

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 65 (1947)  
**Heft:** 28

**Artikel:** Knickstabilität: Einfluss der Einspannungsverhältnisse bei zentrischer Belastung  
**Autor:** Brunner, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55907>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Knickstabilität

DK 624.075.2

### Einfluss der Einspannungsverhältnisse bei zentrischer Belastung

Von Ing. Dr. J. BRUNNER, EMPA, Zürich

[Wir verweisen auf die einleitende Bemerkung beim Artikel «Knickstabilität», SBZ. Bd. 123, S. 247\* vom 20. Mai 1944, und führen hier ein weiteres Kapitel an.]

Den Untersuchungen legen wir meistens Stäbe zugrunde, die an beiden Enden als gelenkig gelagert vorausgesetzt werden. Das fundamentale Problem der elastischen Stabilität ist die Bestimmung der Knickfestigkeit des geraden Stabes mit konstantem Querschnitt. Auf diesen theoretisch klaren Fall lassen sich nun auch fest oder teilweise eingespannte Stäbe zurückführen.

Um die Einspannungsgrösse  $g$  zu definieren, denken wir uns den Stab aus seiner Einspannung gelöst und ihn beidseitig gelenkig gelagert. Dann bringen wir am zu betrachtenden Stabende ein Moment  $M = 1$  an und berechnen den Drehwinkel  $\varphi_{\text{Stab}}$ . Ebenso bringen wir dieses Moment  $M = 1$  am Auflager an. Das Verhältnis des Drehwinkels des Stabendes zum Drehwinkel des Lagers, den dieses Moment erzeugt, nennen wir die Einspannungsgrösse:

$$g = \varphi_S / \varphi_L$$

Ist die Lagerpartie starr, so wird  $\varphi_L = 0$ , also die Einspannungsgrösse  $g = \infty$ ; ist das Lager ein Gelenk, so ist  $\varphi_L = \infty$ , d. h. unbeschränkt beweglich, somit die Einspannungsgrösse  $g = 0$ .

Weisen sowohl Stab wie Einspannungsstelle für ein Moment den gleichen Drehwinkel auf, so ist die Einspannungsgrösse  $g = 1$ . Die Einspannungs-Verhältnisse sind bei Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze durch Rekursion zu bestimmen. Bei der Definition der Einspannungsgrösse wurde Wert darauf gelegt, dass mit dem Begriff  $g$  eine anschauliche Vorstellung verbunden werden kann.

Als Endergebnis dieses Kapitels stellen wir in den Bildern 6 u. 7 (S. 380) den Wert  $l_0/l$  als Funktion der Einspannungsgrösse  $g$  dar.  $l_0$  ist die Stablänge zwischen den Wendepunkten, die für die Knicklast massgebend ist;  $l$  bezeichnet die ganze Stablänge zwischen den Lagern. Der Wert  $l_0/l$  wird dabei für folgende

Einspannungsarten dargestellt: beidseitig gleich grosse, elastische Einspannung; einseitig elastische Einspannung, anderseitig gelenkige Führung; einseitig elastische Einspannung, anderseitig völlig freies Ende.

Die dargestellten Kurven wurden sowohl analytisch wie graphisch berechnet. Bei der graphischen Ableitung wurde eine Doppel-Sinuswelle in grossem Masstabe aufgezeichnet und die betreffenden Werte der Zeichnung entnommen. Allgemein verweisen wir auf Bild 1, auf dem die wichtigsten Daten eingeschrieben sind.

Zur Berechnung betrachten wir die Gleichgewichtslage eines elastisch eingespannten, virtuell ausgebogenen Stabes, der unter der Knicklast  $P_k$  steht. Die Einspannung sei vorerst symmetrisch angenommen und die Beanspruchung liege unterhalb der Elastizitätsgrenze.

