

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	66 (1948)
<b>Heft:</b>	11
<b>Artikel:</b>	Theoretische Beuluntersuchungen der T.K.V.S.B. im Jahre 1947
<b>Autor:</b>	Kollbrunner, Curt F. / Herrmann, G.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-56688">https://doi.org/10.5169/seals-56688</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 09.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

grossen technischen Probleme, die noch gelöst werden müssen, bevor die Atomenergie als eine wirtschaftliche Energiequelle eingesetzt werden kann. Nach seinen Ausführungen würde unter Voraussetzung bestimmter technischer Annahmen die Vorkriegsproduktion an Uran gerade ausreichen, um die englische Jahresproduktion an Energie zu decken. Es erscheint somit unwahrscheinlich, dass die durch Uranspaltung gewonnene Energie die gebräuchlichen Formen der Energiegewinnung bald verdrängen wird. Der genannte Wissenschaftler schätzt, dass Demonstrationsanlagen (pilot plants) innerhalb der nächsten fünf Jahre in Betrieb kommen werden. Nach weiteren Jahren der Betriebserfahrung wird es dann möglich sein, bestimmtere Aussagen zu machen.

In den Darlegungen von Mr. Davidson (USA) wird nachdrücklich auf die ungeheuren Probleme des Schutzes vor der radioaktiven Strahlung hingewiesen. Bevor die technische Entwicklung weitergeführt werden kann, muss zuerst der Strahlungsschutz gelöst sein. Soweit Vergleichsrechnungen heute möglich sind, ist in bezug auf die Energiegestehungskosten festzustellen, dass die aus Uranspaltung gewonnene Energie in nächster Zukunft voraussichtlich wesentlich teurer sein wird als die thermische Energie. Davidson hält es für unwahrscheinlich, dass die Uranenergie in weniger als zehn Jahren wirtschaftlich zur Verfügung stehen wird.

Eine ebenso vorsichtige Haltung wurde unlängst durch David E. Lilienthal, dem Vorsitzenden der amerikanischen Atomenergielokomission (A. E. C.) eingenommen. Nachdem er die enormen Schwierigkeiten der noch zu lösenden technischen Aufgaben zum Ausdruck gebracht hatte, führte er aus, dass die häufigste Schätzung über die erforderliche Zeit bis zur Inbetriebnahme einer praktisch brauchbaren Demonstrationsanlage zwischen acht und zehn Jahren schwankt. Er ist überzeugt, dass Atomenergielokomische viel

erhöhte Anpassungen in Frage kommen und kaum vorhandene wirtschaftliche Werke der Energieerzeugung verdrängen werden. Nach dem Urteil dieses wohl berufenen Fachmannes wäre es demnach nicht zu verantworten, schon jetzt den Ausbau grosser wirtschaftlicher Energieerzeugungsanlagen, seien es thermische oder hydraulische Kraftwerke, zu verzögern, nur weil irgendwo in der Zukunft die Atomenergie als zusätzliche Energiequelle auf dem Plan erscheinen wird. Es wird sicher noch reichlich Zeit geben, allenfalls nötige Anpassungen durchzuführen.

Das Wissen um die Atomenergie als Quelle industrieller Kraft verpflichtet uns bereits heute, die bisher ausgebeuteten Energieträger in bester Weise auszunützen. Es könnte sonst sehr wohl dazu kommen, dass Atomenergielokomische der einst die ungenügende Wirtschaftlichkeit einer unzweckmässig disponierten Anlage bisheriger Art noch deutlicher hervorheben würden.

Zurzeit spielt sich ein wichtiger Teil der kernphysikalischen Forschung aus allgemein bekannten Gründen hinter verschlossenen Türen ab. Dass eine solche Geheimatmosphäre, in der vielfach auch giftige Unkräuter wuchern, eine fruchtbare Planung der friedensmässigen Erschliessung der Atomenergie außerordentlich erschwert, wird mit jedem Tag deutlicher. Fast mag es uns scheinen, als ob die Technik dem Menschen die Beherrschung einer grösseren Macht anvertraut hätte, als er auf Grund seiner ethischen Entwicklung ertragen kann. Hoffen wir nur, dass spätere Geschlechter nicht von uns sagen müssen:

Da sie den Weg der Weisheit verschmähten, hatten sie nicht nur den Schaden, dass sie das Gute nicht erkannten; sondern sie hinterliessen auch denen, die nach ihnen kamen, die Spuren ihrer Torheit, auf dass offenbar werde, worin sie gefehlt hatten (Apokryphen, Weisheit Salomos 10,8).

