Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 65 (1947)
Heft: 20

Artikel: Kritische Drehzahlen einer umlaufenden Welle
Autor: Föppl, O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55879

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

65. Jahrgang
Nachdruck von Bild oder Text nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet
Nr. 20

Kritische Drehzahlen einer umlaufenden Welle

Von O. FÖPPL, Wöhler-Institut, Braunschweig

1. Vorbemerkung

Es wird die Aufgabe behandelt, die kritischen Drehzahlen einer Welle zu berechnen, die eine Masse m mit dem axialen Trägheitsmoment [1]) $\Theta_y = \Theta_z = m i^2$ und dem polaren Trägheitsmoment Θ_x trägt. Wir nehmen an, die Schwungmasse sei ohne Exzentrizität ($e = 0$) auf die Welle aufgesetzt (Bild 1). Man kann Eigenschwingungsfrequenzen ω_B für die Welle angeben, die von den Umdrehungsgeschwindigkeiten ω_W der Welle abhängen. Wenn ein äusseres periodisches Moment $M_a = M_{a0} \cos \omega_B t$ durch das Fundament auf die Welle übertragen wird, dann schaukelt sich die Biegeschwingung der Welle zu grossen Ausschlägen auf [2]). Da wir nur den Beharrungszustand betrachten, muss das erregende Moment M_a ein Kreismoment sein, d. h. bei konstanter Grösse seine Richtung kreisförmig ändern. Wir bezeichnen die Eigenschwingungsfrequenz der nicht umlaufenden Welle mit ω_{B0}. Sie ist also der ausgezeichneten Umdrehungsgeschwindigkeit $\omega_W = 0$ der Welle zugeordnet. Eine zweite ausgezeichnete Eigenschwingungsfrequenz ω_{WK} liegt dann vor, wenn die Drehgeschwindigkeit ω_W der Welle gleich der Biegeschwingungsfrequenz ω_B ist. Die Bestimmung von ω_{WK} hat grosse praktische Bedeutung. Da bei dieser Drehfrequenz auch ohne äusseres Erregermoment grosse Ausschläge auftreten können, nennt man diese Frequenz die kritische.

Beim Umlauf der Scheibe sind die Kreiselkräfte zu beachten, die um 90° gegen die Winkelveränderung phasenversetzt sind. Uns interessiert nur der Beharrungszustand der mit der beliebigen Frequenz ω_W umlaufenden zentrierten Scheibe, die durch ein *umlaufendes* Moment M zu grossen Ausschlägen aufgeschaukelt werden kann. Wir setzen deshalb grundsätzlich einen umlaufenden Momentenvektor M voraus, der bei $\omega_W = 0$, also bei der Erregerfrequenz ω_{B0}, eine Kreisschwingung der Scheibe (oder Biegeschwingungen mit gleichen Ausschlägen in den beiden aufeinander senkrechten Ebenen XY und XZ) hervorruft und der bei ω_W eine Erregerfrequenz ω_B hat.

2. Die Eigenschwingungen bei symmetrisch aufgesetzter Schwungscheibe ($a = b$)

Bei Berücksichtigung der Schrägstellung gibt es für die *unsymmetrische* Anordnung nach Bild 1 zwei Eigenschwingungszahlen. Bei der einen (Schwingung 1. Grades) addieren sich die von der Kraft P und dem Moment M hervorgerufenen Durchbiegungen f_1 bzw. f_2 der Welle, bei der anderen subtrahieren sie sich (Schwingung 2. Grades). Das gleiche trifft für die Schrägstellungen $\Delta\varphi_1$, herrührend von P, und $\Delta\varphi_2$ herrührend von M zu. Bei der *symmetrischen* Anordnung (Bild 2) kann sich die Welle um den Betrag f_1 unter einer Kraft P durchbiegen, ohne dass sich die Scheibe schräg stellt, und die Welle kann sich unter einem Moment M um den Betrag $\Delta\varphi_2$ schrägstellen, ohne dass sie sich durchbiegt.

[1]) Unter axialem Trägheitsmoment verstehen wir ein *Massen*trägheitsmoment, das sich auf eine in der Querschnittebene durch die Welle liegende Axe bezieht, während sich das polare Trägheitsmoment auf eine Axe bezieht, die sich in der Mittelebene durch die Scheibe in einem Pol projiziert.

