

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 66 (1948)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Zuordnung von Drehzahlen umlaufender Rotoren: theoretischer Teil  
**Autor:** Föppl, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56647>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zuordnung von Drehzahlen umlaufender Rotoren

### Theoretischer Teil

DK 621-253

Von O. FÖPPL, Wöhler-Institut, Braunschweig

**Vorbemerkung.** Das im vorliegenden Aufsatz behandelte Problem, bei dem der Gang einer ersten Rotationsmaschine durch den einer zweiten beeinflusst wird, liegt z. B. bei der zweistufigen Gasturbine vor. Hier läuft der eine Maschinen-satz, der mit dem Generator gekuppelt ist, mit konstanter Drehzahl, während sich die Drehzahl des andern mit den ND-Kompressoren je nach der Belastung in weitem Bereich verändert. Es ist sehr wahrscheinlich, dass der von O. Föppl untersuchten Erscheinung bei Gasturbinen besondere Bedeutung zukommt. Sie dürfte aber auch in vielen anderen Fällen eine gewisse Rolle spielen. Dem vorliegenden theoretischen Teil wird in der nächsten Nummer ein experimenteller Teil nachfolgen.

Red.

### 1. Einführung

In einem früheren Aufsatz<sup>1)</sup> habe ich die Berechnung der kritischen Drehzahlen von umlaufenden Schaufelrädern unter Berücksichtigung der Kreiselmomente angegeben. Es wurde dort gezeigt, dass man durch Einführung eines reduzierten Trägheitsmomentes die umlaufende Welle auf eine ruhende Welle zurückführen kann, die die gleiche Eigenschwingungszahl hat.

Im Anschluss an die an jener Stelle niedergelegte Ueberlegung soll die gegenseitige Beeinflussung von zwei benachbart aufgestellten Maschinen behandelt werden, von denen in der einen (1) etwa eine Turbinentrommel umläuft, die Biegeschwingungen ausführen kann, während die andere (2) Erschütterungen so auf das Fundament der Maschine 1 überträgt, dass deren Trommel, die mit der Frequenz  $\omega_1$  umläuft, zu Biegeschwingungen mit der Frequenz  $\omega_2$  von der Maschine 2 her erregt wird. Zur Drehzahl  $n_1$  der Maschine 1 gehört also eine störende Drehzahl  $n_2$  derart, dass eine Maschine in der Nachbarschaft, die mit der Drehzahl  $n_2$  umläuft, störende Erscheinungen an der Maschine 1 hervorruft.

### 2. Die kritische Drehgeschwindigkeit $\omega_{Wk}$

Wie hier<sup>1)</sup> bereits angegeben, kann man die kritische Drehgeschwindigkeit  $\omega_{Wk}$ , bei der die Drehfrequenz  $\omega_W$  der Welle gleich der Biegefrequenz  $\omega_B$  ist, berechnen, wenn man ein reduziertes Trägheitsmoment  $\Theta_{red\ k}$  einführt, das bei der nicht umlaufenden Welle Eigenschwingungen mit der gleichen Frequenz  $\omega_{Wk}$  ausführt. Wir bezeichnen mit  $\Theta_y = \Theta_z$  das axiale Massenträgheitsmoment der Schwungmasse bezogen auf die in der Querschnittsebene liegende Axe  $y$  und mit  $\Theta_x$  das polare Trägheitsmoment, das sich auf die in der Querschnittsebene in einem Punkt projizierende  $x$ -Axe bezieht. Unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung folgt dann nach der angegebenen Stelle:

$$(1) \quad \Theta_y \omega_B^2 - \Theta_x \omega_W \omega_B = \Theta_{red\ k} \omega_B^2$$

Wenn die Eigenschwingungsfrequenz  $\omega_{B_0}$  der nicht umlaufenden Welle gleich  $\omega_W = \omega_B = \omega_{Wk}$  ist, folgt aus Gleichung (1) zunächst die Grösse des reduzierten kritischen Trägheitsmomentes  $\Theta_{red\ k}$ , das, auf die nicht umlaufende Welle gesetzt, eine Biegeschwingungszahl hervorruft, die gleich ist der kritischen Drehzahl der tatsächlich umlaufenden Welle.