## Theoretische Beuluntersuchungen der T. K. V. S. B. im Jahre 1947

DK 624.075.4

Von Dr. sc. techn. CURT F. KOLLBRUNNER, Präsident der T. K. V. S. B., und Ing. G. HERRMANN, Assistent an der E. T. H.

### 1. Einleitung

Neben der versuchsmässigen Abklärung des Ausbeulens von dünnen Blechen bemüht sich die T. K. V. S. B. (Technische Kommission des Verbandes Schweizerischer Brückenbau- und Stahlhochbau-Unternehmungen), die Stabilität der Platten auch theoretisch zu erfassen<sup>1)</sup>, um dem konstruierenden Ingenieur einwandfreie und sauber hergeleitete Grundlagen in übersichtlicher Form für den Entwurf dünnwandiger, flächentragender Bauwerke in die Hand zu geben.

Im folgenden soll auf die elastische Stabilität der auf einseitigen, ungleichmässigen Druck beanspruchten Platten unter verschiedenen Randbedingungen an lastfreien Rändern eingegangen werden<sup>2)</sup>. Es kann sich dabei nicht darum handeln, die analytische Entwicklung der verschiedenen Fälle Schritt für Schritt im Rahmen eines Zeitschriftenartikels wiederzugeben. Dies soll einer demnächst erscheinenden Mitteilung der T. K. V. S. B. vorbehalten bleiben<sup>3)</sup>. Wir wollen hier lediglich das Grundsätzliche der Berechnungsmöglichkeiten und -methoden, unter Anführung der wesentlichen

<sup>1)</sup> C. F. Kollbrunner: Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich (Versuchsbericht). Mitteilung Nr. 17 aus dem Institut für Baustatik an der E. T. H., A.-G. Gebr. Leemann & Co., Zürich, 1946. (Erster Bericht der T. K. V. S. B. über Plattenausbeulung.) — C. F. Kollbrunner und G. Herrmann: Stabilität der Platten im plastischen Bereich. Theorie von A. Iljuschin mit Vergleichswerten von durchgeföhrten Versuchen. Mitteilung Nr. 20 aus dem Institut für Baustatik an der E. T. H., A.-G. Gebr. Leemann & Co., Zürich, 1947. (Zweiter Bericht der T. K. V. S. B. über Plattenausbeulung.) — P. P. Bijlaard: Grundlegende Betrachtungen zum Ausbeulen der Platten und Schalen im plastischen Bereich. Mitteilung Nr. 21 aus dem Institut für Baustatik an der E. T. H., A.-G. Gebr. Leemann & Co., Zürich, 1947. (Dritter Bericht der T. K. V. S. B. über Plattenausbeulung.)

<sup>2)</sup> Dieser Fall wurde bis jetzt von S. Timoshenko für die beiderseits gelenkig gelagerte Platte gelöst («Annales des Ponts et Chausées» Bd. 83 (1913), Teil 3, S. 9 ff., Teil 4, S. 372 ff.); von S. Ban für die einerseits gelenkig gelagerte, anderseits elastisch gestützte Platte («Abhandlungen der Int. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau» Bd. 3, S. 1, A.-G. Gebr. Leemann & Co., Zürich 1935); sowie von K. Nölke für die beiderseits eingespannte Platte («Der Bauingenieur» 1936, Heft 13/14).

<sup>3)</sup> C. F. Kollbrunner und G. Herrmann: Elastische Beulung der auf einseitigen ungleichmässigen Druck beanspruchten Platten. (Vierter Bericht der T. K. V. S. B. über Plattenausbeulung.)

Etappen der Herleitung, sowie der erhaltenen Endresultate und der Schlussfolgerungen festhalten.

### 2. Problemstellung und Lösungsmöglichkeiten

Eine Rechteckplatte (Länge  $a$ , Breite  $b$ , Dicke  $\delta$ ), sei an den Querrändern  $x = 0$  und  $x = a$  gelenkig gelagert (Bild 1), während an den Längsrändern  $y = 0$  und  $y = b$  die Randbedingungen beliebig vorgeschrieben werden dürfen. Auf die Querränder wirke eine ungleichmässig, aber linear verteilte Normalspannung

$$(1) \quad \sigma_x(y) = \sigma_1 \left(1 - c \frac{y}{b}\right)$$

$\sigma_1$  ist die maximale, positiv angenommene Druckspannung, während der Parameter  $c$  als Ungleichförmigkeitsfaktor bezeichnet werden kann.

