Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 66 (1948)

Heft: 35

Artikel: Ebenes Knicken von Zweigelenkbogen unter Berücksichtigung des Aufbaues

Autor: Schibler, Willy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56786

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Stahlwasserbauten. Es handelt sich um ein langfristiges Arbeitsprogramm.

Die Tagung der Stahlberatungsstellen wird 1949 in Paris stattfinden. Die zukünftige Teilnahme der USA an den Tagungen, die durch einige Berichte ihr Interesse an unsern Bestrebungen bekundet haben, würde sehr willkommen sein. Auch die skandinavischen Länder sollen zur Teilnahme eingeladen werden. Das Sekretariat der internationalen Stahlberatungsstellen liegt jedes Jahr in den Händen desjenigen Landes, das die Tagung durchführt.

Nur über die Arbeit eines Kongresses zu berichten, der durch die Anwesenheit von Damen aus der nüchternen Sphäre herausgehoben wurde, wäre selbst in einer Fachzeitschrift unverzeihlich. Ashorne-Hill ist allen Teilnehmern zu einem Begriff englischer Gastfreundschaft und gediegener Geselligkeit geworden. Eine Vorstellung des «Kaufmann von Venedig» im Shakespeare-Theater in Stratford on Avon und ein Schluss-Diner in London waren gesellschaftliche Höhepunkte einiger unvergesslicher Tage.

E. Pestalozzi †

Ebenes Knicken von Zweigelenkbogen unter Berücksichtigung des Aufbaues

Von Dr. sc. techn. WILLY SCHIBLER, Alexandrien

DK 624.072.324

A. Einleitung

Es ist bekannt, dass ein Bogen in seiner Ebene ausknikken kann. Dies bedeutet, dass ein biegungsfreier Gleichgewichtszustand labil wird, wenn die Belastung eine gewisse Grösse überschreitet. Der kritische Zustand kann durch den Wert des Horizontalschubes beim Verlust der Stabilität — kritischer Horizontalschub — gekennzeichnet werden. Die Kenntnis des kritischen Horizontalschubes ist nicht nur für die Beurteilung der Knicksicherheit, sondern auch für die Abschätzung des Spannungszustandes bei Berücksichtigung der Formänderungen[1]) wichtig.

Das Stabilitätsproblem von Bogen ist von verschiedenen Autoren für den Fall des freien Bogens, d. h. für unmittelbar angreifende Lasten, behandelt worden[1]) [2]). Es soll hier die einfache Berechnung des kritischen Horizontalschubes von Zweigelenkbogenträgern unter Berücksichtigung des Aufbaues für einige häufige Tragwerksysteme angegeben werden. Wir betrachten zunächst die sieben Fälle von Bild 1, bei denen ein Fahrbahnträger auf dem Bogen mittelst Säulen ruht. Die Steifigkeit dieser Säulen ist im Vergleich mit der Steifigkeit des Bogens oder des Trägers stets sehr klein, sodass wir Gelenkstützen voraussetzen können. Neben dem freien Bogen (Fall 1) betrachten wir den gelenkigen Träger (Fall 2 und 3) und den durchlaufenden Träger (Fall 4 und 5). Der Träger mag entweder auf einem Pendel über dem Bogenscheitel ruhen und an seinen Enden ein festes und ein bewegliches Lager besitzen (Fall 2 und 4), oder unmittelbar gelenkig mit dem Bogenscheitel verbunden sein und sich dann beweglich auf beide Widerlager stützen (Fall 3 und 5). Ist das Verhältnis der Steifigkeit des Fahrbahnträgers zur Steifigkeit des Bogens sehr gross, so gelangen wir zum bereits in der Literatur behandelten Fall des versteiften Stabbogens[3]) [4]) (Fall 6 und 7).