[2]) *O. Föppl*, Mittlg. des Wöhler-Instituts, Heft 40, erscheint 1947. Versuche dazu siehe *A. Romanowski*, Dissert. Braunschweig. Techn. Hochschule. 1946.

Hier können also f_2 und $\Delta\varphi_1$ Null sein. Es gibt aber trotzdem zwei Eigenschwingungsfrequenzen ω_1 und ω_2. ω_1 entspricht der Linie 1, wobei angenommen wird, die Masse sei in einem Punkt vereinigt. ω_1 kann in bekannter Weise berechnet werden und hängt nicht von der Drehgeschwindigkeit ω_W der Welle ab.

Bei der andern Eigenschwingungszahl ω_2 verbiegt sich die Welle nach der Linie 2, ohne dass der Schwerpunkt seine Höhenlage ändert ($f_2 = 0$). Diese Taumelschwingung ist die Schwingung des Trägheitsmomentes der umlaufenden Scheibe; sie setzt sich aus zwei mit 90° Phasenversetzung erfolgenden Schwingungen in zwei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen zusammen. Wir zerlegen sie in die Biegeschwingung oder Taumelschwingung der *nicht umlaufenden* Scheibe nach der Linie 2 mit der Frequenz ω_{B2} (Bewegung a) und in die Umdrehung der Scheibe um die Axe X ohne Aenderung der Schrägstellung (Bewegung b mit der Frequenz ω_W). Die Superposition beider Bewegungen gibt die gesuchte Schwingung des Trägheitsmomentes.

Bei der Taumelschwingung des *nicht umlaufenden* Trägheitsmomentes (Bewegung a) geht nach 90° Phasenwinkel die Schrägstellung $\Delta\varphi_2$ aus der XY-Ebene in die XZ-Ebene über. Die Schwingungsenergie der Taumelschwingung ist gleich der Formänderungsenergie E_W der Welle zuzüglich der kinetischen Energie E_k der Winkeländerung oder gleich $2\,E_W$. Zur Bewegung der nur schwingenden, nicht umlaufenden Scheibe gehört ein kreisendes Moment M_B, das gleich ist dem Moment M_W, das von der Welle infolge der Verbiegung auf das Trägheitsmoment übertragen und von den beiden Lagern aufgenommen wird. Da sich die Energie $2\,E_W$ zeitlich nicht ändert, leistet M_W keine Arbeit, oder das Moment ist gleichphasig mit dem Ausschlag $\Delta\varphi_2$, der sich mit der Schrägstellungsfrequenz ω_{B2} ändert.

Bei der *Bewegung b* wird die Welle ohne Richtungsänderung der Scheibe in ihrer Axe X verdreht.

Wir setzen die Bewegungen a und b zusammen. Wenn ω_W und ω_B entgegengesetzten Drehsinn haben (Gegenlauf), wird die Welle mit der Frequenz $\omega_W + \omega_B$ verformt. Die Dämpfung der Schwingung ist deshalb besonders stark. Bei *gleichem* Drehsinn (Gleichlauf) ist diejenige Drehfrequenz ω_{WK} ausgezeichnet (kritische Drehfrequenz), bei der $\omega_W = \omega_B$, bei der also die Verformungsfrequenz der Welle $\omega_W - \omega_B = 0$ ist. Die Welle läuft in der verbogenen Form mit der Frequenz ω_W um. Die Richtung, nach der die Welle durchgebogen ist, ändert sich im Raume dauernd. Die Frequenz $\omega_W = \omega_B = \omega_{WK}$ ist die vorhin genannte kritische Drehfrequenz.