Wir gehen von einem beiderseits gelenkig gelagerten Stab von der Länge  $l_0$  aus. Unter der «Eulerschen Knicklast» bleibt ein virtuell ausgebogener Stab für jeden Ausbiegungspfeil im Gleichgewicht. (Wir sehen dabei ab von der kleinen Knicklastserhöhung mit wachsendem Ausbiegungspfeil, wie sie sich aus dem im früheren Artikel erwähnten «Grashof-Effekt» ergibt.) Die Gleichgewichtsfigur ist also unabhängig von der Grösse des Ausbiegungspfeils; der Abstand der Gelenkpunkte ergibt die Tragkraft

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$$

Als Gleichgewichtsfigur behalten wir diesen  $l_0$ -Bogen bei und verlängern die Sinuslinienwelle über die ursprünglichen Gelenkpunkte hinaus, die nun Wendepunkte werden. Die beiden Zweige werden verlängert bis zu einer Gesamtstablänge  $l$ , so dass nun für die Gleichgewichtsfigur charakteristisch ist das Verhältnis  $l_0/l$ . Das Gleichgewicht wird wieder hergestellt, indem wir an den Kopfenden die Kraft  $P_k$  und das Moment  $M = P_k f'$  anbringen.

Für einen solchen Stab berechnen wir die Endtangentialneigung, die dann mit der Lagerverdrehung verträglich gemacht wird. Je länger der Stab wird (für gleiches  $l_0$ , das wir aus rechnerisch-praktischen Gründen festhalten und dafür  $l$  variieren), desto geringer wird die Tangentialneigung, desto stärker muss also die Einspannung sein. Für starre Einspannung ist die Lagerverdrehung  $\varphi_L = 0$  und das Verhältnis  $l_0/l = 0,5$ , die massgebende «freie Knicklänge  $l_0$ » ist also hier nur die Hälfte der ganzen Stablänge  $l$ .

Zum Erfassen der Lagerelastizität nehmen wir einen «Einheits-Lagerstab» von gleicher Länge  $l$ , gleichem  $E$  und  $J$  an, wie der durch ihn eingespannte Tragstab (Bild 2). In diesem Falle ist der Einspannungsgrad  $g = 1$ . Verdoppeln oder verdreifachen wir z. B. die Zahl der Einheitsstäbe, so wären die entsprechenden Einspannungsgrade  $g = 2$  bzw.  $3$  (Bild 4).

Der Verdrehungswinkel  $\varphi'_L$  des Kopfendes eines «Einheits-Lagerstabes» berechnet sich für ein Moment  $M$  zu:

$$\varphi'_L = M \frac{l}{3 EJ}$$

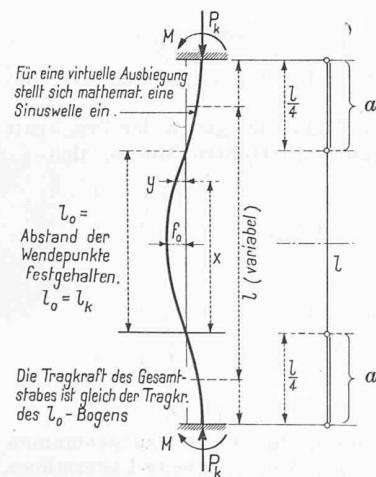


Bild 1. Beidseitig starr oder teilweise eingespannter, auf Knickfestigkeit beanspruchter Stab  
 $a$  = Zone der Verschiebung der Endpunkte je nach Einspannungs-Grösse