Man kann aus der Gleichung (1) auch unmittelbar die der Maschine 1 zugeordnete Drehzahl berechnen, wobei die zugeordnete Drehzahl  $n_2$  eine Funktion der Drehzahl  $n_1$  der Maschine 1 ist. Bevor das geschieht, haben wir einige Bemerkungen zum kritischen reduzierten Trägheitsmoment  $\Theta_{red\ k}$  beizufügen.

Für eine unsymmetrisch auf der Welle sitzende Turbinentrommel kann stets eine kritische Drehzahl angegeben werden, die aus der Zusammensetzung der Massenschwingung und der Schwingung des Trägheitsmomentes hervorgeht. Man kann stets ein reduziertes Trägheitsmoment  $\Theta_{red\ k}$  angeben, das bei nicht umlaufender Welle die gleiche Biegeschwingungsfrequenz  $\omega_B$  hat. Es ist:

$$(2) \quad \Theta_{red\ k} = \Theta_y - \Theta_x$$

Für schmale Scheiben wird  $\Theta_{red\ k}$  negativ. Unter einem negativen Trägheitsmoment verstehen wir ein Moment  $M = M_0 \cos \omega t$ , das bei der Schwingung entgegengesetzt gerichtete

Rückwirkungen auf die Welle ausübt gegenüber einem positiven Trägheitsmoment von gleichem Absolutwert.

Wenn  $\Theta_{red\ k}$  nach Gleichung (2) einen positiven Wert aufweist, treten zwei Schwingungsfrequenzen  $\omega$  (1. und 2. Grades) bei der Welle, die eine Masse  $m$  zwischen den Lagern trägt (Bild 1), auf, je nachdem, ob sich die von der Kraft  $P$  und dem Moment  $M$  herrührenden Ausschläge addieren oder subtrahieren. Ich habe die beiden Frequenzen mit Schwingungen 1. und 2. Grades<sup>2)</sup> bezeichnet, wiewohl nur eine Masse auf der Welle sitzt. Die nicht umlaufende Welle mit  $\Theta_{red\ k}$  biegt sich bei der Schwingung gerade so durch, wie die umlaufende Welle, auf der die Schwungmasse  $m$  mit dem axialen Trägheitsmoment  $\Theta_y$  und dem polaren Trägheitsmoment  $\Theta_x$  sitzt.

Bild 1. Schwingung einer Welle unter Berücksichtigung der Schrägstellung der Schwungmasse

Wenn  $\Theta_y > \Theta_x$ , ist das

Verhältnis des Biegemomentes  $M$  zur Kraft  $P$  bei der tatsächlichen umlaufenden und der reduzierten nicht umlaufenden Welle gleich gross oder  $\alpha = M/Pa$  hat den gleichen Wert (Bild 1).

Diese Angabe gilt aber nicht nur für die kritische Drehzahl, sondern für jede Drehzahl. Man kann zu jeder Drehzahl der Maschine die Eigenschwingungsfrequenz  $\omega_B$  der ohne Exzentrizität gelagerten und mit der Frequenz  $\omega_W$  umlaufenden Welle berechnen und zu diesem Zweck ein reduziertes Trägheitsmoment  $\Theta_{red}$  angeben, das bei der nicht umlaufenden Welle die gleiche Biegeschwingungsfrequenz  $\omega_B$  liefert.  $\Theta_{red}$  ist in diesem Fall eine Funktion von  $\omega_W$ . Es ist also  $\Theta_{red}$  das Trägheitsmoment, das bei der nicht umlaufenden Welle eine Eigenschwingungsfrequenz  $\omega_{Wk}$  liefert, die gleich der kritischen Eigenschwingungsfrequenz ist und  $\Theta_{red} = f(\omega_W)$  das Trägheitsmoment, das bezüglich Eigenschwingungsfrequenz zur Drehfrequenz  $\omega_W$  der Welle gehört.