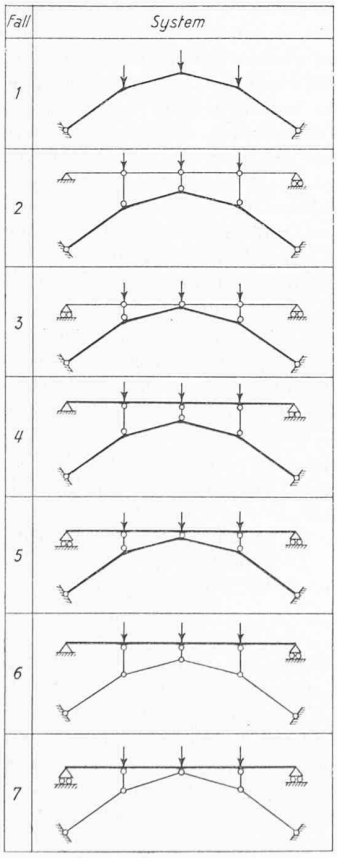

Bild 1

In einem Stabilitätsproblem ist das Tragwerk in seiner Anfangslage momentenfrei. Wir werden deshalb geradlinigen Verlauf der Bogenaxe[5]) zwischen den Säulenauflagerpunkten, sowie über diesen Punkten konzentrierte Lasten voraussetzen. Liegen die Eckpunkte des Bogens auf einer Parabel, so müssen die konzentrierten Lasten einander gleich sein.

[1]) *F. Stüssi:* Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis. SBZ Bd. 106, 1935, S 1*.

[2]) Siehe *S. Timoshenko:* Théorie de la stabilité élastique, Paris et Liège, 1943, sowie die dort erwähnten Autoren.

[3]) *F. Stüssi* und *E. Amstutz:* Verbesserte Formänderungstheorie von Stabbogen und verankerten Hängebrücken. SBZ Bd. 116, 1940, S. 119*, 132*.

[4]) *F. Stüssi:* Der Formänderungseinfluss beim versteiften Stabbogen. SBZ Bd. 108, S. 57*.

[5]) Wir vernachlässigen den lokalen Einfluss des Bogengewichtes.

Im folgenden werden wir uns auf den parabolischen vierfeldrigen Bogen beschränken. Die Ergebnisse werden eine gute Näherung für Bogen mit grösserer Felderzahl darstellen, wie wir es durch Vergleich des freien vierfeldrigen Bogens mit dem freien parabolischen Bogen (∞-feldrigen Bogen) zeigen werden. Nur für den Stabbogen führt die Annahme von nur vier Feldern zu eher ungenaueren Ergebnissen; dieser Fall ist jedoch, wie oben erwähnt, bereits untersucht worden.

B. Knickgleichungen

Da die Tragsysteme 1, 2, 3, 6 und 7 (Bild 1) als Sonderfälle der Systeme 4 und 5 betrachtet werden können, beginnen wir mit diesen zwei Fällen.

System 4

Bild 2 zeigt den symmetrischen, parabolischen Bogen $ABCDE$ von konstantem Trägheitsmoment J mit seinem Aufbau, dem Fahrbahnträger von konstantem Trägheitsmoment J' und den drei Gelenkstützen. Es bezeichnen a die Feldweite, $l = 4a$ die Stützweite, f den Pfeil, s die Höhe des Trägers über dem Scheitel, α und β die Neigungen der Bogenaxe und $\Theta = \alpha - \beta$ den Eckwinkel in B und D. Wir setzen

$$(1) \qquad \frac{f}{l} = \frac{f}{4a} = n$$

$$(2) \qquad \frac{s}{a} = m$$

womit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3f}{4a} = 3n \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{f}{4a} = n.$$

Der Horizontalschub infolge der drei gleichen Lasten P beträgt

$$(3) \qquad H = \frac{2Pa}{f} = \frac{P}{2n}.$$

Wir betrachten nun eine leicht ausgebogene Lage des Systems während des Ausknickens.

Die Verschiebungen der Punkte B, C und D sind durch eine einzige Grösse, beispielsweise die vertikale Durchbiegung η von B, vollständig bestimmt. Nach Bild 3 ergibt sich, unter Voraussetzung kleiner Formänderungen, für die horizontale Verschiebung von B

$$(4) \qquad \xi = \eta \operatorname{tg} \alpha = 3n\eta$$

und für diejenige von C

$$(5) \qquad \xi_m = \xi - \eta \operatorname{tg} \beta = \eta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) = 2n\eta.$$

Wir denken uns jetzt den ganzen Aufbau entfernt. Die auf den isolierten Rahmen (Bild 4) wirkenden Kräfte sind