Bei der Zusammensetzung der Bewegungen a und b ist zusätzlich zu den Kräften, die den beiden Bewegungen für sich zugehören, noch das umlaufende Kreiselmoment M_K zu berücksichtigen, das bei der Aenderung der Schrägstellung der *umlaufenden* Scheibe auftritt. Das von der Welle übertragene Moment M_W wird nicht nur dazu verwendet, um die eben genannte Schrägstellung (Bewegung a) des Trägheitsmomentes zu bewirken (Anteil M_B), sondern auch dazu, die Aenderung der Schrägstellung der umlaufenden Kreiselaxe hervorzurufen (Anteil M_K). Das Kreiselmoment leistet bei der Taumelbewegung keine Arbeit. Es ist also gleichphasig mit M_B, mit dem es gleichzeitig Maximal- und Minimalwerte hat. Beim Gleichlauf sind M_B und M_K verschieden gerichtet;

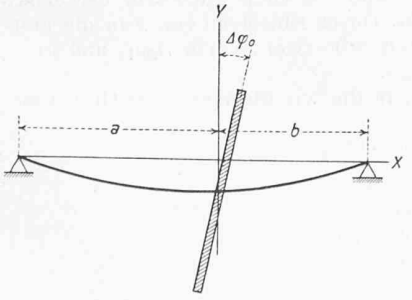

Bild 1. Zweifach gelagerte Welle mit Masse m, deren Trägheitsradius i nicht vernachlässigt werden darf

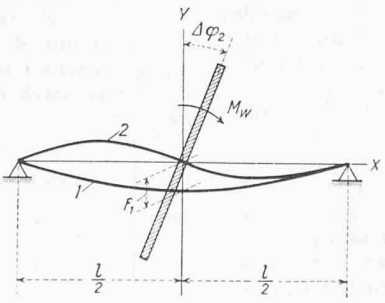

Bild 2. Die beiden Schwingungsmöglichkeiten für eine symmetrische Anordnung

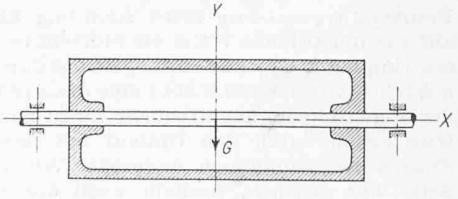

Bild 3. Turbinentrommel, bei der das «axiale» Massenträgheitsmoment grösser ist als das «polare»

es ist also $M_W = M_B - M_K$. Die grösste Winkelgeschwindigkeit der Schrägstellungänderung ist $\Delta\varphi_2\,\omega_B$, wobei $\Delta\varphi_2$ der grösste Schrägstellungswinkel und ω_B die Frequenz der Winkeländerung ist. Das entsprechende Biegungsmoment ist: $M_B = \Delta\varphi_2\,\omega_B^2\,\Theta_y$. Dazu kommt das Kreiselmoment, dessen Grösse von ω_B und der Drehgeschwindigkeit ω_W der Welle um die X-Axe abhängt; es beträgt $M_K = \Delta\varphi_2\,\omega_B\,\omega_W\,\Theta_x$. Das Wellenmoment M_W steht aber mit der Frequenz ω_{B0} der nicht umlaufenden Scheibe in der Beziehung $M_W = \Delta\varphi_2\,\omega_{B0}^2\,\Theta_y$. Dabei ist ω_{B0} die Schwingungsfrequenz des Trägheitsmoments Θ_y, das auf der nicht umlaufenden Welle sitzt:

$$(1)\qquad \omega_B^2\,\Theta_y - \omega_B\,\omega_W\,\Theta_x = \omega_{B0}^2\,\Theta_y$$

Wenn ω_W klein ist gegen ω_{B0}, ist ω_B nicht viel verschieden von ω_{B0}; denn ω_B ist angenähert gleich $\omega_{B0} + \omega_W\,\Theta_x/\Theta_y$. Eine *kritische* Frequenz $\omega_{WK} = \omega_B = \omega_W$ ist nach Gl. (1) nur dann möglich, wenn $\Theta_y > \Theta_x$. Diese Bedingung ist nicht erfüllt für schmale Scheiben. Schmale Scheiben die in der Mitte der Welle sitzen, haben deshalb nur *eine* kritische Drehfrequenz ω_1, die gerade so gross ist, wie die für die gleiche Masse mit Trägheitsradius $i = 0$. Es gibt keine kritische Drehzahl des Gleichlaufs mit schräggestelltem Trägheitsmoment oder keinen Umlauf der nach Linie 2 durchgebogenen Welle. Zu jeder Wellenfrequenz ω_W gehört eine Biegefrequenz der Taumelschwingung, die man nach Gl. (1) berechnen kann. Darnach gibt es für $\Theta_y < \Theta_x$ keine Frequenz, bei der ω_B gleich ω_W ist. Wenn aber $\Theta_y > \Theta_x$ — das trifft für starre Turbinentrommeln nach Bild 3 zu — dann ist nach Gl. (1) die kritische Taumelschwingungsfrequenz ω_{WK} der symmetrischen Anordnung:

$$(2)\qquad \omega_{WK_1}{}^2 = \omega_{B_0}{}^2\,\frac{\Theta_y}{\Theta_y - \Theta_x}$$