### 3. Die zur Wellendrehgeschwindigkeit $\omega_W$ zugeordnete Biegeschwingungsfrequenz $\omega_B$

Für die Turbinentrommel, für die wir die Abhängigkeit der Eigenschwingungsfrequenz  $\omega_B$  von der Drehfrequenz  $\omega_W$  berechnen wollen, müssen die Abmessungen der Welle und die Werte  $m$ ,  $\Theta_y$  und  $\Theta_x$  bekannt sein. Wir betrachten eine Vergleichswelle mit gleichen Abmessungen, bei der  $\Theta_y$  durch beliebige Werte  $\Theta_{red}$  ersetzt ist und berechnen  $\omega_B$  dieser Vergleichswelle, die nicht umläuft. Da durch den Umlauf der tatsächlichen Welle das axiale Trägheitsmoment  $\Theta_y$  scheinbar verringert wird, soll  $\Theta_{red}$  beliebige Werte zwischen  $\Theta_y$  und  $-\infty$  annehmen. Die Werte  $\Theta_{red} > \Theta_y$  haben kein praktisches Interesse, weil sie sich auf den Gegenlauf beziehen, dessen Schwingungen infolge der Werkstoffdämpfung sehr rasch abklingen. Zu  $\Theta_{red} = \Theta_y$  gehört nach Gleichung (1) die Biegeschwingungsfrequenz  $\omega_{B_0}$  der nicht umlaufenden Welle. Wir nennen die Drehzahl, die zu  $\Theta_{red} = 0$  gehört  $\omega_1$ . Wir berechnen zunächst nach Gleichung (1) die Geschwindigkeit  $\omega_{W_1}$  der Welle, bei der die Eigenschwingungsfrequenz  $\omega_{B_1}$  der tatsächlichen umlaufenden Scheibe gleich  $\omega_1$  zugehörend zu  $\Theta_y = 0$  ist:

$$(3) \quad \omega_{W_1} = \omega_{B_1} \frac{\Theta_y}{\Theta_x} = \omega_1 \frac{\Theta_y}{\Theta_x}$$

$\omega_{B_1}$  ist grösser als die Schwingungsfrequenz  $\omega_{B_0}$  der nicht umlaufenden Welle mit dem Trägheitsmoment  $\Theta_y$ . Der Umlauf der Scheibe bewirkt eine Erhöhung der Schwingungsfrequenz. Wenn  $\omega_W$  noch weiter wächst ( $\omega_W > \omega_{W_1}$ ), nimmt  $\Theta_{red}$  nach Gleichung (1) negative Werte an. Zu  $\omega_W = \infty$  gehört nach Gleichung (1) ein Wert  $\Theta_{red} = -\infty$ . Zu einem unendlich grossen negativen Trägheitsmoment  $\Theta_{red}$  der aufgesetzten Schwungmasse gehört eine endliche Biegeschwingungsfrequenz  $\omega_{B_2} = \lambda_p \omega_1$ , bei der das Trägheitsmoment seine Richtung bei der Schwingung nicht ändert ( $\Delta\varphi = 0$ ).

Wenn  $\Theta_{red} = +\infty$  ist, ist es die Schwingung 2. Grades, die eine endliche Schwingungsfrequenz  $\lambda_p \omega_1$  hat (mit  $\Delta\varphi = 0$ ).

<sup>2)</sup> O. Föppl: Mittgl. d. Wöhler-Inst., Heft 40, auch Biezeno-Grammel sprechen in Techn. Dynamik auf S. 807 «vom Charakter einer kritischen Drehzahl 2. Ordnung».

<sup>1)</sup> Siehe SBZ 1947, Nr. 20, S. 259\*.

Wenn  $\Theta_{\text{red}} = -\infty$ , ist es die Schwingung 1. Grades (eine Schwingung 2. Grades gibt es hierfür nicht), die die Schwingungsfrequenz  $\lambda_p \omega_1$  grösser als  $\omega_1$  hat.

Wir wollen die Betrachtung am Beispiel der unsymmetrisch belasteten Welle nach Bild 1 durchführen. Die Abmessungen der Welle und der Schwungscheibe seien bekannt. Es ist die Aufgabe gestellt, die Eigenfrequenz  $\omega_B$  der Biegeschwingung in Abhängigkeit von  $\omega_W$  anzugeben. Um diese Aufgabe zu lösen, ziehen wir eine nicht umlaufende Ersatzwelle heran, die bei gleichen übrigen Abmessungen das reduzierte Trägheitsmoment  $\Theta_{\text{red}}$  (statt  $\Theta_y$ ) hat. Nach Gleichung (1), in der  $\omega_B = \omega_{B_0}$  gesetzt ist, erhält man:

$$(4) \quad \Theta_{\text{red}} = \Theta_y - \frac{\omega_W}{\omega_B} \Theta_x$$

Die Grundlage für die weitere Betrachtung ist die Beziehung zwischen  $\Theta_{\text{red}}$  und  $\omega_{B_0}$ , die im nächsten Abschnitt behandelt werden wird. Die Beziehung zwischen  $\Theta_{\text{red}}$  der Ersatzwelle und  $\omega_W$  der tatsächlichen Welle folgt aus Gleichung (4), sobald die Zuordnung zwischen  $\Theta_{\text{red}}$  und  $\omega_B$  bekannt ist. Der zweidimensionale Fall der umlaufenden Welle ist auf den eindimensionalen Fall der schwingenden, nicht umlaufenden Welle zurückgeführt.

