier, nous introduirons le rapport:

$$(9) \qquad \xi = \frac{\gamma h b}{\left(\frac{\pi^2 D}{a^2}\right)}.$$

Dans celui-ci, le numérateur est le poids $\gamma h b$ d'un élément vertical de largeur égale à l'unité; le dénominateur est la charge d'Euler $\pi^2 D/a^2$ d'un élément horizontal de même largeur. Nous désignerons en outre par k le rapport de la charge critique $(N_0)_{cr.}$ à la charge d'Euler:

$$(10) \qquad k = \frac{(N_0)_{cr.}}{\left(\frac{\pi^2 D}{a^2}\right)}.$$

D'autre part, comme on le verrait facilement en ne conservant, en première approximation, qu'un seul coefficient dans la formule (8), la plaque flambera, horizontalement, en une seule demi-onde, dont l'amplitude est fonction de y. On a donc $a_{mn} = 0$, sauf pour $m = 1$, et nous pouvons poser, pour simplifier, $a_{1n} = a_n$ [3]).

Dans ces conditions, le système (8) devient:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 a_n - \frac{\xi}{2} \left[n^2 a_n - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i}^{\infty} \frac{(n^2 + i^2)\, n i}{(n^2 - i^2)^2} a_i \right] - \\ & - n^2 a_n k = 0. \\ & (n = 1, 2, \ldots, \infty) \end{aligned} \right.$$

Pour que ce système d'équations admette une solution différente de la solution triviale $a_1 = a_2, \ldots = 0$, il est nécessaire que le déterminant général soit nul. On obtient ainsi, pour déterminer k, une équation algébrique de degré infini, ne pouvant être résolue que par approximations successives.

Première approximation. Conservons un seul coefficient a_n. Le système (11) se réduit alors à l'unique équation:

$$\frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2} - k = 0,$$

d'où l'on tire:

$$(12) \qquad \frac{(N_0)_{cr.}}{\left(\frac{\pi^2 D}{a^2}\right)} = k = \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{\xi}{2}.$$

[1]) Voir par ex. *S. Timoshenko.* Théorie de la stabilité élastique, Ch. II, § 23.

[2]) Voir *S. Timoshenko,* Théorie de la stabilité élastique, Ch. VII, § 62.

[3]) On peut d'ailleurs démontrer rigoureusement, en appliquant la théorie des équations linéaires, que tous les coefficients a_{mn} doivent être nuls, sauf ceux correspondant à une valeur déterminée de m. Cela revient à dire qu'horizontalement, la plaque doit flamber en demi-ondes sinusoïdales, dont le nombre est égal à cette valeur particulière de m. A l'aide du diagramme de la figure 2, d'autre part, on reconnaîtra sans difficulté que c'est $m = 1$ qui correspond, dans tous les cas, à la plus petite valeur de k.

Pour chaque valeur du rapport b/a, il faut prendre pour n le nombre entier positif correspondant à la plus petite valeur de k.

Ce résultat peut s'écrire:

$$\frac{(N_0)_{cr.} + \frac{\gamma h b}{2}}{\left(\frac{\pi^2 D}{a^2}\right)} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{b}{a} + n^2 \frac{a}{b}\right)^2.$$

Le membre de droite étant la valeur de $\frac{(N_0)_{cr.}}{\pi^2 D/a^2}$ lorsque le poids de la plaque est négligeable, on voit qu'*en première approximation, l'influence du poids propre sur le flambage revient à ajouter à la surcharge N_0 la moitié du poids d'un élément vertical de largeur égale à l'unité.* (à suivre)