Die kritische Frequenz kann man erhalten, wenn man statt des tatsächlichen für die Biegeschwingung wichtigen Trägheitsmomentes Θ_y ein reduziertes Trägheitsmoment Θ_{red} einführt und die Rechnung unter der Voraussetzung durchführt, dass sich die Scheibe nicht umdrehen würde:

$$(3)\qquad \Theta_{red} = \Theta_y - \Theta_x$$

Die Reduktion des Trägheitsmomentes ist nur zulässig, wenn nach der kritischen Frequenz $\omega_{WK} = \omega_B = \omega_W$ gefragt ist. Wenn man dagegen eine beliebige Eigenschwingungsfrequenz für eine mit der Frequenz ω_W umlaufende Welle bestimmen will, muss man von Gl. (1) ausgehen.

Wir haben oben angenommen, dass ω_W und ω_B gleichen Richtungssinn haben. Wir wollen uns jetzt mit dem Fall befassen, dass die Taumelschwingung entgegengesetzten Richtungssinn wie der Wellenumlauf hat (Gegenlauf). Hier wird die Welle mit der Frequenz $\omega_W + \omega_B$ verformt, die Schwingung ist deshalb besonders stark gedämpft, so dass sie gegenüber der Schwingung des Gleichlaufs nur geringe Bedeutung hat. Die Schwerpunktsverlagerung um die Exzentrizität e, die für die Erregung der Schwingungen von Scheiben mit $i = 0$ wichtig ist[3]), hat beim Gegenlauf keine Bedeutung. Es kann nicht *dauernd* Umdrehungsenergie an die Biegeschwingungsenergie abfliessen wie bei der kritischen Drehzahl des Gleichlaufs. Wenn $\omega_W = -\omega_B = \omega_{WK2}$ ist, kann theoretisch das zur Erregung der Eigenschwingung des Gegenlaufs erforderliche Kreiselmoment von der umlaufenden Welle selbst hervorgerufen werden. Praktische Bedeutung hat diese Möglichkeit nicht.

Die Schwungscheibe kann so auf die Welle aufgekeilt sein, dass die Wellenaxe nicht mit der Hauptträgheitsaxe der Schwungmasse zusammenfällt. In diesem Fall wird von der umlaufenden Scheibe ein Moment auf die Welle ausgeübt, das bei der ausgezeichneten Drehzahl des Gegenlaufs mit der Frequenz $\omega_W = -\omega_B$ seine Richtung ändert. Es wird also auf die umlaufende Welle ein Moment im Tempo ihrer Eigenschwingungsfrequenz übertragen, das durch den Umlauf selbst ausgelöst wird. Es braucht keine *äussere* Erregung im Tempo der Eigenschwingungsfrequenz hinzu zu kommen. Die Welle wird schon durch den Umlauf mit der Frequenz ω_{WK2} zu Resonanzschwingungen angeregt. Wir könnten, von dieser Seite her gesehen, deshalb auch die Frequenz $\omega_{WK2} = -\omega_B = \omega_W$ als kritische Drehfrequenz bezeichnen, wiewohl sie tatsächlich wohl kaum wird beobachtet werden können, weil die Bewegung des Gegenlaufs durch die Werkstoffdämpfung der Welle zu stark gedämpft ist.

[3]) *O. Föppl*, «Z. d. ges. Turbinenwesens», 1916.