#### 4. Biegeschwingungsfrequenz $\omega_{B_0}$ in Abhängigkeit von $\Theta_{\text{red}}$ der nicht umlaufenden Welle

Für die zweifach gelagerte Welle nach Bild 1 soll  $\omega_{B_0}$  in Abhängigkeit von  $\Theta_{\text{red}}$  berechnet werden. Die Grundgleichung für die Schwingungen der Welle lautet in diesem Fall:

$$(5) \quad \omega_{B_0}^2 = \frac{M_W}{(\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2) \Theta_{\text{red}}} = \frac{P}{(f_1 + f_2) m}$$

In dieser Gleichung sind  $f_1$  und  $f_2$  die Durchbiegungen, die von der Kraft  $P$  bzw. vom Moment  $M_W$  herrühren, während  $\Delta \varphi_1$  und  $\Delta \varphi_2$  die entsprechenden Winkeländerungen sind. Mit  $z$  bezeichnen wir das Verhältnis  $M_W/Pa$ , wobei  $z$  so bestimmt werden muss, dass die Masse  $m$  und das Trägheitsmoment  $\Theta_{\text{red}}$  nach Gleichung (5) gleich rasch schwingen. Es ist<sup>3)</sup>:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{P}{3EJ} \frac{a^2 b^2}{l}; f_2 = \frac{M_W}{3EJ} \frac{a b (b-a)}{l} = \\ = \frac{z P}{3EJ} \frac{a^2 b}{l} (b-a) \\ l \Delta \varphi_1 = \frac{P}{3EJ} a b (b-a); \quad l \Delta \varphi_2 = \\ = \frac{M_W}{3EJ} (a^2 + b^2 - a b) = \frac{z P}{3EJ} (a^2 + b^2 - a b) a \end{array} \right.$$

Die Werte aus Gleichung (6) setzen wir in die zweite Gleichsetzung 5 ein und bestimmen  $z$ :

$$(7) \quad \begin{aligned} z &= \frac{\Theta_{\text{red}} (\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2) a}{m a^2} = \\ &= \frac{\Theta_{\text{red}} b (b-a) + (a^2 + b^2 - a b) z}{m a^2} = \\ &= z \frac{v(v-1) + (v^2 + 1 - v) z}{v^2 + z v (v-1)} \end{aligned}$$

oder nach  $z$  aufgelöst:

$$(7a) \quad z_{1,2} = \frac{z(v^2 - v + 1) - v^2}{2v(v-1)} \pm \sqrt{\frac{[v^2 - z(v^2 - v + 1)]^2 + 4zv^2(v-1)^2}{2v(v-1)}}$$

In dieser Gleichung ist  $v$  das Verhältnis  $b/a$  und  $z$  das Verhältnis  $\Theta_{\text{red}}/ma^2 = (i_{\text{red}}/a)^2$ . Wenn wir  $z$  aus Gleichung (7) in die erste Gleichsetzung (5) einsetzen und dabei Gleichung (6) berücksichtigen, erhalten wir die Biegeschwingungsfrequenz  $\omega_B$  in Abhängigkeit von  $z$  für die nicht umlaufende Welle.

Für  $b = 2a$  oder  $v = 2$  erhalten wir nach Gleichung (7) z. B. für  $z = \pm \infty$  außer  $z_1 = \infty$ .

$$(8) \quad z_2 = -\frac{2}{3}; \quad \omega_{B_{02}}^2 = \frac{P}{m f_1} \frac{f_1}{f_1 + f_2} = \omega_1^2 \frac{1}{1 + z_2 \frac{v-1}{v}} =$$

$$= \lambda_p^2 \omega_1^2; \quad \lambda_p = 1,22$$

In dieser Gleichung ist  $\omega_1$  die Schwingungsfrequenz, die zu  $\Theta_{\text{red}} = 0$  und  $\lambda_p \omega_1$  diejenige, die zu  $\Theta_{\text{red}} = -\infty$  gehört.