Es ist:

$c = 0$  gleichmässig verteilte Belastung

$c = 1$  Dreieckbelastung

$c = 2$  reine Biegungsbelaistung

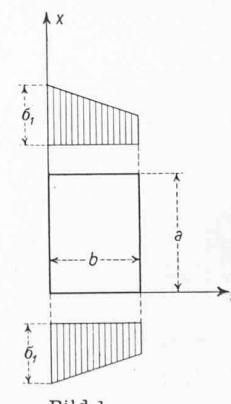


Bild 1

In üblicher Weise kann die Beulspannung einer Platte nach Timoshenko immer in der Form

$$(2) \quad \sigma_k = k \sigma_e$$

dargestellt werden. Dabei ist  $\sigma_e$  die Eulersche Knickspannung

$$(3) \quad \sigma_e = \frac{D \pi^2}{b^2 \delta}$$

für einen Plattenstreifen der Länge  $b$ , der Dicke  $\delta$  und der Breite eins.  $D$  ist die Plattensteifigkeit

$$(4) \quad D = \frac{E \delta^3}{12(1 - m^2)}$$

Da die Integration der Differentialgleichung der Plattenbeulung

$$(5) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sigma_1 \left(1 - c \frac{y}{b}\right) \frac{\delta}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

in geschlossener Form nicht ausgeführt werden kann (Ansätze mittels Potenzreihen zeigen schlechte Konvergenz) verbleiben uns als Lösungsmöglichkeiten die Energiemethode und die Differenzenrechnung. Die letzte kann in elementar einfacher Weise angewendet werden. Die Uebersetzung der Bryanschen Differentialgleichung in die Sprache der Differenzenrechnung, sowie die Formulierung der Randbedingungen lässt sich ohne Schwierigkeit durchführen. Die numerische Rechnung zeigt jedoch, dass die praktische Anwendbarkeit dieser Methode eine beschränkte ist. Obwohl bei immer feinerer Einteilung theoretisch der genaue  $k$ -Wert erreicht werden kann, wird das numerische Kalkül derart kompliziert, dass die Methode als nicht sehr leistungsfähig bezeichnet werden muss. Dabei ist zu beachten, dass die Genauigkeit bei ein und derselben Einteilung von der Krümmung der Beulfläche und somit mittelbar von den Randbedingungen abhängig ist. Die Energiemethode liefert hingegen bei geeigneter Wahl des Ansatzes dieser Fläche schon nach wenigen Näherungen einen brauchbaren  $k$ -Wert, wobei allerdings der notwendige mathematische Apparat, um bis zur Beulbedingung zu gelangen, verhältnismässig umfangreich wird.

### 3. Anwendung der Energiemethode

Das Stabilitätskriterium nach der Energiemethode wird in folgender Form dargestellt:

$$(6) \quad \delta U = \delta (A_a + E_a) = 0$$

Die Zusatzforderung<sup>4)</sup> lautet:  $\delta^2 U > 0$

Dabei bedeuten:  $U$  Gesamtenergie des elastischen Systems,  $A_a$  Formänderungsarbeit,  $E_a$  Arbeit der äusseren Kräfte. Man findet unmittelbar, dass

$$(7) \quad U = A_a + E_a = \text{Extremum}$$

sein muss und gelangt somit zu einem Variationsproblem denn unter allen nicht verschwindenden Wölbflächen  $w = w(x, y)$  stellt sich bei der Ausbeulung diejenige ein, welche die Gesamtenergie des Systems zu einem Extremum macht.

Für eine dünne Platte gilt:

$$(8) \quad A_a = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\bar{m}) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

und

$$(9) \quad E_a = \frac{\delta}{2} \int_0^a \int_0^b \sigma_k \left( 1 - c \frac{y}{b} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

Zur Lösung dieses Variationsproblems stellt die Variationsrechnung zwei verschiedene Methoden zur Verfügung<sup>5)</sup>, nämlich die indirekte, die uns auf die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung führt, die mit der Bryanschen identisch ist, und die direkte. Innerhalb der direkten Methoden<sup>6)</sup> ist in unserem Fall diejenige von Ritz die geeignetste.

Eine ziemliche Schwierigkeit stellt sich ein, wenn man daran geht, eine Annahme für das Funktionensystem der Wölbfläche zu treffen. Der Erfolg des Verfahrens hängt stark von der geschickten Wahl dieses Systems ab. Man könnte etwa daran denken, die Folge  $w_{mn}$  (in Analogie zum Fall der beiderseits gelenkig gelagerten Platte) in der  $y$ -Richtung als trigonometrische Funktionen anzunehmen, welche die hier vorliegenden Randbedingungen zu erfüllen hätten, doch kann man leicht zeigen, dass diese Funktionenfolge nicht die wirklich auftretende Beulform darstellt. Eine sehr geeignete Möglichkeit erschliesst jedoch die Schwingungslehre, und zwar die Lehre der Transversalschwingungen von Stäben<sup>7)</sup>. Die dort aufgestellten Normalfunktionen erlauben die Berücksichtigung sämtlicher hier vorkommender Rand-

<sup>4)</sup> Es braucht nicht nachgewiesen zu werden, ob diese Nebenbedingung erfüllt ist oder nicht. Vgl. K. Marguerre: Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode, «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik» Bd. 18, Heft 1, S. 57 ff., Febr. 1938.