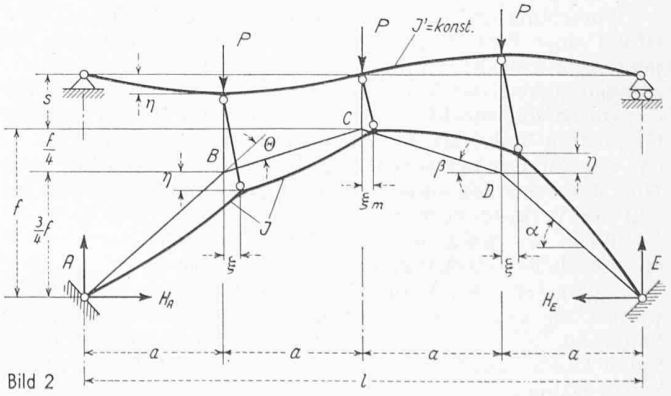

Bild 2

durch die nun schief stehenden Pendelstützen eingeleitet und können zerlegt werden in:

die drei gleichen vertikalen Kräfte P in B, C und D,

die zwei gleichen horizontalen Kräfte W in B und D,

die horizontale Kraft W_m in C,

die zwei gleichen und entgegengesetzten Kräfte V in B und D.

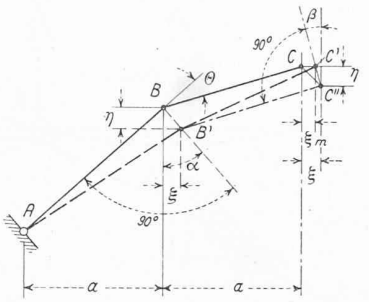

Bild 3

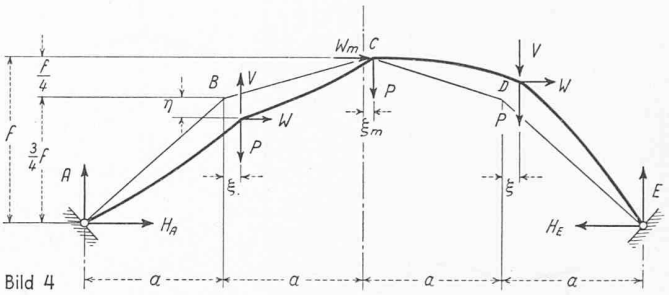

Bild 4

Die Kräfte W und W_m sind die waagrechten Komponenten der Stützenkräfte. Mit Gl. (1), (2), (4) und (5) ist

$$(6) \qquad W = \frac{P\xi}{s + \frac{f}{4}} = \frac{3n}{(m+n)\,a} P\eta$$

und

$$(7) \qquad W_m = \frac{P\xi_m}{s} = \frac{2n}{m\,a} P\eta .$$

W und W_m wirken selbstverständlich, mit entgegengesetzten Vorzeichen, auch auf den Träger; sie werden vom festen Auflager aufgenommen. Die Kräfte V ergeben sich aus der Steifigkeit der Fahrbahn. Wegen der gleichen Durchbiegung des Trägers und des Bogens ist, wenn E den Elastizitätsmodul bezeichnet,

$$(8) \qquad \eta = \frac{V\,(2a)^3}{48\,E\,J'} \quad \text{oder} \quad V = \frac{6\,E\,J'}{a^3}\,\eta .$$

Wir ermitteln die Biegungsmomente M in den Bogeneckpunkten. Wegen Antimetrie ist

$$(9) \qquad M_C = 0 \quad M_D = -M_B .$$

Die Kräfte W, W_m und V sind klein erster Ordnung und können deshalb am undeformierten Bogen wirkend angenommen werden.

Infolge der Kräfte P wird mit Gl. (4) und (5) die vertikale Reaktion in A

$$A = \frac{P}{4\,a}\left[(3a - \xi) + (2a - \xi_m) + (a - \xi)\right] =$$
$$= \frac{P}{4\,a}(6a - 8n\eta) = P\left(\frac{3}{2} - \frac{2n}{a}\eta\right),$$

die horizontale Reaktion in A

$$H_A = H$$

wobei H durch Gl. (3) gegeben ist, und das Biegungsmoment in B

$$M_B = A\,(a + \xi) - H\left(\frac{3}{4}f - \eta\right) =$$
$$= P\left(\frac{3}{2} - \frac{2n}{a}\eta\right)(a + 3n\eta) - H\,(3an - \eta)$$

oder, mit $P = 2nH$ und kleine Grössen zweiter Ordnung vernachlässigend:

$$(10) \qquad M_B = 2nH\left(\frac{3}{2}a - 2n\eta + \frac{9}{2}n\eta\right) -$$
$$- H\,(3an - \eta) = H\eta\,(1 + 5n^2) .$$

Infolge der Kräfte W wird mit Gl. (6)

$$(11) \qquad M_B = \frac{3}{8}Wf = \frac{3}{8}\,\frac{3n}{(m+n)\,a}\,2nH\eta\,4na =$$
$$= \frac{9n^3}{m+n}H\eta .$$