<sup>3)</sup> Siehe z. B. Th. Pöschl: «Elementare Festigkeitslehre». Verlag J. Springer, Berlin 1936.

Die Gleichung (5) schreiben wir in der Form:

$$(9) \quad \omega_{B_0}^2 = \frac{P}{m f_1} \frac{f_1}{f_1 + f_2} = \omega_1^2 \frac{v}{v + z(v-1)}$$

Wenn wir  $z$  aus Gleichung (7a) in Gleichung (9) einsetzen, erhalten wir  $\omega_{B_0} = f(z)$ . Wenn aber die Abhängigkeit zwischen  $\omega_B$  und  $\Theta_{\text{red}}$  bekannt ist, folgt aus Gleichung (4) die Drehfrequenz  $\omega_W$ , die zu  $\Theta_{\text{red}}$  bzw.  $\omega_B$  gehört.

Mit diesen Beziehungen ist zwar nicht  $\omega_B = f(\omega_W)$  in einfacher Form dargestellt, aber die Abhängigkeit zwischen den beiden Grössen  $\omega_B$  und  $\omega_W$  ist mit Hilfe des reduzierten Trägheitsmomentes  $\Theta_{\text{red}}$  in einfacher und übersichtlicher Weise ausgedrückt.

#### 5. Beispiele

I. Die Abhängigkeit zwischen  $\omega_B$  und  $i_{\text{red}}$  und zwischen  $\omega_W$  und  $i_{\text{red}}$  soll an zwei Beispielen gezeigt werden. Wir nehmen zunächst eine *dinne* Scheibe an, für die  $i_x^2 = \Theta_x/m$  angenähert gleich  $2i_y^2$  ist und die auf einer zweifach gelagerten Welle (Bild 1) sitzt. Weiter soll sein:  $b = 2a$  oder  $v = 2$ . Wir setzen ferner die besondere Anordnung voraus, für die  $i_y = a$ . Aus Gleichung (4) wird:

$$(10) \quad i_{\text{red}}^2 = i_y^2 - \frac{\omega_W}{\omega_B} i_x^2; \quad z = \frac{i_{\text{red}}^2}{a^2} = \frac{i_{\text{red}}^2}{i_y^2} = 1 - 2 \frac{\omega_W}{\omega_B}$$

Die Abhängigkeit zwischen  $\omega_W$  und  $\omega_B$  folgt aus:

$$(11) \quad \omega_W = \omega_B \frac{1-z}{2}$$

Durch Einsetzen der Werte  $v$  und  $z$  in Gleichung (7a) folgt:

$$(12) \quad z_{1,2} = \frac{3z - 2 \pm \sqrt{(3z-2)^2 + 16z}}{4}$$

Aus Gleichung (9) wird:

$$(13) \quad \omega_B^2 = \frac{2}{2+z} \omega_1^2$$

Endlich folgt aus Gleichung (11) und Gleichung (13)

$$(14) \quad \omega_W = \frac{1-z}{2} \omega_1 \sqrt{\frac{2}{2+z}}$$

Die Ergebnisse der Gleichungen (10) bis (14) sind in Bild 2 eingetragen. Der Wert  $z = 1$  gehört zu der nicht umlaufenden Welle ( $\omega_W = 0$ ), für die der reduzierte Trägheitsradius  $i_{\text{red}}$  gleich ist dem tatsächlichen axialen Trägheitshalbmesser  $i_y$ . Das Gebiet  $z < 1$  gehört zum Gleitlauf. Das Gebiet  $z > 1$  (Gegenlauf) ist hier nur deshalb mit angegeben, weil es in der Literatur behandelt wird.

Es tritt sowohl eine Schwingungsfrequenz 1. Grades ( $\omega_{B_1}$ ) als auch eine solche 2. Grades ( $\omega_{B_2}$ ) auf. Da nach Gleichung (11)  $\omega_W$  von  $\omega_B$  abhängig ist, sind auch zwei verschiedene Drehfrequenzkurven  $\omega_{W_1}$  und  $\omega_{W_2}$  zu berücksichtigen, wobei  $\omega_{W_1}$  zu  $\omega_{B_1}$  und  $\omega_{W_2}$  zu  $\omega_{B_2}$  gehören.