Das Problem der hohen Kanalzahlen in der Ultrakurzwellen-Vielfachtelephonie

Von Prof. Dr. F. TANK, Zürich DK 621.396.41.029.6

In den Anatomieheften Leonardo da Vincis findet sich die Bemerkung: «An den Erfindungen der Natur fehlt nichts, und nichts ist bei ihnen überflüssig.» Nach dem gleichen Grundsatz baut die Technik. Erst in einem längeren Entwicklungsprozess pflegt diejenige Form gefunden zu werden, die den Anforderungen einer idealen Oekonomie am besten entspricht. Die Ultrakurzwellen-Mehrkanaltelephonie mit Richtstrahlen, dieses jüngste Kind der elektrischen Nachrichtentechnik, ist ein bezeichnendes Beispiel für die Bedeutung der Oekonomieprobleme in der Technik. Ihr Erfolg hängt nicht nur von Uebertragungsgüte und Betriebsicherheit, sondern wesentlich auch von der Lösung der Probleme geringsten Aufwandes ab. Von einem solchen Gesichtspunkt aus ist auch die wichtige Frage der Führung sehr vieler gleichzeitiger Gespräche, d. h. der Uebertragung hoher Kanalzahlen, zu betrachten. Es sind Verfahren zu ermitteln, die mit der Vermehrung der Kanalzahl nicht einen progressiven Aufwand, sondern, pro Kanal gerechnet, günstigere Verhältnisse mit sich bringen. Dadurch, dass man bei den bekannten Methoden einfach die Kanalzahl vergrössert, wird dieses Ziel nicht erreicht; denn Frequenzbandbreiten und Leistungsbedarf werden untragbar. Es handelt sich darum, Wege zu beschreiten, die der Eigenart dieses Problems angepasst sind. Das Institut für Hochfrequenztechnik an der E. T. H. hat sich in den letzten Jahren mit dem Studium entsprechender Aufgaben eingehend befasst. Die Lösung liegt, wie insbesondere Staub [1, 2] zeigte, in der Entwicklung geeigneter Frequenzweichen im Gebiet der Ultrakurzwellen bzw. Mikrowellen.

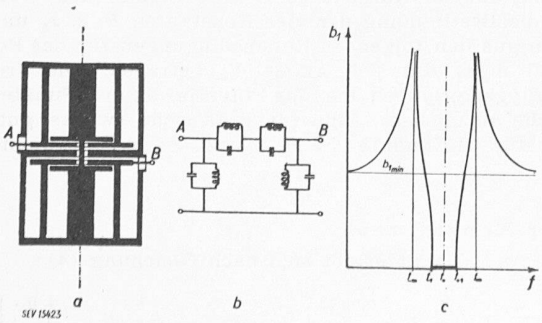
Solche Weichen erlauben es, mehrere Gruppen von simultanen Gesprächen gleichzeitig zu senden bzw. zu empfangen. So werden z. B. 72 Gespräche zweckmässig in 6 Gruppen zu 12 Gesprächen aufgeteilt; die Gruppenzahl kann jedoch gesteigert werden. Die technischen Probleme der Gesprächs-Uebertragung innerhalb einer Gruppe dürfen heute als in den wesentlichen Zügen gelöst betrachtet werden. Das Zusammenschalten der Gruppen bildet die neue Aufgabe.

Ultrakurzwellen und Mikrowellen überdecken einen Frequenzbereich, beginnend bei etwa 100 Mega-Hertz bis zu mehreren 1000 Mega-Hertz. Frequenzbandbreiten von einigen Mega-Hertz, wie sie sich bei der Simultanübertragung zahlreicher Gespräche mit Notwendigkeit ergeben, können in diesem Frequenzgebiet mit Hilfe von Breitband-Antennen [3] oder elektromagnetischen Hörnern ohne Schwierigkeiten abgestrahlt und empfangen werden. Das Uebertragungsmedium, der Luftraum, besitzt dabei die wertvolle Eigenschaft, zu gegenseitigen Störungen zwischen den einzelnen Uebertragungskanälen durch sogenanntes Uebersprechen kaum Anlass zu geben.