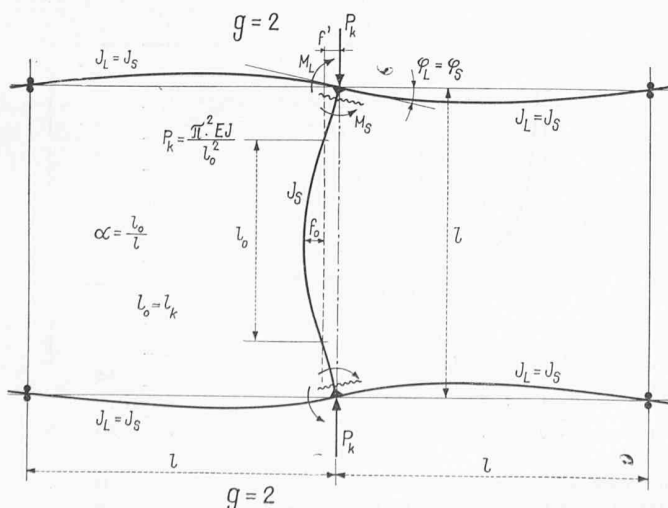


Bild 2 (links). Beidseitig elastisch eingespannter Stab

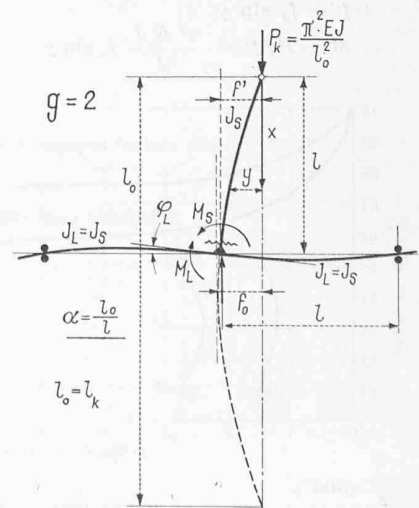


Bild 3 (rechts). Einseitig völlig freier, anderseitig elastisch eingespannter Stab

Einspannungsgrößen

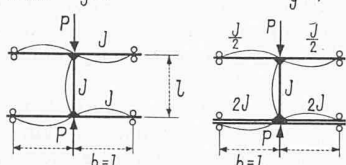
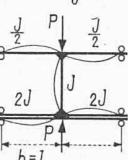
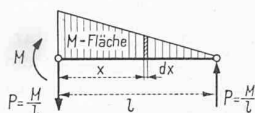
Oben:  $g=2$ Unten:  $g=2$  $g=1$  $g=4$ 

Bild 5

Bild 4 (links).  
Einspannungsbilder  
für verschiedene  
Einspannungsgrade

Der Wert kann z. B. nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit berechnet werden. Aus Bild 5 folgt:

$$\begin{aligned} M\varphi &= \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l (M - \frac{M}{l}x)^2 dx = \\ &= \frac{M^2}{EJ} \left[ x - \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{3l^2} \right]_0^l \\ \varphi &= M \frac{l}{3EJ} \end{aligned}$$

Die Axe eines virtuell ausgebogenen Knickstabes ist bekanntlich eine Sinuslinie und entspricht mit den Bezeichnungen von Bild 1 der Gleichung:

$y = f_0 \sin(\pi x/l_0)$  also ist der Tangentenwinkel:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{dy}{dx} = \frac{f_0}{l_0} \pi \cos\left(\frac{\pi}{l_0} x\right)$$

Für die Endtangente des durch die Zweige auf  $l$  verlängerten Stabes wird die Abszisse, gemessen in der Stabaxe (Bild 1)

$$x = l_0 + \frac{1}{2}(l - l_0) = \frac{1}{2}(l + l_0)$$

Wir schreiben das Winkelargument vereinfachend  $\gamma$

$$\gamma = \frac{\pi}{l_0} x = \frac{\pi}{l_0} \frac{l + l_0}{2} = \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{l_0/l} + 1 \right) \right]$$

Für ein bestimmtes Verhältnis  $l_0/l$  ergibt sich der Drehwinkel des eingespannten Stabendes zu:

$$\varphi_s = \frac{f_0}{l_0} \pi \cos\left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{l_0/l} + 1 \right) \right] = \frac{f_0}{l_0} \pi \cos \gamma$$

(Für die hier vorkommenden kleinen Winkel wird  $\operatorname{tg} \varphi_s = dy/dx = \varphi_s$  gesetzt.)

Da der Tragstab mit dem Lager fest verbunden ist, muss  $\varphi_s = \varphi_L$  sein. Der Drehwinkel des Lagers ist:

$$\varphi_L = \varphi'_L/g$$

Vorabgehend haben wir den Winkel  $\varphi'_L$  als Drehwinkel eines «Einheits-Lagerstabes» definiert. Je mehr solcher Lagerstäbe wir voraussetzen, desto kleiner wird für ein bestimmtes Moment der Lagerdrehwinkel  $\varphi_L$ ; die Anzahl der angenommenen Lagerstäbe entspricht der Einspannungsgrösse  $g$  (Bild 4).