Die *kritische* Drehfrequenz liegt dann vor, wenn  $\omega_B = \omega_W$  ist. Das trifft im Gleitlauf für den Punkt  $K_1$  zu, in dem sich die Kurven  $\omega_{W_1}$  und  $\omega_{B_1}$  schneiden. Die kritische Drehzahl unter den gemachten Annahmen liegt also bei  $z = -1$  oder  $i_{\text{red}}^2 = -i_y^2$ .

Die Kurven für die Schwingung 2. Grades schneiden sich nicht. Zum Wert  $z = 0$  gehören zwar die Werte  $\omega_{B_2} = \infty$  und  $\omega_{W_2} = \infty$ ; die Kurven haben aber im Unendlichen keinen Schnittpunkt. Beim Gegenlauf treten die übereinanderliegenden Schnittpunkte  $K_1'$  und  $K_2'$  auf, die keine praktische Bedeutung haben.

Wenn man für eine bestimmte Welle die Beziehung zwischen  $\omega_W$  und  $\omega_B$  angeben, d. h. die zur Drehfrequenz  $\omega_W$  zugeordnete Erregerfrequenz  $\omega_B$  bestimmen will, muss man für die besonderen Abmessungen das Diagramm nach Bild 2 links von  $z = 1$  aufzeichnen. Wenn also z. B. die kritische Drehzahl  $n_1$  der Maschine ohne Berücksichtigung der Schräglage mit 10000 1/min (Punkt  $z = 0$ ) und die Eigenschwingungszahl  $n_0$  der nicht umlaufenden Welle mit Berücksichtigung der Schräglage mit 8000 1/min berechnet worden ist (Stelle 1 mit  $\omega_B/\omega_1 = 0,8$ ), dann liegt für die besonderen Abmessungen, die Bild 2 zu Grunde gelegt sind,  $K_1$  an der Stelle  $z = -1$  mit  $n_{W_1} = 10880$  1/min. Wenn die Betriebsdrehzahl der Maschine z. B. bei 4000 1/min liegt (Punkt  $z = 0,18$ ), dann ist die zugeordnete Erregerfrequenz, die von der Maschine 2 nicht übertragen werden soll, 9770 1/min und die 2. Ordnung (Punkt  $z = 0,60$ ) 20000 1/min.

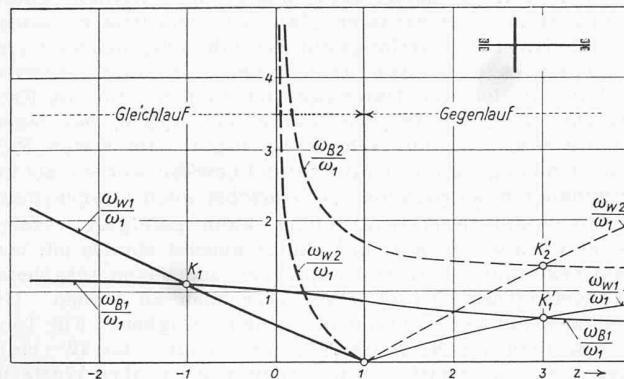


Bild 2. Grunddiagramm zur Bestimmung der zugeordneten Drehzahlen [ $\omega_B = f(\omega_W)$ ] für die dünne Scheibe [ $\theta_x = 2\theta_y$ ]

$\theta_y$  ist im Grenzfall (unendlich schmale Scheibe) gleich  $\frac{1}{2}\theta_x$ . Der Umlauf der Scheibe hat also eine Erhöhung der kritischen Drehfrequenz gegenüber der Frequenz  $\omega_1$ , die für  $i = 0$  gilt, zur Folge, die geringer ist als  $\sqrt{2}$ , d. h.  $\omega_{Wk} < \sqrt{2}\omega_1$ .

II. Als zweites Beispiel nehmen wir eine breite Trommel nach Bild 3 an, für die das axiale Trägheitsmoment  $\theta_y$  gleich dem polaren Trägheitsmoment  $\theta_x$  ist, d. h.  $i_x = i_y$ . In Bild 4 sind die zu dieser Trommel gehörigen Eigenschwingungs-Frequenzen eingetragen.