<sup>5)</sup> R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Auflage, S. 151 ff., J. Springer, Berlin 1931.

<sup>6)</sup> E. Trefftz: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verhandlungen des 2. Internat. Kongresses für Techn. Mechanik, S. 131 ff., Zürich 1926.

<sup>7)</sup> W. Rayleigh: The theory of sound. Second edition, Macmillan & Co., § 170 ff., London 1926. (Die Transversalschwingungen hat Nölke in seinem unter Fussnote 2 angegebenen Artikel als erster verwendet.)

bedingungen und bilden eine Folge, die für unseren Zweck äusserst brauchbar ist. Wir machen für die Wölbfläche  $w(x, y)$  den Ansatz der Doppelreihe

$$(10) \quad w_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} X_m Y_n \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

Darin bedeuten:

$$(11) \quad \begin{cases} X_m = \sin \frac{m \pi x}{a} \\ Y_n = A \left\{ \cos \frac{p_n y}{b} + \text{Cof} \frac{p_n y}{b} \right\} + \\ + B \left\{ \cos \frac{p_n y}{b} - \text{Cof} \frac{p_n y}{b} \right\} + \\ + C \left\{ \sin \frac{p_n y}{b} + \text{Sin} \frac{p_n y}{b} \right\} + \\ + D \left\{ \sin \frac{p_n y}{b} - \text{Sin} \frac{p_n y}{b} \right\} \end{cases}$$

$X_m$  befriedigt an den Querrändern die Navierschen Randbedingungen.  $Y_n$  genügt bei geeigneter Wahl der  $p_n$  sämtlichen vorkommenden Randbedingungen an den Längsrändern.

Führt man diesen Ansatz in den Ausdruck für die Gesamtenergie des Systems ein, so wird, wenn Striche die Differentiation bezeichnen,

$$(12) \quad U = \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{D}{2} \left[ \sum_1^m \sum_1^n a_{mn} (X'_{m'} Y_n + X_m Y'_{n'}) \right]^2 - 2(1-\bar{m}) \sum_1^m \sum_1^n a_{mn}^2 \left[ X''_m Y_n X_m Y'_{n'} - (X'_m Y'_{n'})^2 \right] \right. \\ \left. - \frac{\delta}{2} \sigma_k \left( 1 - \frac{c}{b} y \right) \left[ \sum_1^m \sum_1^n a_{mn} X'_m Y_n \right]^2 \right\} dx dy$$

$U$  ist eine Funktion der Koeffizienten  $a_{mn}$  und wird extremal, falls die  $mn$  Gleichungen

$$(13) \quad \frac{\partial U}{\partial a_{mn}} = 0$$

erfüllt sind. Eine dieser Gleichungen, beispielsweise diejenige mit dem Zeiger  $(i, j)$  lautet:

$$(14) \quad \int_0^a \int_0^b \left\{ D \left[ \sum_1^m \sum_1^n a_{mn} (X''_m Y_n + X_m Y'_{n'}) (X''_i Y_j + X_i Y'_{j'}) \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1-\bar{m}) \left\{ \sum_1^m \sum_1^n a_{mn} \frac{1}{2} (X''_m Y_n X_i Y'_{j'}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + X_m Y'_{n'} X'_i Y_j \right\} \right] - \\ - \delta \sigma_k \left( 1 - \frac{c}{b} y \right) \left[ \sum_1^m \sum_1^n a_{mn} X'_m Y_n \right] X'_i Y_j \right\} dx dy = 0$$

Unter Berücksichtigung gelenkiger Lagerung der Querränder, und nach Beachtung, dass die Funktionenfolgen  $X_m$  und  $Y_n$  normierte Orthogonalfunktionen<sup>8)</sup> sind, sowie nach geeigneter Wahl der Konstanten im Ansatz für  $Y_n$ , sodass

$$(15) \quad \int_0^b Y^2_j dy = b$$

wird, geht Gleichung (14) über in:

$$(16) \quad a_{ij} \left[ \left( \frac{i}{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{p_j}{\pi} \right)^4 \left( \frac{\alpha}{i} \right)^2 \right] - \bar{m} \sum_1^n a_{in} J_{jn} \\ + (1-\bar{m}) \sum_1^n a_{in} R_{jn} - k \left[ a_{ij} - c \sum_1^n a_{in} H_{jn} \right] = 0$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$(17) \quad J_{jn} = \frac{2b}{\pi^2} \int_0^b Y_j Y'_{n'} dy$$

$$(18) \quad R_{jn} = \frac{2b}{\pi^2} \int_0^b Y'_j Y'_{n'} dy$$

$$(19) \quad H_{jn} = \frac{1}{b^2} \int_0^b y Y_j Y_n dy$$

<sup>8)</sup> E. Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. 3. Auflage, Dover Publications, S. 23 ff., New York 1943.