Infolge der Kräfte W_m ergibt sich mit Gl. (7)

$$(12) \qquad M_B = \frac{W_m f}{8} = \frac{2n}{8ma}\,2nH\eta\,4na = \frac{2n^3}{m}H\eta .$$

Infolge der Kräfte V erhalten wir mit Gl. (8)

$$(13) \qquad M_B = -\frac{Va}{2} = -\frac{3EJ'}{a^2}\eta = -\frac{3EJ'}{Ha^2}H\eta .$$

Mit Gl. (10), (11), (12) und (13) wird somit das gesamte Biegungsmoment in B

$$(14) \qquad M_B = H\eta\left(1 + 5n^2 + \varrho n^3 - \frac{3EJ'}{Ha^2}\right) = H\eta\gamma_4$$

wenn wir setzen

$$(15) \qquad \gamma_4 = 1 + 5n^2 + \varrho n^3 - \frac{3EJ'}{Ha^2}$$

und

$$(16) \qquad \varrho = \frac{9}{m+n} + \frac{2}{m} .$$

Wir müssen nun ausdrücken, dass die Bogeneckwinkel auch während des Ausknickens erhalten bleiben. Wären die Eckpunkte gelenkig, so würde sich der Winkel in C, wegen der antimetrischen Deformation, nicht ändern. Der Winkel Θ in B (oder in D) würde aber abnehmen (oder zunehmen), laut Bild 3, um

$$\Delta\Theta_0 = -\frac{BB'}{AB} - \frac{C'C''}{BC} = -\frac{\eta/\cos\alpha}{a/\cos\alpha} - \frac{\eta/\cos\beta}{a/\cos\beta} =$$
$$= -2\,\frac{\eta}{a}$$

Dies ist durch das Moment M_B verhindert. Da der Neigungswinkel ψ eines geraden Stabes der Biegesteifigkeit EJ und der Länge c, der durch eine Druckkraft S und ein Moment M an einem Ende beansprucht ist (Bild 5), durch

$$\psi = \frac{M}{Sc}\left(1 - \frac{\sqrt{\frac{Sc^2}{EJ}}}{\operatorname{tg}\sqrt{\frac{Sc^2}{EJ}}}\right)$$

gegeben ist, ergibt sich die Aenderung des Winkels Θ infolge M_B, wenn

$$S_a = H\sec\alpha \quad S_b = H\sec\beta \quad c_a = a\sec\alpha \quad c_b = a\sec\beta$$

die Axialkräfte und die Längen der Stäbe AB und BC bezeichnen, zu

$$\Delta\Theta_M = M_B\left(\frac{\varphi_a}{S_a c_a} + \frac{\varphi_b}{S_b c_b}\right) =$$
$$= \frac{M_B}{Ha}\,(\varphi_a\cos^2\alpha + \varphi_b\cos^2\beta) .$$

In dieser Formel wurde

$$(17\text{a}) \qquad \varphi_a = 1 - \frac{\lambda_a}{\operatorname{tg}\lambda_a}$$

$$(17\text{b}) \qquad \varphi_b = 1 - \frac{\lambda_b}{\operatorname{tg}\lambda_b}$$

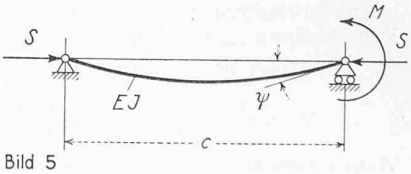

Bild 5

und

$$(18\text{a}) \qquad \lambda_a = \sqrt{\frac{S_a c_a^2}{EJ}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\cos^3\alpha}}$$

$$(18\text{b}) \qquad \lambda_b = \frac{\lambda}{\sqrt{\cos^3\beta}}$$

$$(19) \qquad \lambda = \sqrt{\frac{Ha^2}{EJ}}$$

gesetzt. Die Bedingung der Unveränderlichkeit des Winkels in B wird mit Gl. (14):