Die Kurven auf Bild 6 wurden wie folgt berechnet: Die senkrecht zur Stabaxe ( $y$ -Richtung) zu messende Verschiebung  $f'$  der durch die Wendepunkte gelegten Nulllinie gegenüber den feststehenden Endpunkten des Stabes ist:

$$f' = f_0 \sin \gamma$$

$$M = P_k f' = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} f_0 \sin \gamma$$

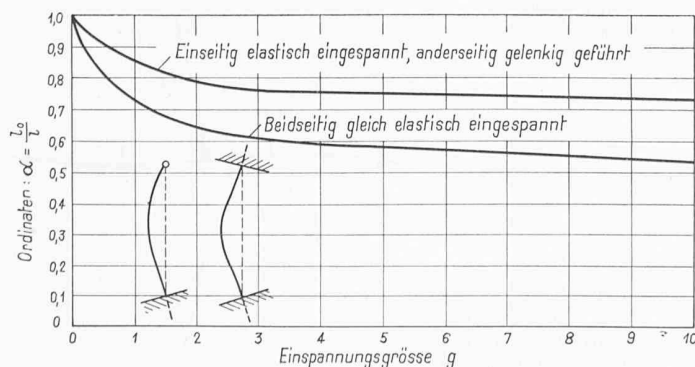


Bild 6.

Werte  $l_0/l$  als Funktion der Einspannungsgrösse  $g$ .

$l$  = Stablänge,  $l_0$  = Rechnerische Knicklänge für eine bestimmte Einspannungsgrösse  $g$

$$\begin{aligned} \varphi_L &= M \frac{l}{3EJ} \frac{1}{g} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} f_0 \sin \gamma \frac{l}{3EJg} = \\ &= \frac{\pi^2}{l_0^2} f_0 \sin \gamma \frac{l}{3g} = \varphi_s \\ \frac{\pi^2}{l_0^2} f_0 \sin \gamma \frac{l}{3g} &= \frac{f_0 \pi}{l_0} \cos \gamma \end{aligned}$$

$$(A) \quad g = \frac{\pi}{3} \frac{1}{l_0/l} \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{l_0/l} + 1 \right) \right]$$

Für die Grenzfälle ergeben sich:

$$l_0/l = 1 \text{ (keine Einspannung): } g = \frac{\pi}{3} \frac{1}{1} \operatorname{tg} \pi = 0$$

$$l_0/l = 0,5 \text{ (starre Einspannung): } g = \frac{\pi}{3} \frac{1}{0,5} \operatorname{tg} \left( \frac{3}{2} \pi \right) = \infty$$

Für die folgenden Verhältnisse  $l_0/l$  ergeben sich aus Gl. (A) als notwendige Einspannungsgrößen:

$$l_0/l = 0,75; g = \frac{3,14}{3 \cdot 0,75} \operatorname{tg} [1,57 \cdot 2,33] = \sim 0,8$$

$$l_0/l = 0,60; g = \frac{3,14}{3 \cdot 0,60} \operatorname{tg} [1,57 \cdot 2,67] = \sim 3,0$$

Grundsätzlich gleich gestaltet sich die Ableitung für den einseitig elastisch eingespannten, anderseitig gelenkig geführten Stab, wobei zu bemerken ist, dass bei einseitig starrer Einspannung bekanntlich  $l_0 = \sim 0,7l$  wird. Die Ergebnisse zeigt Bild 6.

Für den einseitig elastisch eingespannten, anderseitig völlig freien Stab ergibt sich die Ableitung wie folgt:

An einem einfachen Sinuslinienbogen von der Länge  $l_0$  und dem Pfeile  $f_0$  (Bild 3) betrachten wir einen gewissen Abschnitt von der Länge  $l$  und legen damit das Verhältnis  $l_0/l$  fest ( $x = l$ ).