Da die Ausbeulung einer Platte mit dem Seitenverhältnis  $\alpha = \frac{a}{b}$  nach  $i$  Halbwellen dem Beulfall einer Platte mit dem Seitenverhältnis  $\frac{\alpha}{i}$  nach einer Halbwelle entspricht, können wir uns auf  $i = 1$  beschränken und es verbleiben noch  $n$  Gleichungen:

$$(20) \quad a_j \left[ \frac{1}{\alpha^2} + \left( \frac{p_j}{\pi} \right)^4 \alpha^2 - \bar{m} J_{jj} + (1 - \bar{m}) R_{jj} + k(cH_{jj} - 1) \right] + \sum_1^n a_n [k c H_{jn} - \bar{m} J_{jn} + (1 - \bar{m}) R_{jn}] = 0$$

Dabei ist zu beachten, dass in der Summe die Glieder  $n = j$  nicht mitzunehmen sind.

Ausser dem trivialen Fall  $a_n = 0$ , bei dem das Gleichungssystem (20) befriedigt wird, gibt es eine zweite Lösung mit endlichen Koeffizienten  $a_n$ . Diese zweite Lösung erhält man, wenn die Determinante  $\Delta$ , gebildet aus den Faktoren der  $a_n$ , Null gesetzt wird. Führt man in Gleichung (20) folgende Abkürzungen ein:

$$(21) \quad \frac{1}{\alpha^2} + \left( \frac{p_j}{\pi} \right)^4 \alpha^2 - \bar{m} J_{jj} + (1 - \bar{m}) R_{jj} = F_j$$

$$(22) \quad 1 - c H_{jj} = G_j$$

$$(23) \quad k c H_{jn} - \bar{m} J_{jn} + (1 - \bar{m}) R_{jn} = K_{jn}$$

so nimmt die Determinantengleichung die untenstehende Form an:

$$(24) \quad \Delta = \begin{vmatrix} F_1 - k G_1 & K_{12} & K_{13} & \dots \\ K_{21} & F_2 - k G_2 & K_{23} & \dots \\ K_{31} & K_{32} & F_3 - k G_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

Wie man erkennt, sind die Beulwerte  $k$  von den Randbedingungen, von der Belastung und von dem Seitenverhältnis  $\alpha$  abhängig.

#### 4. Fall III:

Einerseits fest eingespannt, anderseits vollständig frei

Als ein typischer Beulfall, der bis jetzt noch nicht behandelt wurde, erscheint der Fall der an den Längsrändern einerseits eingespannten und anderseits völlig freien Platte. Unter Berücksichtigung dieser Randbedingungen wird

$$(25) \quad Y_n = \left( \cos \frac{p_n y}{b} - \operatorname{Cof} \frac{p_n y}{b} \right) - \frac{\cos p_n + \operatorname{Cof} p_n}{\sin p_n + \operatorname{Sin} p_n} \left( \sin \frac{p_n y}{b} - \operatorname{Sin} \frac{p_n y}{b} \right)$$

wobei die  $p_n$  der Nebenbedingung

$$(26) \quad \cos p_n \operatorname{Cof} p_n = -1$$

zu genügen haben.

Für die numerische Auswertung der Beulbedingung (24) kann man die Integrale (17) bis (19) entweder für jedes Zahlenpaar  $(i, j)$  explizite ausrechnen, wobei man freilich vorher die Integration der ausmultiplizierten Klammern in (25) durchzuführen hat, oder man kann versuchen, diese Integrale in geschlossener Form allgemein darzustellen. Die explizite Form ist mathematisch einfach, erfordert aber eine grosse Rechenarbeit und ist wenig genau, weil sehr kleine Differenzen grosser Zahlen vorkommen. Die Entwicklung bis zur geschlossenen Darstellung dagegen erheischt einiges Geschick, gestattet jedoch eine sehr exakte numerische Auswertung.