Die uns interessierenden Weichen stellen Filtersysteme dar, bestehend aus einem Hauptklemmenpaar und n Nebenklemmenpaaren. Jedem Nebenklemmenpaar ist ein bestimmtes Frequenzband in bestimmter Frequenzlage zugeordnet. Die Aufgabe der Weiche besteht darin, einen vollkommenen Energieaustausch zwischen den Nebenklemmenpaaren und dem Hauptklemmenpaar zu gewährleisten, während die Nebenklemmenpaare unter sich energetisch entkoppelt sein müssen. Jedes Nebenklemmenpaar muss daher an das Hauptklemmenpaar (und damit an die Antenne bzw. die Zuführungsleitung zur Antenne) angepasst sein, während, von einem Nebenklemmenpaar aus betrachtet, jedes übrige Klemmenpaar einen hohen Widerstand darstellt. Weichen sind in der Theorie der linearen Netzwerke schon seit längerer Zeit bekannt. Neu ist im vorliegenden Fall die Art ihrer Verwendung und ihre besondere Gestaltung. Ultrakurzwellen-Frequenzweichen lassen sich nach Staub verwirklichen durch Zusammenschaltung einer Anzahl von Reaktanz-Bandfiltern für Ultrakurzwellen, denen zwecks Transformation des Eingangs-Betriebswiderstandes auf einen genügend hohen Wert ausserhalb der Durchlassgrenzen ein geeignetes Uebertragungsglied zugeschaltet ist. In der Ultrakurzwellen-Technik lässt sich dieses durch ein konzentrisches, annähernd eine Viertelwellenlänge langes Stück einer konzentrischen Kabelleitung in besonders günstiger Weise ausführen. Bandfilter für Ultrakurzwellen sind von Staub entwickelt worden [4]. Ihr Durchlassbereich beträgt je nach den besonderen Bedingungen ein bis einige Mega-Hertz. Sie eignen sich deshalb besonders gut zur Aussiebung von Frequenzabschnitten, die ganzen Gesprächsgruppen zukommen.

Da die einzelnen Zweige der Weiche voneinander unabhängig sind, können sie auch in Ultrakurzwellen-Uebermittlungen eingeschaltet werden, die an sich ganz verschiedener Art sind, sodass z. B. gleichzeitig Bild- oder Fernsehsendungen und Gesprächsübertragungen usw. möglich sind. Ein System mit Frequenzweiche für die Uebertragung von 72 und mehr Kanälen im Bereich von etwa 176 bis 193 Mega-Hertz ist von Fontanellaz entwickelt worden [5]. Die verfügbaren Frequenzbandbreiten werden dabei optimal ausgenutzt und die unerlässlichen Schaltelemente auf ein Mindestmass beschränkt. Die Gesprächsgüte ist einwandfrei, die Störung der Gespräche unter sich nicht merklich. Ein Eingehen auf Einzelheiten ist hier leider nicht möglich.

Es ist zu erwarten, dass die Technik in den nächsten Jahren sich noch weiter eingehend mit dem Problem der hohen Kanalzahlen in der Ultrakurzwellen-Richtstrahltelephonie befassen wird und dass diese Bestrebungen sich insbesondere befruchtend auf die Filtertechnik der Mikrowellen, d. h. der kürzesten Radiowellen im Frequenzgebiet über 1000 Mega-Hertz, auswirken werden. Die Ergebnisse werden von wichtiger, praktischer Bedeutung sein.



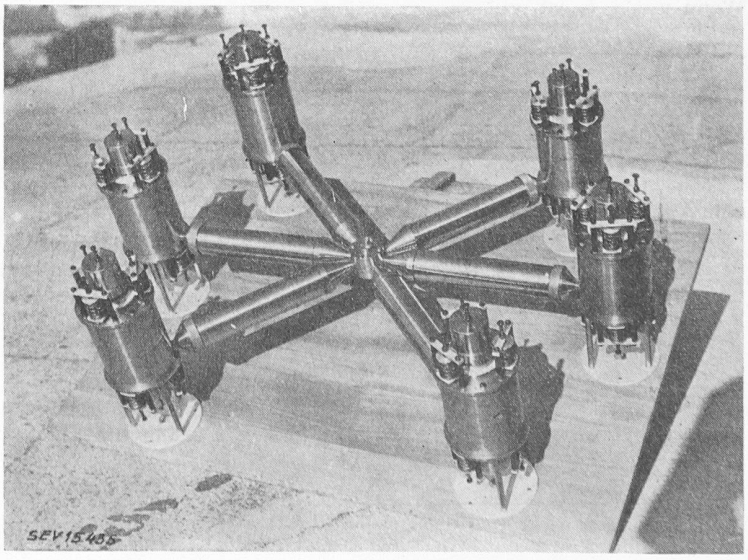


Bild 1. Topfbandfilter nach Staub

Bild 2 (rechts). Frequenzweiche nach Staub