3. Die unsymmetrische, mit einer Masse besetzte Welle

Bei der unsymmetrisch belasteten Welle (Bild 1) können die beiden Schwingungen 1 und 2 nicht getrennt werden. Wenn an der Scheibe ein reines Biegemoment M_B angreift, wird der Schwerpunkt der Scheibe um den Betrag f_2 verlagert. Eine Kraft P, die an der Scheibe angreift, ruft neben der Durchbiegung eine Schrägstellung $\Delta\varphi_1$ hervor. Durch die Kraft P wird die Scheibe um den Betrag f_1 gesenkt und um den Betrag $\Delta\varphi_1$ schräggestellt. Durch das Moment M_W wird die Scheibe um f_2 gesenkt und um $\Delta\varphi_2$ schräggestellt. Wenn die Scheibe im Beharrungszustand mit einer Schrägstellung $\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$ umläuft, wird von der Scheibe auf die Welle nicht nur eine Kraft P, sondern auch ein Moment M_W übertragen, deren Grössen aus der Durchbiegungslinie berechnet werden können. Das grösste Wellenmoment M_W setzt sich bei der umlaufenden Scheibe (ebenso wie im vorausgehenden Fall) aus den Teilmomenten

$$M_B = (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)\,\omega_B^2\,\Theta_y$$

und $$M_K = (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)\,\omega_W\,\omega_B\,\Theta_x$$

zusammen. Hier interessiert vor allem die kritische Drehfrequenz $\omega_{WK1} = \omega_B = \omega_W$ des Gleichlaufs, die nach Gl. (2) bestimmt werden kann. ω_{B0} ist die Biegeschwingungsfrequenz der nicht umlaufenden, nach der gleichen elastischen Linie schwingenden Scheibe, bei der $M_W = (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)\,\omega_{B0}^2\,\Theta_{red}$ ist. Die nicht umlaufende Welle ist durch das Moment M_W gerade so durchgebogen, wie die Welle, die die *umlaufende* Scheibe trägt. Man muss also, wenn man die *kritische* Drehzahl der unsymmetrisch belasteten Anordnung (Bild 1) berechnen will, ein reduziertes Trägheitsmoment Θ_{red} nach Gl. (3) einführen, und die Eigenschwingungszahl der nicht umlaufenden Welle für die Anordnung mit der Masse m und dem Trägheitsmoment Θ_{red} bestimmen. Besondere Schwierigkeiten können nur dadurch entstehen, dass Θ_{red} unter Umständen negativ sein kann. Für die ausgezeichnete Frequenz $\omega_{WK2} = \omega_W = -\omega_B$ des Gegenlaufs ist $\Theta_{red} = \Theta_y + \Theta_x$, hat also immer einen positiven Wert.

Die Aufgabe, die *kritische* Drehgeschwindigkeit ω_{WK} der *umlaufenden* Scheibe zu bestimmen, vereinfacht sich also dahin, die Biegeschwingungsfrequenz ω_{B0} der *nicht umlaufenden* Welle mit dem reduzierten Trägheitsmoment Θ_{red} zu bestimmen. Hierfür gilt:

$$(4)\qquad \omega_{B0}^2 = \frac{M_W}{(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)\,\Theta_{red}} = \frac{P}{(f_1 + f_2)\,m}$$

Um die Frequenz der nicht umlaufenden Scheibe berechnen zu können, brauchen wir die Abhängigkeit der Formänderungen f und $\Delta\varphi$ von den Abmessungen der Welle. Statt des Momentes M_W setzen wir $\varkappa P a$, wobei $\varkappa$ so bestimmt werden muss, dass Masse m und Trägheitsmoment Θ_{red} gleich rasch schwingen Gl. (4). Für die Anordnung nach Bild 1 ist:

$$(5)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{P}{3EJ}\,\dfrac{a^2 b^2}{l}; \\[2ex] f_2 = \dfrac{M_W}{3EJ}\,\dfrac{a\,b\,(b-a)}{l} = \dfrac{\varkappa P}{3EJ}\,\dfrac{a^2 b}{l}\,(b-a) \\[2ex] l\,\Delta\varphi_1 = \dfrac{P\,a\,b\,(b-a)}{3EJ}; \\[2ex] l\,\Delta\varphi_2 = \dfrac{M_W}{3EJ}\,(a^2 + b^2 - ab) = \dfrac{\varkappa P}{3EJ}\,(a^2 + b^2 - a\,b)\,a \end{cases}$$

Wir setzen die Werte aus Gl. (5) in die zweite Gleichsetzung 4 ein und bestimmen zunächst das Verhältnis $\varkappa = M_W : P a$, das bei der Biegeschwingung, d. h. bei der kritischen Drehzahl, auftritt und von dem die Form der elastischen Linie abhängig ist. Durch Einsetzen von $\varkappa$ in die erste Gleichsetzung 4 erhalten wir zwei Werte $\omega_{B0\,I}$ und $\omega_{B0\,II}$ (quadratische Gleichung).