Aus der Nebenbedingung (26) können mit Hilfe der sog. Amplitudenfunktion<sup>9)</sup> drei weitere Beziehungen hergeleitet werden und unter Verwendung einiger Kunstgriffe gelingt es, sämtliche Integrale (17) bis (19) zu bestimmen. Es sind im Ganzen

<sup>9)</sup> F. Tölke: Praktische Funktionenlehre, I. Bd., S. 36, J. Springer, Berlin 1943.

neun, nämlich je drei für  $i = j$ , für  $i + j = \text{gerade Zahl}$  und für  $i + j = \text{ungerade Zahl}$ .

In erster Näherung setzen wir alle Koeffizienten  $a_n$  gleich Null außer  $a_1$ . Der Beulwert  $k$  bestimmt sich dann aus der linearen Gleichung

$$(27) \quad F_1 - k G_1 = 0$$

Die zweite Näherung erhalten wir, wenn wir  $a_1$  und  $a_2$  nicht verschwinden lassen. Die Beulbedingung ist dann eine zweigliedrige Determinante

$$(28) \quad \Delta = \begin{vmatrix} F_1 - k G_1 & K_{12} \\ K_{21} & F_2 - k G_2 \end{vmatrix} = 0$$

und der Beulwert  $k$  ist die Lösung der quadratischen Gleichung:

$$(29) \quad (F_1 - k G_1)(F_2 - k G_2) - K_{12}^2 = 0$$

Treiben wir unsere Rechnung einen Schritt weiter und bestimmen in dritter Näherung den Beulwert  $k$  aus der dreigliedrigen Determinante:

$$(30) \quad \Delta = \begin{vmatrix} F_1 - k G_1 & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & F_2 - k G_2 & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & F_3 - k G_3 \end{vmatrix} = 0$$

so zeigt die numerische Rechnung mit  $c = 1$ , d. h. mit Dreiecksbelastung und mit unbelastetem freien Rand (Fall III a), dass wir den  $k$ -Wert bereits in genügender Schärfe besitzen<sup>10)</sup>.

Tabelle 1 gibt die errechneten Beulwerte  $k$  in erster, zweiter und dritter Näherung in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis  $\alpha$ . Bild 2 stellt die selbe Beziehung für die Beulung nach mehr als einer Halbwelle in der Druckrichtung dar.

Lässt man eine Dreiecksbelastung auf die Platte wirken, so dass der eingespannte Rand unbelastet wird (Fall III b), so kann dies analytisch auf zwei Arten ausgedrückt werden. Entweder ändert man die Randbedingungen an den Kanten  $a$  und lässt die selbe Belastung wie im Fall III a, oder man ändert die Belastung, während die Randbedingungen beibehalten werden. Die zweite Möglichkeit gibt den einfacheren Weg. Wir setzen

$$(31) \quad \sigma_x(y) = \sigma_1 c \frac{y}{b}$$

und haben mit  $c = 1$  den Fall III b.

Die Berechnung erfolgt ganz analog, unter Berücksichtigung der Gleichung (31). Die numerische Auswertung braucht nicht weiter als bis zur zweiten Näherung vorgetrieben zu werden. Die  $k$ -Werte des Beulfalles III b sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Bild 2 zeigt den Zusammenhang zwischen den  $k$ -Werten und dem Seitenverhältnis.

<sup>10)</sup> Die Güte der Konvergenz ist nicht gleichmäßig und hängt von den gleichen drei Variablen ab wie der  $k$ -Wert selbst. Vgl. auch E. Trefftz: Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren, «Math. Annalen» 100 (1928), S. 503 ff.

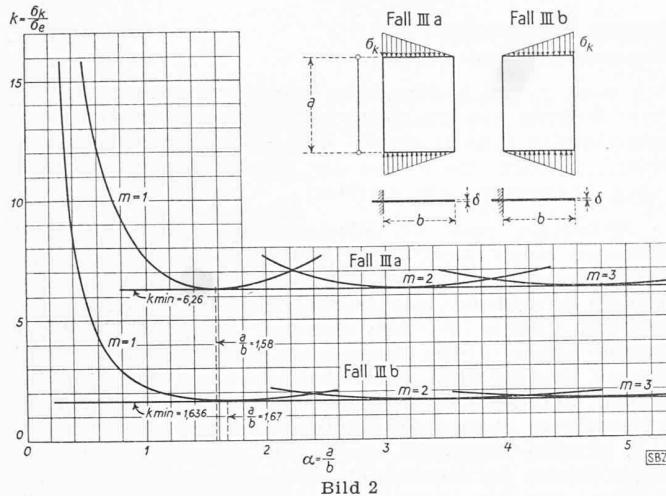
Tabelle 1. Fall III a

$\alpha = \frac{a}{b}$	Beulwerte $k$ in Näherung		
	1	2	3*
1,40	7,061	6,382	
1,50	6,912	6,309	
1,57	6,852	6,292 <sub>1</sub>	6,259
1,58	6,846	6,291 <sub>8</sub>	6,259
1,59	6,841	6,291 <sub>9</sub>	6,259
1,60	6,837	6,292 <sub>6</sub>	
1,61	6,833	6,294	
1,62	6,829	6,295	
1,63	6,827	6,297	
1,64	6,824	6,300	
1,65	6,823	6,304	
1,66	6,822	6,306	
1,67	6,821	6,310	
1,68	6,821	6,314	
1,69	6,822	6,319	
1,70	6,823	6,324	
1,80	6,859	6,396	
1,90	6,938	6,504	
2,00	7,055	6,642	