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta_0 + \Delta\Theta_M = -2\,\frac{\eta}{a} +$$
$$+ \frac{H\eta\gamma_4}{Ha}\,(\varphi_a\cos^2\alpha + \varphi_b\cos^2\beta) = 0$$

oder

$$(20) \qquad (\varphi_a\cos^2\alpha + \varphi_b\cos^2\beta)\,\gamma_4 - 2 = 0$$

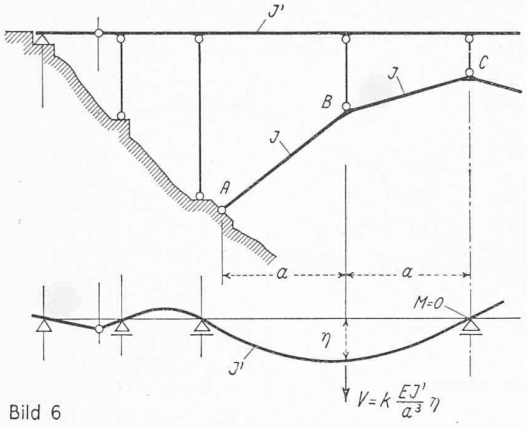

Bild 6

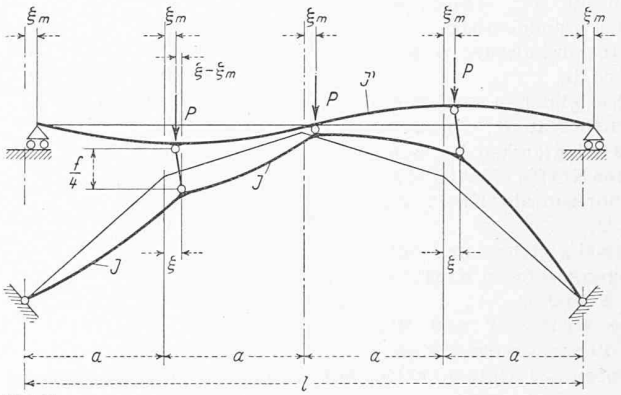

Bild 7

Diese Gleichung muss für das Gleichgewicht der leicht ausgebogenen Lage erfüllt sein und stellt deswegen die Knickbedingung dar. Sie gestattet uns, wenn wir den sie erfüllenden Wert von λ kennen, den kritischen Horizontalschub anzugeben:

$$H_{kr} = \frac{\lambda^2 E J}{a^2} = \mu \frac{E J}{l^2} \tag{21}$$

mit

$$\mu = 16 \lambda^2 . \tag{22}$$

Die dimensionslose Zahl μ hängt von n, m und J'/J ab. Der Faktor γ_4 Gl. (15) kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\gamma_4 = 1 + 5 n^2 + \varrho n^3 - \frac{3}{\lambda^2} \frac{J'}{J} . \tag{23}$$

Es ist möglich, auch andere Systeme des Aufbaues, wie z. B. in Bild 6 dargestellt, zu berücksichtigen. Die Kraft V, die zur Durchbiegung des Trägers um η notwendig ist, kann stets in der Form

$$V = k \frac{E J'}{a^3} \eta \tag{24}$$

ausgedrückt werden. Hierin ist k eine zu bestimmende Zahl (für den Fall von Bild 1 war $k = 6$). Auf gleiche Weise wird nun

$$\gamma_4 = 1 + 5 n^2 + \varrho n^3 - \frac{k}{2 \lambda^2} \frac{J'}{J} .$$

Ueberschreiten die Druckspannungen σ im Bogen infolge der Axialkraft die Proportionalitätsgrenze σ_P, so ist E (für den Bogen allein) durch den der Druckspannung zugeordneten Knickmodul T_k zu ersetzen.

System 5

In diesem Fall (Bild 7) bewegt sich der ganze Fahrbahnträger horizontal mit dem Bogenscheitel. Seine waagrechte Verschiebung ξ_m ist durch Gl. (5) gegeben.

Die Kraft W ist mit Gl. (4) und (5)

$$W = \frac{P(\xi - \xi_m)}{f/4} = \frac{2 H n n \eta}{a n} = \frac{2 n}{a} H \eta .$$

Wegen dem Gleichgewicht des Trägers in horizontaler Richtung wirkt die Kraft W_m zur in Bild 4 eingezeichneten Richtung entgegengesetzt und beträgt $W_m = -2 W$. Das Biegungsmoment in B infolge W und W_m wird

$$M_B = \frac{W f}{8} = \frac{2 n}{a} H \eta \frac{n a}{2} = n^2 H \eta . \tag{25}$$

Die Momente infolge P und V sind die selben wie im Fall 4. Für alle wirkenden Kräfte ist mit den Gl. (10), (25) und (13)

$$M_B = H \eta \left(1 + 5 n^2 + n^2 - \frac{3 E J'}{H a^2}\right) = H \eta \gamma_5$$

mit

$$\gamma_5 = 1 + 6 n^2 - \frac{3}{\lambda^2} \frac{J'}{J} . \tag{26}$$

Die weitere Berechnung gestaltet sich gleich wie im vorherigen Fall. Die Knickbedingung ist wieder Gl. (20), wenn γ_4 durch γ_5 nach Gl. (26) ersetzt wird.