Am unteren Ende dieses Teilstückes beträgt der Endtangentenwinkel  $\varphi_s$ ; er wird berechnet aus:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{f_0}{l_0} \pi \cos\left(\frac{\pi}{l_0} x\right) = \frac{f_0}{l_0} \pi \cos\left(\frac{\pi}{l_0/l}\right)$$

Da es sich um kleine Winkel  $\varphi$  handelt, setzen wir wieder  $\operatorname{tg} \varphi_s = \varphi_s$ .

Die Tragkraft dieses Teilstückes ist gleich der Tragkraft des zur vollen Sinuslinie ergänzt gedachten Stabes, also

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$$

Die Pfeilweite am Fusse beträgt:

$$f' = f_0 \sin\left(\frac{\pi}{l_0/l}\right)$$

und das dort wirksame Moment:

$$P f' = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} f_0 \sin\left(\frac{\pi}{l_0/l}\right)$$

für das Winkelargument setzen wir  $\left(\frac{\pi}{l_0/l}\right) = \gamma$ .

Dieses Moment muss durch das Lager aufgenommen werden und erzeugt für die  $g$ -fachen «Einheits-Lagerstäbe» einen Drehwinkel:

$$\begin{aligned} \varphi_L &= M \frac{l}{3EJ} \frac{1}{g} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2} f_0 \sin \gamma \frac{l}{3EJg} = \\ &= \frac{\pi^2}{l_0^2} f_0 \sin \gamma \frac{l}{3g} \end{aligned}$$

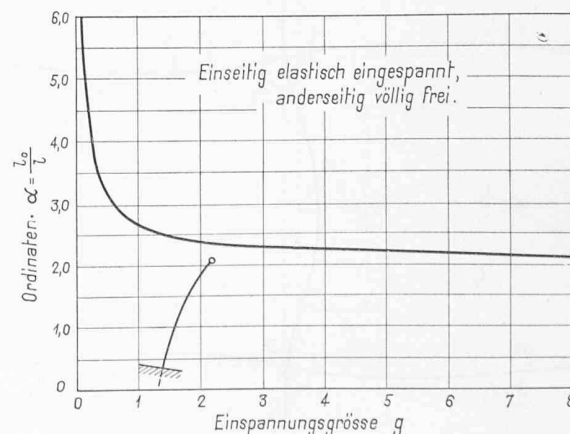


Bild 7.

Da Stab und Lager starr verbunden sind, muss dieser Einspannungswinkel mit dem Winkel  $\varphi_S$  gleich sein, woraus sich für das angenommene Verhältnis  $l_0/l$  die notwendige Steifigkeit  $g$  des Lagers bestimmt. Man erhält:

$$\frac{\pi^2}{l_0^2} f_0 \sin \gamma \frac{l}{3} \frac{1}{g} = \frac{f_0}{l_0} \pi \cos \gamma$$

$$g = \frac{\pi}{l_0 l} \frac{1}{3} \operatorname{tg} \gamma = \frac{\pi}{l_0 l} \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{l_0 l} \right)$$

Für die angenommenen Werte  $l_0/l$  berechnen wir das zugehörige  $g$  und erhalten so die Kurven auf Bild 6 und 7.

Für den Grenzfall  $l_0/l = 2$  ist:

$$l = \frac{1}{2} l_0 \text{ (starre Einspannung) } g = \frac{\pi}{2} \frac{1}{3} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \infty$$

Ist die Einspannung  $g = 0$ , so hat der Stab natürlich keine Tragkraft. In der Formel wird dementsprechend  $l_0/l = \infty$ , also die massgebende Knicklänge  $l_0 = \infty$ , was wiederum heisst: keine Tragkraft.

Die Kurven auf Bild 6 können auch bei unten und oben verschiedenen grosser Einspannung verwendet werden. Haben wir unten z. B.  $g = 6$ , oben  $g = 2$ , so muss der gesuchte Wert  $l_0/l$  als Interpolationswert zwischen den beiden Ablesungen liegen. Wie Bild 6 zeigt, bleibt zum Abschätzen nur ein kleiner Spielraum.