Die Kurven  $\omega_{B1} = f_1(z)$  und  $\omega_{B2} = f_2(z)$  werden durch die Breite der Trommel nicht beeinflusst; sie sind deshalb gleich, wie in Bild 2. Dagegen verlaufen die Kurven  $\omega_{W1} = f_3(z)$  und  $\omega_{W2} = f_4(z)$  in Bild 4 steiler als in Bild 2.

Die kritische Drehzahl 1. Grades des Gleichlaufes gehört zum Schnittpunkt  $K_1$  der beiden Kurven  $\omega_{B1} = f_1(z)$  und  $\omega_{W1} = f_3(z)$ , d. h.  $\omega_{Wk}$  liegt an der Stelle  $z = 0$  und  $\omega_B = \omega_W = \omega_1$ . Die kritische Drehzahl des Gleichlaufes ist also in diesem Fall ( $i_x = i_y$ ) ebenso gross wie die Eigenschwingungszahl der nicht umlaufenden Welle, bei der das Trägheitsmoment 0 ist.

Wir nehmen an, die kritische Drehzahl  $n_1$  der Welle mit  $i = 0$  sei 5000 1/min, dann ist das bei der gewählten Anordnung auch die kritische Drehzahl der tatsächlichen Welle. Ein zweiter Schnittpunkt tritt an der Stelle  $z = 0$  im Unendlichen auf (Schwingung 2. Grades  $\omega_W/\omega_1 = \infty$ ). Wenn die Betriebsdrehzahl der Maschine bei 3000 1/min liegt, dann sind die zugeordneten Drehzahlen 1. Ordnung 4800 1/min ( $z = 0,37$ ) und 2. Ordnung 8600 1/min ( $z = 0,68$ ). In der Nähe der mit  $n_1 = 3000$  1/min umlaufenden Maschine 1 soll also keine Maschine 2 mit  $n_2 = 4800$  oder 8600 1/min umlaufen.

## 6. Kritische Drehzahlen und zugeordnete Drehzahlen

Mit den kritischen Drehzahlen hat man sich bisher schon sehr eingehend befasst: Es ist selbstverständlich, dass sie für jede neu gebaute Turbine berechnet wird, da man die Betriebsdrehzahl niemals in die Nähe der kritischen Drehzahl legen darf.

Im Gegensatz dazu hat man sich um zugeordnete Drehzahlen bisher nicht gekümmert. Wenn zufälligerweise eine Maschine 2 in der Nähe der Maschine 1 mit einer der Maschine 1 zugeordneten Drehzahl betrieben wird, so hat man das störende Brummen der Maschine 1 als einen unerwünschten Zufall mit in Kauf genommen. Das konnte man tun, weil man den Betrieb der Maschine 2 mit der der Maschine 1 zugeordneten Drehzahl nicht als eine Störung der Anlage, sondern nur als einen Schönheitsfehler ansah. Es bleibt dabei allerdings dahingestellt, ob das leichte Brummen, das bei der

Maschine 2 auftritt, wenn sie mit der zugeordneten Drehzahl umläuft, nicht doch mit der Zeit grössere Störungen oder Schäden auslösen kann.

Im Vorausgehenden ist gezeigt, wie man mit Hilfe des reduzierten Trägheitsmoments die zu jeder Dreh-

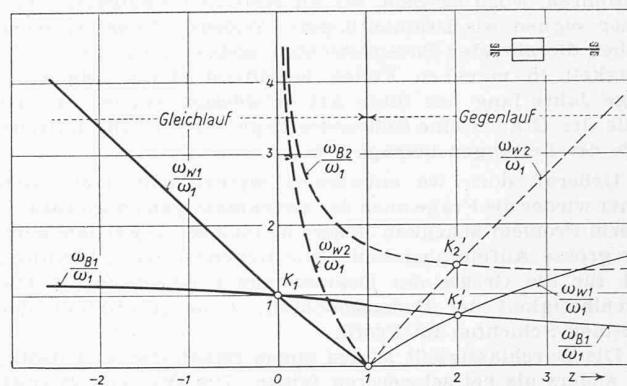


Bild 4. Grunddiagramm zur Bestimmung der zugeordneten Drehzahlen [ $\omega_B = f(\omega_W)$ ] für die breite Trommel [ $\theta_x = \theta_y$ ]