Es ist nach Gl. (4), in die wir die Werte aus Gl. (5) einsetzen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{\Theta_{red}}{m a^2}\,\dfrac{(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)\,a}{f_1 + f_2} = \\[2ex] = \dfrac{\Theta_{red}}{m a^2}\,\dfrac{b\,(b-a) + (a^2 + b^2 - a\,b)\,\varkappa}{b^2 + \varkappa\,b\,(b-a)} \\[2ex] = \varkappa\,\dfrac{\nu\,(\nu - 1) + (\nu^2 + 1 - \nu)\,\varkappa}{\nu^2 + \varkappa\,\nu\,(\nu - 1)} \end{cases}$$

Für b/a haben wir ν und für $\Theta_{red}/m a^2$ den Buchstaben $\varkappa$ gesetzt. b soll die grössere Seite sein, ν ist also immer grösser als 1.

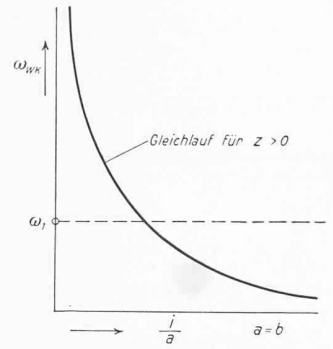

Bild 4. Kritische Drehfrequenzen für eine langgestreckte, symmetrisch gelagerte Turbinentrommel

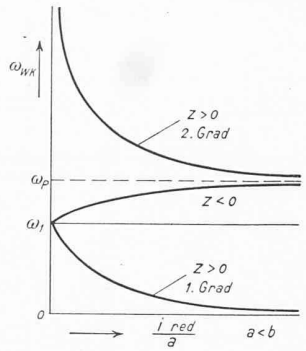

Bild 5. Kritische Schwingungsfrequenzen ω_{WK} beim Gleichlauf in Abhängigkeit vom Verhältnis Trägheitsradius i zu Abstand a

Wir nennen die Schwingungsfrequenz der Scheibe, deren Masse im Schwerpunkt S vereinigt ist, ω_1. Bei gleicher Kraft P und deshalb gleicher Durchbiegung f_1 ist:

$$(7) \qquad \omega_{B0}^2 = \frac{f_1}{f_1 + f_2}\,\omega_1^2 = \frac{\nu}{\nu + \varkappa(\nu - 1)}\,\omega_1^2 = \lambda^2\,\omega_1^2$$

Wenn $\varkappa$ nach Gl. (6) bestimmt ist, können die Frequenzen 1. und 2. Grades der nicht umlaufenden Scheibe nach Gl. (7) angegeben werden[4]). Wir suchen zunächst, für welche z man reelle Werte $\omega_{B0\,I}$ und $\omega_{B0\,II}$ erhält.

Wenn $z = \Theta_{red}/m\,a^2 = 0$, oder $\Theta_y = \Theta_x$, ist $\varkappa$ nach Gl. (6) für den Gleichlauf gleich Null und λ nach Gl. (7) gleich 1, d. h. die Scheibe mit $\Theta_{red} = 0$ hat unabhängig von ν die eine kritische Drehfrequenz ω_1 des Gleichlaufs. Die zweite kritische Frequenz des Gleichlaufs ist unendlich.

Wenn $z < 0$, ist $\varkappa$ nach Gl. (6) negativ, d. h. M und P rufen Durchbiegungen f_1 und f_2, bzw. $\Delta\varphi_1$ und $\Delta\varphi_2$ mit verschiedenen Vorzeichen hervor. Es gibt in diesem Fall nach Gl. (7) nur eine Schwingung, für die $\lambda > 1$ und bei der die Durchbiegungen f_1 und f_2 verschieden gerichtet sind. Wenn der reduzierte Halbmesser i_{red} des negativen Trägheitsmomentes sehr gross, oder z im Grenzfall $-\infty$ ist, hat $\varkappa = \varkappa'$ unter der Voraussetzung einen endlichen Wert, dass der Zähler in Gl. (6) Null ist, oder:

$$(8) \qquad \nu^2 - \nu + \varkappa'(\nu^2 - \nu + 1) = 0;\ \varkappa' = -\frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2 - \nu + 1}$$