Systeme 2 und 3

Diese beiden Fälle (Bild 1) ergeben sich aus den Fällen 4 und 5 für $J' = 0$. Somit ist für Fall 2:

$$\gamma_2 = 1 + 5 n^2 + \varrho n^3 , \tag{27}$$

für Fall 3:

$$\gamma_3 = 1 + 6 n^2 . \tag{28}$$

System 1

Dieser Fall, bei dem die Lasten stets lotrecht wirken, kann als Fall 2 für $s = \infty$ betrachtet werden. Mit $\varrho = 0$ in Gl. (27) wird[6])

$$\gamma_1 = 1 + 5 n^2 . \tag{29}$$

Systeme 6 und 7

In diesen beiden Fällen muss das Biegungsmoment in B verschwinden. Die Knickbedingung für das System 6 ist demnach $\gamma_4 = 0$, oder mit Gl. (15),

$$1 + 5 n^2 + \varrho n^3 = \frac{3 E J'}{H a^2} = \frac{48 E J'}{H l^2}$$

womit

$$H_{kr} = \frac{48}{1 + 5 n^2 + \varrho n^3} \frac{E J'}{l^2} \tag{30}$$

Analog wird mit $\gamma_5 = 0$ für das System 7

$$H_{kr} = \frac{48}{1 + 6 n^2} \frac{E J'}{l^2} . \tag{31}$$

Zahlenbeispiel

Die Anwendung der Theorie soll durch die Bestimmung des kritischen Horizontalschubes des Systems 4, für $n = 1/3$, $m = 1/2$ ($s = l/8$) und $J'/J = 0{,}64$, gezeigt werden.

Mit $\cos \alpha = \sqrt{0{,}5}$, $\cos \beta = \sqrt{0{,}9}$ wird die Knickgleichung (20)

$$\Delta = (0{,}5 \varphi_a + 0{,}9 \varphi_b) \gamma_4 - 2 = 0 .$$

Entsprechend den Gl. (18), (16) und (23) ist

$$\lambda_a = 1{,}682 \lambda , \quad \lambda_b = 1{,}082 \lambda , \quad \varrho = \frac{9}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} + \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{74}{5}$$

und

$$\gamma_4 = 1 + \frac{5}{9} + \frac{74}{5 \cdot 27} - \frac{3 \cdot 0{,}64}{\lambda^2} = 2{,}104 - \frac{1{,}920}{\lambda^2} .$$

Wir versuchen mit $\lambda = 1{,}294$. Mit Gl. (17) wird

$$\lambda_a = 2{,}176 , \quad \varphi_a = 2{,}505 , \quad \lambda_b = 1{,}400 , \quad \varphi_b = 0{,}758$$

und

$$\Delta = (0{,}5 \cdot 2{,}505 + 0{,}9 \cdot 0{,}758) \left(2{,}104 - \frac{1{,}92}{1{,}294^2}\right) - 2 = -0{,}148 .$$

Für $\lambda = 1{,}321$ erhält man auf gleiche Weise $\Delta = +0{,}072$. Der tatsächliche Wert von λ ergibt sich durch Interpolation zu $\lambda = 1{,}312$, womit

$$H_{kr} = 16 \lambda^2 = 27{,}55 \frac{E J}{l^2} .$$

[6]) Für diesen Fall stimmt unsere Knickgleichung mit dem Ergebnis der Stabilitätstheorie freier Rahmen nach *R. v. Mises* und *Ratzersdorfer*, vgl. z. B. Stahlbaukalender 1940, S. 109, überein.