zahl der Maschine  $n_1$  zugeordneten Drehzahlen  $n_2$  berechnen kann. Der Berechnungsgang ist kaum umständlicher als die bisher übliche Berechnung der kritischen Drehzahl unter Berücksichtigung der Kreiselmomente. Ich empfehle unter diesen Umständen den geringfügigen Mehraufwand an Zeit nicht zu scheuen und zu jeder Turbine die zugeordneten Drehzahlen mit Hilfe der Diagramme nach Bild 2 oder 4 zu berechnen und darauf zu achten, dass man in der Nähe der Maschine 1 keine Maschine 2 aufstellt, die mit der Drehzahl  $n_1$  zugeordneten Drehzahl  $n_2$  umläuft.

Über die Versuche, die zur Bestimmung der zugeordneten Drehzahlen durchgeführt worden sind, berichtet Dr. A. Romanowski in einem weiteren Aufsatz.

## Beitrag zur Frage des zweckmässigen Drainabstandes

DK 626.86

Von Dipl. Kultur-Ing. R. LANDOLT, Kulturtechnisches Institut der E. T. H., Zürich

Im vergangenen Oktober hatte ich Gelegenheit, die Entwässerung und alle damit zusammenhängenden Hauptfragen des sog. Nordost-Polders<sup>1)</sup> in Holland näher zu studieren. Einige Grundsätze, die unsere holländischen Fachkollegen bei der Anlage von Drainagen beachten, dürften trotz der Verschiedenheit der beiderseitigen Verhältnisse auch für uns von Interesse sein.

Der gesamte Polder umfasst eine Fläche von 48000 ha. Der Damm, den der Polder von der Zuidersee trennt, wurde am 13. Dezember 1940 geschlossen. Am 9. September 1942 war das Poldergebiet, das durchschnittlich 4,40 m unter N. A. Pegel (Wasserspiegel im Hafen von Amsterdam = 0,00 m) liegt, trocken. Die Gesamtpumpleistung betrug 4410 m<sup>3</sup> pro Minute. Nachdem der Polder trocken gelegt war, bestand eines der wichtigsten Probleme darin, das Niederschlags- und Infiltrationswasser durch eine geeignete Entwässerungsanlage fortwährend abzuführen. Im Folgenden seien die wesentlichsten Punkte, auf die mich Ing. W. H. Sieben vom bodenkundlichen Laboratorium in Kampen hinwies, wiedergegeben.

Der Boden des Polders ist außerordentlich heterogen. Es wechseln Ton, Lehm, Sand und Torf, teilweise auf sehr kleine Distanzen, miteinander ab. Eine sehr detaillierte Bodentypenkarikatur vermittelt ein anschauliches Bild über die Bodenverhältnisse. Unzählige Bodensondierungen und Analysen wurden vorgängig der Projektierung der Entwässerung durchgeführt. Zu diesem Zwecke wurde in Kampen ein grosszügig organisiertes Laboratorium installiert.

Eine erste Stufe der Entwässerung bilden im ausgepumpten Polder die Hauptkanäle. Diese wurden schon ausgebaggert, als noch die Zuidersee ihre Fluten über das heute meliorierte Land ausbreitete. Neben diesen Hauptkanälen wurde nachher ein Netz kleinerer Nebenkanäle angelegt, welche die Sammelgräben für die einzeln ausmündenden Drainleitungen bilden. Bevor aber Drains erstellt werden, wird der Boden durch offene Gräben, sog. «greppels», entwässert. Diese werden mit einem besondern Pflug auf eine Tiefe von 60 cm ausgehoben. Auf diese maschinelle Weise ist es möglich, billig und rasch ein grosses Netz von Draingräben anzulegen. Diese «greppels» haben die Aufgabe, das Oberflächenwasser

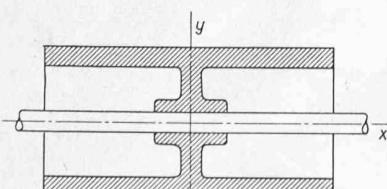


Bild 3. Schwungmasse, deren axiales Massenträgheitsmoment  $\theta_y$  grösser ist als das polare  $\theta_x$

<sup>1)</sup> Siehe Uebersichtskarte in SBZ Bd. 92, S. 133 (15. Sept. 1928).