Wenn $z > 0$, gibt es für $\varkappa$ einen positiven und einen negativen Wert. Zu $z = +\infty$ gehört ein Wert $\varkappa_1 = \infty$ und ein endlicher Wert $\varkappa_2 = \varkappa'$ nach Gl. (8). Die zu $\varkappa_2$ gehörige Biegeschwingungsfrequenz nennen wir $\omega_P = \lambda_P\,\omega_1$. Nach Gl. (7) ist $\lambda_1^2 = 0$ und $\lambda_2^2 = \lambda_P^2 = \nu - 1 + \frac{1}{\nu}$; d. h. zu einem sehr grossen Trägheitsmoment gehört einerseits eine sehr niedrige kritische Drehzahl und anderseits die kritische Frequenz ω_P.

Wenn wir z. B. $b = 2a$ oder $\nu = 2$ in die Gleichungen (5) bis (8) einsetzen, erhalten wir für $z = +\infty$ und $z = -\infty$:

$$(9) \qquad \lambda_P = \sqrt{\nu - 1 + 1/\nu} = \sqrt{2 - 1 + 0{,}5} = 1{,}22$$

d. h. die kritische Schwingungsfrequenz des im Abstand 1 : 2 von den Lagern aufgekeilten Schwungrades vom Trägheitsradius ∞ ist um 22 % höher als die kritische Frequenz der gleichen Schwungmasse vom Trägheitsradius 0. Ob das reduzierte Trägheitsmoment in diesem Fall positiv oder negativ ist, ist ohne Einfluss auf λ. Im einen Fall, d. h. für $z = +\infty$, ist es die Schwingung 2. Grades, im andern Fall ($z = -\infty$) die Schwingung 1. Grades, die rascher erfolgt als ω_1.

Wenn $b = 3a$, oder $\nu = 3$, ist für $z = \pm\infty$:

$$(10) \qquad \lambda_P = \sqrt{2{,}33} = 1{,}53$$

In Bild 4 ist die Abhängigkeit der kritischen Frequenz ω_{WK} vom Verhältnis Trägheitshalbmesser i zum Lagerabstand a für den Fall aufgetragen, dass $a = b$ (Bild 2) ist. Die eine Frequenz ist unabhängig von i_{red} gleich ω_1, die andere ist bei $z > 0$ für $i_{red}/a = 0$ unendlich und für $i_{red}/a = \infty$ Null. Wenn $z < 0$ (also für schmale Scheiben), gibt es für den Gleichlauf bei $a = b$ nur die *eine* kritische Eigenschwingungsfrequenz ω_1. Zu jeder Drehfrequenz ω_W gehört eine Biege-Eigenschwingungsfrequenz ω_B, die höher ist als ω_W.

In Bild 5 ist für $b > a$ die Abhängigkeit zwischen i_{red}/a und ω_{WK} für $z > 0$ und $z < 0$ dargestellt. Die Frequenz ω_{WK} 1. Grades ist für $i_{red}/a = \infty$ Null, die 2. Grades ω_P. Für $i_{red}/a = 0$ ist die Frequenz 1. Grades gleich ω_1 und die 2. Grades unendlich.

Für $z < 0$ (schmale Scheibe) gibt es beim Gleichlauf nur die mittlere Kurve in Bild 5, die für $i_{red}/a = 0$ den Wert ω_1 und für $i_{red}/a = \infty$ den Wert ω_P hat. Bei dieser Schwingung schwingen Masse und Trägheitsmoment gegeneinander. Die Kurve für $z < 0$ ist in Bild 5 nach der positiven Richtung aufgetragen worden, wiewohl i_{red} negativ ist. Für $z < 0$ und $i_{red} = -\infty$ ist ω_{WK1} (ebenso wie ω_{WK2} für $i_{red} = +\infty$) gleich ω_P. Das Verhältnis $\omega_P : \omega_1$ hängt von b/a ab.