Für unsere baulichen Verhältnisse wird die Einspannungsgrösse meist über 1 liegen. Als dann ergeben sich folgende Verhältnisse:

Für den beidseitig symmetrisch elastisch eingespannten Stab (Bild 2) vermindert sich für die Einspannungsgrösse  $g = 1$  die freie Knicklänge auf  $l_0 = 0,72 l$ ; für  $g = 3$  auf  $l_0 = 0,60 l$ . Schon bei  $g = 3$  befindet sich die freie Knicklänge recht nahe am Grenzwert für starre Einspannung,  $l_0 = 0,5 l$ , so dass bei einer weiteren Vergrösserung der Einspannung die freie Knicklänge sich nur noch wenig ändert; z. B. für  $g = 10$  ist  $l_0 = 0,53 l$ .

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse beim einseitig elastisch eingespannten, andererseits gelenkig geführten Stab. Bei der Einspannungsgrösse  $g = 1$  wird  $l_0 = 0,85 l$ , bei  $g = 3$  wird  $l_0 = 0,76 l$ . Der unterste Grenzwert bei starrer Einspannung wird  $l_0 = 0,7 l$ .

Beim einseitig elastisch eingespannten, anderseitig aber völlig freien Stab haben wir ebenfalls analoge Verhältnisse. Beim Einspannungsgrad  $g = 1$  ist das Verhältnis  $l_0/l = 2,65$ , bei  $g = 2$  ist  $l_0/l = 2,4$ , also schon recht nahe an seiner

Grenze  $l_0/l = 2,0$ , was bekanntlich einer einseitig starren Einspannung entsprechen würde. Sinkt aber der Einspannungsgrad unter 1, so wächst die rechnerische Knicklänge sehr rasch und nähert sich asymptotisch dem Wert  $\infty$ , d. h. der Stab vermag keine Last mehr aufzunehmen.

Die Betrachtungen gelten vorerst für den elastischen Bereich, den Bereich der Gültigkeit des Moduls  $E$ . Kommen Stab und Lager in ungleiche Beanspruchungsbereiche, wird z. B. der Stab über die Elastizitätsgrenze beansprucht, während die Lagerbeanspruchung noch im elastischen Bereiche liegt, so sind die Drehwinkel, die zur Bestimmung des Einspannungsgrades dienen, unter den vorhandenen Druckverhältnissen festzulegen oder abzuschätzen. Kennen wir die Einspannungsgrösse, so ist damit auch der Abstand der Wendepunkte  $l_0$  und damit auch der massgebende Schlankheitsgrad  $l_0/i$  gegeben. Für einen bestimmten Schlankheitsgrad gilt nun die Eulersche Formel oder im unelastischen Bereich die modifizierte Formel mit dem Knickmodul  $T_k$  <sup>1)</sup>

$$P_k = \frac{\pi^2 T_k J}{l_0^2}; \quad \sigma_k = \frac{P_k}{F}$$

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 T_k}{(l_0/i)^2}$$

Wir geben in den Bildern 8 und 9 für *Baustahl* und *Bauholz* die Werte von  $T_k$ , wie sie aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm des betreffenden Materials direkt abgeleitet werden können oder durch Versuche bestimmt sind.

Für den praktischen Gebrauch entnehmen wir der graphischen Tabelle für ein gefundenes  $l_0/i$  den entsprechenden Wert  $T_k$  und können so durchgehend mit dem Eulerschen Ausdruck rechnen.

Eine direkte Abschätzung der Wendepunkte der Ausbiegungslinie und ihres Abstandes  $l_0$  (zum Vergleich mit ihrem Abstand  $l$ , wie wir ihn aus dem Einspannungsgrad berechnen) kann ebenfalls gute Dienste leisten, so besonders bei mehrstöckigen Rahmenwerken.