\* Das Minimum liegt bei 1,58

Tabelle 2. Fall III b

$\alpha = \frac{a}{b}$	Beulwerte $k$ in Näherung	
	1	2
1,00	2,150	
1,10	1,968	
1,20	1,841	
1,30	1,752	
1,40	1,694	
1,50	1,658	
1,60	1,640	
1,65	1,636 <sub>5</sub>	
1,66	1,636 <sub>3</sub>	1,635 <sub>8</sub>
1,67	1,636 <sub>1</sub>	1,635 <sub>68</sub>
1,68	1,636 <sub>1</sub>	1,635 <sub>69</sub>
1,69	1,636 <sub>3</sub>	
1,70	1,636 <sub>5</sub>	
1,80	1,645	
1,90	1,664	
2,00	1,692	
2,10	1,728	
2,20	1,770	
2,30	1,770	
2,40	1,819	
	1,819	
	1,874	



## 5. Schlussfolgerungen und Ausblick

In Tabelle 3 sind die minimalen Beulwerte  $k$  und das Seitenverhältnis  $\alpha$ , bei dem sie auftreten, zusammengestellt.

Diese Werte wurden so gerechnet, dass der wahre Wert nicht mehr als um einige % davon abweicht. Zum Vergleich sind auch die  $k$ -Werte der unter gleichmässigem Druck stehenden Platten angegeben<sup>11)</sup>.

Diese Tabelle erlaubt dem Ingenieur nicht nur die auf gleichmässig und ungleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen Bereich beulsicher zu bemessen, sondern enthält auch wertvolle konstruktive Hinweise. Sie gibt beispielsweise die Möglichkeit, die Gewichtersparnis einer Platte zu bestimmen, wenn diese, unter ungleichförmigen

<sup>11)</sup> Die Rechnungen erfolgten mit Hilfe des Tafelwerkes von K. Hayashi: Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbel-Funktionen, J. Springer, Berlin 1926.

Tabelle 3. Elastische Beulung dünner Stahlplatten

	$\sigma_k = k \sigma_e$	$\sigma_e = \frac{\pi^2 E \delta^2}{12(1 - m^2) b^2}$			
IV ○ —○	4,00	1,00	7,81	0,98	7,81
V ○ —○	6,97	0,67	13,56	0,65	13,56
VI ○ —○	5,40	0,79	9,89	0,80	12,16
III ○ —○	1,277	1,63	1,636	1,67	6,26
II ○ —○	0,425	∞	0,567	∞	1,71

gem Druck stehend, an einem Längsrand statt frei zu sein, gelenkig gelagert oder fest eingespannt wird. Ferner können daraus Schlüsse bezüglich Anordnung und Wirkungsweise der Aussteifungen gezogen werden.

Erst nachdem die noch nicht behandelten Beulfälle der auf Biegung, Schub und zweiseitigen Druck beanspruchten Platten<sup>12)</sup> theoretisch bestimmt und versuchstechnisch überprüft worden sind, können abschliessende Anleitungen für die Berechnung und Konstruktion flächentragender Bauwerke dem Ingenieur in einfacher Form übergeben werden.

Die T. K. V. S. B. hat durch die theoretische Abklärung der hier behandelten Beulverhältnisse im Jahre 1947 einen Teil ihrer Aufgabe gelöst und hofft, sich dadurch dem gesteckten Ziel einen bedeutenden Schritt genähert zu haben.

<sup>12)</sup> C. F. Kollbrunner: Die Ausbeulung von durch einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Blechen im elastischen und plastischen Bereich, «Schweiz. Bauzeitung» 1947, Nr. 8, S. 95\*.