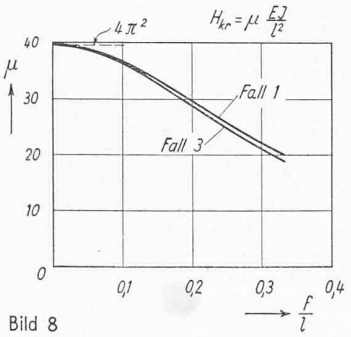

Bild 8

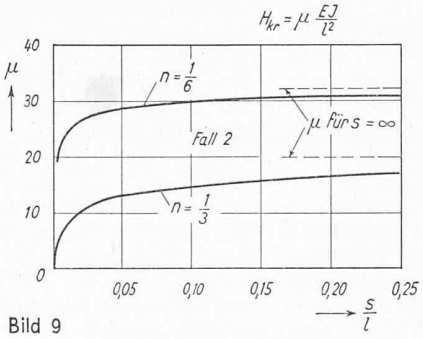

Bild 9

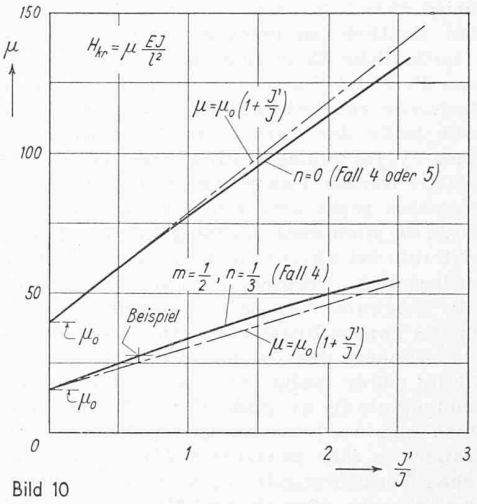

Bild 10

C. Die Grösse des kritischen Horizontalschubes

Sind das Tragsystem, die Stützweite l und die Biegesteifigkeit EJ des Bogens gegeben, so hängt der kritische Horizontalschub H_{kr} nur von $n = f/l$, $m = s/a$ und J'/J ab. Um den Einfluss dieser drei Grössen zu untersuchen, wurden mehrere Werte von μ berechnet.

Für die Systeme 1 und 3 ist n die einzige μ beeinflussende Veränderliche. Bild 8 zeigt die Abnahme von μ mit der Zunahme von n, d. h. die Abnahme des kritischen Horizontalschubes bei zunehmender Pfeilhöhe. Die Werte für das System 1 (freier Bogen) stimmen gut mit denen des parabolischen Bogens mit konstantem Trägheitsmoment überein[1]): für $n = 0$, d. h. für sehr flache Bogen, ist das Ergebnis ($\mu = 4\pi^2$) das selbe; für $n = 0{,}30$ beträgt der Unterschied 8 %. Dies bestätigt unsere frühere Behauptung, dass eine Felderzahl grösser als vier unsere Ergebnisse (μ-Werte) nicht stark beeinflusst. Die Werte von μ für das System 3 liegen nur wenig unter denen für das System 1: Das Tragwerk mit einem mit dem Scheitel verbundenen gelenkigen Fahrbahnträger verhält sich, was Knicken anbelangt, beinahe wie ein freier Bogen.

Bild 9 zeigt für das System 2 (gelenkiger, höher als der Scheitel liegender Träger) den Einfluss von $s/l = s/4a = m/4$ auf μ für zwei verschiedene Werte von $n = f/l$. Für $s/l = 1/40$ beginnt der kritische Horizontalschub scharf abzunehmen. Für $s/l = \infty$ ($m = \infty$) ergeben sich die Werte des freien Bogens (Fall 1).

Bild 10 zeigt den Einfluss von J'/J auf μ für die Fälle 4 und 5 (durchlaufender Fahrbahnträger).

Die obere Kurve gilt für sehr flache Bogen ($n = 0$). Dann ist

$$\varphi_a = \varphi_b = 1 - \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\lambda} = \varphi \qquad \gamma = 1 - \frac{3}{\lambda^2}\frac{J'}{J}$$

und die Knickbedingung (20) wird

$$\varphi\gamma = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{J'}{J} = \frac{\lambda^2}{3}\frac{\varphi - 1}{\varphi} = \frac{\mu}{48}\frac{\varphi - 1}{\varphi}.$$

Diese Beziehung kann auch abgeleitet werden durch Betrachtung des halben Bogens als Druckstab mit dem Trägheitsmoment J, der in der Mitte durch Verbindung mit einem einfachen Balken der gleichen Länge und mit dem Trägheitsmoment J' (Bild 11) elastisch gestützt ist. Für $J'/J = \pi^2/3 = 3{,}29$ wird der Träger steif genug, um Verschiebungen der Bogeneckpunkte zu verhindern; der Bogen knickt zwischen diesen Eckpunkten aus und es ist $\mu = 16\pi^2$.