Zusammenfassend können wir sagen, dass im Bereiche  $g > 2$  (und das ist in der Baupraxis vielfach der Fall) die Tragkraft vom Einspannungsmass  $g$  nicht mehr sehr stark beeinflusst wird. Die Kurven der Bilder 6 und 7 verlaufen in diesem Bereiche ziemlich flach, was uns rechnerisch und konstruktiv oft sehr zustatten kommt.

Wir haben in der vorliegenden Abhandlung nur ein «Bauelement», den einfachen, elastisch eingespannten Stab, betrachtet, aber unter klaren Voraussetzungen.

Bei komplizierteren Verhältnissen, wie wir sie bei unseren Bauwerken ja meist antreffen, gestatten uns solche Untersuchungen aber eine dem wirklichen Werte naheliegende Abschätzung und einen sichern Ueberblick.

<sup>1)</sup> Vgl. M. Roß & J. Brunner. Die Knicksicherheit von an beiden Enden gelenkig gelagerten Stäben aus Konstruktionsstahl. Eidg. Materialprüfungs- und Versuchsanstalt, Zürich. M. Roß. Knickung exzentrisch belasteter Stäbe. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Kongressbericht Paris 1932.

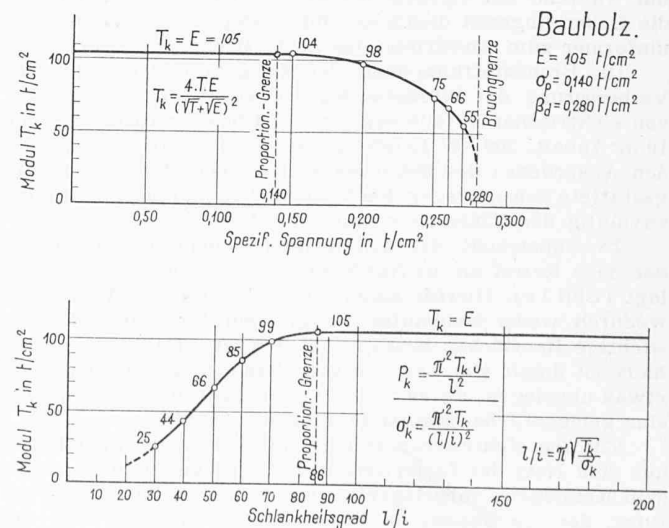
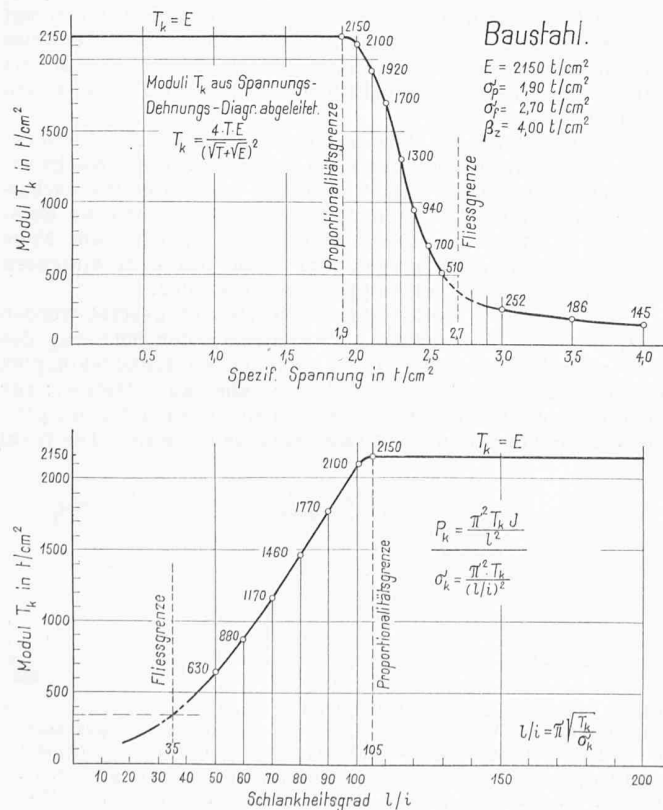


Bild 9. Wie Bild 8, jedoch für Bauholz