## Die Lüftung des Simplontunnels

Am 15. Mai 1930 wurde der elektrische Betrieb auf der Strecke Brig-Domodossola von Drehstrom  $16\frac{2}{3}$  Perioden auf Einphasen-Wechselstrom  $16\frac{2}{3}$  Perioden umgestellt. Damit hörte auch der Dampfbetrieb auf der Simplonlinie auf, der für die Führung von einzelnen Schnellzügen noch bestanden hatte. Nach der Aufhebung des Dampfbetriebes stellte sich die Frage, ob die mechanische Ventilation im Simplontunnel<sup>13)</sup> noch weiter bestehen sollte. Versuche zeigten, dass bei abgestellter mechanischer Ventilation und hochgezogenen Vorhängen am Nordportal eine gute, natürliche Lüftung des Tunnels sich einstellte. Dabei wurde auch festgestellt, dass die natürliche Ventilation des Tunnels während der weitaus grössten Zeit des Jahres in der Süd-Nord-Richtung erfolgt und nur ausnahmsweise bei bestimmten Witterungsverhältnissen von Norden nach Süden. Weiter ist öfters eine Stagnation in der natürlichen Lüftung festzustellen. Dieser Zustand dauert jeweils nur kurze Zeit, und es hat sich gezeigt, dass die mechanische Ventilation alsdann nicht erforderlich ist. Mit der Aufgabe der mechanischen Ventilation konnte die Bedienung der Vorhänge, wofür vier Mann zur Verfügung stehen mussten, aufgehoben werden. Die Einsparung an elektrischer Energie betrug rd. 1,5 Mio kWh jährlich.

Es ist auch zu bemerken, dass bei mechanischer Ventilation des Tunnels die höchste Temperatur in der Tunnelmitte nicht verändert wird; sie beträgt im Sommer und im Winter, gleichgültig ob mechanische oder natürliche Ventilation besteht, rd.  $30^\circ\text{C}$ . Bei der mechanischen Ventilation erfolgte im Winter jeweilen eine starke Eisbildung vom Nordportal bis zum Km. 2, und es mussten daher jeden Winter für die Eisräumung im Tunnel erhebliche Aufwendungen gemacht werden. Seit der Einstellung der mechanischen Lüftung sind diese Aufwendungen nicht mehr erforderlich, da die heute bei natürlicher Ventilation auftretenden Eisbildungen in den beiden Tunneleinläufen sehr gering sind. Durch das Herablassen der Vorhänge während den Zugsintervallen in der

Nacht wird erreicht, dass das angesetzte Eis von selber abfällt. Eine weitere Verminderung der Eisbildung wurde auch durch eine verbesserte Abdichtung der Tunnelgewölbe und eine geeignete Ableitung des Wassers erzielt. Auch die Ableitung der heißen Quellen wurde verbessert und damit die Dampfbildung im Tunnel wesentlich vermindernd. Eine gänzliche Verhinderung von Dampf- und Nebelbildung im Tunnel kann nicht erzielt werden; der heute bestehende Zustand hat jedoch bis jetzt zu keinen Beschwerden von seiten der Lokomotivführer Anlass gegeben.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass seit dem Jahre 1932 die mechanische Ventilation im Simplontunnel nicht mehr im Betrieb ist. Die Ventilationseinrichtungen sind jedoch noch vorhanden und können im Bedarfsfalle, z. B. bei grösseren Unterhaltsarbeiten im Tunnel, bei Verwendung von Gleisstopfmaschinen mit Verbrennungsmotoren und zum Abführen der Gase usw. in Betrieb genommen werden. In den letzten Jahren ist der Einsatz der mechanischen Ventilation praktisch nie verlangt worden.

Im Jahre 1934 wurden die Ventilatormotoren von Drehstrom  $16\frac{2}{3}$  Perioden auf Drehstrom 50 Perioden umgebaut. Die Scherbius-Gruppe, die früher zur Drehzahlregulierung der Motoren diente, wurde entfernt. Die Ventilationseinrichtung wurde ursprünglich so gebaut, dass entweder auf Druckbetrieb (refoulement) oder Saugbetrieb (aspiration) eingestellt werden konnte. Soweit uns bekannt ist, wurde immer im Druckbetrieb gearbeitet, d. h. die Luft wurde am Nordportal in Brig in die beiden Tunnel eingeführt und nach der Südseite getrieben. Diese Betriebsart muss heute als unrichtig bezeichnet werden, da die natürliche Ventilation des Tunnels von Süden nach Norden erfolgt.

Es ist auch darauf hinzuweisen, dass die vermehrte Zugsdichte im Simplontunnel dazu geführt hat, dass die Vorhänge während dem grössten Teil des Tages abwechselungsweise bei den Tunneln I und II hochgezogen werden mussten und dass dadurch die mechanische Ventilation in dieser Zeit unwirksam war.

DK 624.191.94

<sup>13)</sup> Beschrieben durch F. Rothpletz in SBZ Bd. 73, S. 3\* ff. (1919).

P. Tresch