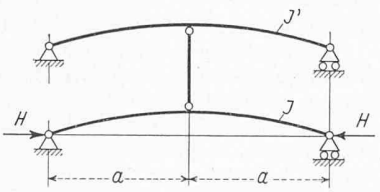

Bild 11

In der unteren Kurve ($n = 1/3$, $m = 1/2$) ist das Ergebnis des Zahlenbeipiels eingetragen.

In beiden Fällen von Bild 10 kann μ angenähert durch durch die Gerade

$$(32) \qquad \mu = \mu_0 \left(1 + \frac{J'}{J}\right)$$

angegeben werden, wenn μ_0 den Wert von μ für $J' = 0$, d. h. für die Fälle 2 und 3, bezeichnet. Dies bedeutet, dass der kritische Horizontalschub durch Annahme eines unversteiften Bogens mit dem Trägheitsmoment $J + J'$ abgeschätzt werden kann. Für sehr flache Bogen und sehr grosse Felderzahl wird Gl. (32) streng. Für Aufbauten nach Bild 6 ist, wie leicht einzusehen, die Näherungsformel (32) durch folgende zu ersetzen:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{k}{6}\frac{J'}{J}\right).$$

D. Zusammenfassung

Das Knicken in seiner Ebene des durch einen Zweigelenkbogen mit seinem Aufbau (Fahrbahnträger und Säulen) gebildeten Tragwerkes wird für verschiedene Fälle (Bild 1 und 6) untersucht. Die Betrachtungen fussen auf dem vierfeldrigen polygonalen Bogen, der eine hinreichend genaue Näherung darstellt. Die Knickbedingungen werden abgeleitet. Der Einfluss des Aufbaues ist einerseits durch die Schiefstellung der Säulen beim Ausknicken, anderseits durch die Steifigkeit des Fahrbahnträgers gegeben. Der kritische Horizontalschub hängt für ein gegebenes System und bei bekannter Stützweite und Biegesteifigkeit des Bogens von drei Grössen ab: Von der Pfeilhöhe, von der Höhe des Fahrbahnträgers über dem Bogenscheitel und von der Steifigkeit des Fahrbahnträgers. Der Einfluss dieser Grössen ist in Diagrammen veranschaulicht.

Aus der Entstehungsgeschichte des Dieselmotors

Von P. MEYER, ehem. Professor an der Techn. Hochschule in Delft

DK 9.621.436

Ueber die Entstehung des Dieselmotors besteht ein reiches Schrifttum. Diesels Darstellung [7] *) gab die Veranlassung zu den drei anderen [8], [9] und [10], die aber nicht genügend zeitlichen Abstand von dem damals entbrannten Streit der Meinungen hatten und auf ungenügender Kenntnis der noch unzugänglichen Quellen beruhten.

Zu diesen Veröffentlichungen gesellte sich diejenige von Rudolf Diesels Sohn, Dr. Eugen Diesel [11]. Trotz aller rühmenswerten Objektivität ist es doch der Sohn, der hier vom Vater spricht und der überdies kein ausgesprochener Wärmetheoretiker ist.

Um nun möglichst endgültig eine unabhängige Darstellung der Entstehungsgeschichte des Dieselmotors zu schaffen, forderte mich der Verein deutscher Ingenieure 1941 auf, diese Aufgabe zu übernehmen. Ich hatte noch zu den Mitarbeitern Diesels aus der Zeit vor 1900 gehört, und die Brennkraftmaschinen waren das Gebiet meiner Lehrtätigkeit geblieben. Als Quellen standen mir die Akten der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg, die des VDI, insbesondere aber auch der im Deutschen Museum in München aufbewahrte Nachlass Rudolf Diesels zur Verfügung. Auch Dr. Eugen Diesel unterstützte mich bei meinen Nachforschungen in liebenswürdiger Weise.

Meine Arbeit ist schon seit 1944 so gut wie vollendet und befindet sich im Besitz des VDI-Verlages, jetzt Verlag Technik in Berlin. Zur Drucklegung kam es unter den obwaltenden Umständen leider noch nicht. Vor allem dürfte die Frage interessieren, wie der Uebergang von dem von Diesel zuerst angestrebten «rationellen Wärmemotor» zu dem schliesslichen davon stark abweichenden Oelmotor entstanden ist, den wir heute allgemein als Dieselmotor bezeichnen. Um den grossen Unter-

*) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluss des Aufsatzes.