Biezeno und Grammel[5]) haben den Fall $z < 0$ und zusätzlich den Fall $\omega_W = -\omega_B$ (Gegenlauf) behandelt, der allerdings kaum praktische Bedeutung haben kann. Beim Gegenlauf addieren sich die Trägheitsmomente Θ_y und Θ_x nach Gl. (3) zum reduzierten Trägheitsmoment Θ_{red}. Der Trägheitsradius i_{red} kann in diesem Fall nur einen *positiven* Wert haben. Wenn man auf der Abszissenaxe den Wert i_{red} aufträgt, fallen die Kurven des Gegenlaufs für $z < 0$ mit den Kurven des Gleichlaufs für $z > 0$ zusammen.

Die vorstehenden Ausführungen (d. h. die Kurven in Bild 5) beziehen sich auf die *kritische* Drehfrequenz ω_{WK}, die in der Literatur bisher allein behandelt worden ist. Man kann aber ausserdem die *Eigenschwingungsfrequenz* ω_B in Abhängigkeit von ω_W für jedes Verhältnis i/a angeben. Bei der Drehfrequenz $\omega_W = \omega_B\,\Theta_y/\Theta_x$ heben sich das Biegemoment $M_B = \Theta_y\,\omega_B^2\,\Delta\varphi$ und das Kreiselmoment $M_K = \Delta\varphi\,\Theta_x\,\omega_B\,\omega_W$ beim Gleichlauf gegeneinander heraus. Die Welle schwingt mit der Frequenz der gleichen Anordnung, bei der $i = 0$, also mit $\omega_B = \omega_1$. Eine Schwingung 2. Grades gibt es hierfür nicht.

4. Unendlich grosse Schwingungsfrequenz

Da $\omega_B = \sqrt{c_1/m}$ bzw. $= \sqrt{c_2/\Theta}$ kann ω_B nur dann unendlich werden, wenn entweder die Federkonstanten c unendlich, oder m bzw. Θ gleich Null sind. Die Annahme $m = 0$ hat kein praktisches Interesse. Θ kann für eine tatsächliche Schwungmasse, an der ein Moment M angreift, Null werden, weil Θ_{red} auftritt, das bei der *kritischen* Drehzahl des Gleichlaufs gleich dem Unterschied der beiden Trägheitsmomente Θ_y und Θ_x ist. Beim Gegenlauf, bei dem $\Theta_{red} = \Theta_y + \Theta_x$, kann Θ_{red} nicht Null und deshalb ω nicht unendlich gross werden. Damit ω unendlich gross wird, muss (ausser $\Theta_{red} = 0$) an der Masse m eine unendlich grosse bezogene Federkraft c angreifen, d. h. die Masse m muss bei der Schwingung unter der Kraft P und dem Moment M_W den Weg Null zurücklegen ($f_1 + f_2 = 0$).

Bei einer Welle mit zwei Massen, wird eine Eigenschwingungsfrequenz $\omega = \infty$ erhalten, wenn *ein* Trägheitsmoment (etwa Θ_{red_1}[6]) gleich Null ist, d. h. wenn $\Theta_{x_1} = \Theta_{y_1}\,\omega_W/\omega_B$. Damit gleichzeitig die übrigen Federkonstanten (c_{21}, c_{12} und c_{22}) unendlich gross sind, müssen die Momente M_1, M_2 und die Kräfte P_1, P_2 so gross sein, dass $\Delta\varphi_2 = f_1 = f_2 = 0$. Diese Bedingung kann bei $\Theta_{red_1} = 0$ erfüllt werden, da drei Veränderliche zur Verfügung stehen, nämlich $\varkappa_1 = \frac{P_2\,a}{P_1\,a}$; $\varkappa_2 = \frac{M_1}{P_1\,a}$ und $\varkappa_3 = \frac{M_2}{P_1\,a}$. Man kann den Satz aufstellen: «Die kritische Drehzahl ω_{WK} ist bei von Null verschiedenen Massen und Trägheitsmomenten dann unendlich gross, wenn man Kräfte P und Momente M so an den einzelnen Massen angreifen lassen kann, dass sämtliche Durchbiegungen f und sämtliche Schrägstellungen $\Delta\varphi$ gleichzeitig Null sind».

Das besondere der kritischen Drehzahl $\omega_{WK} = \infty$ liegt im vorliegenden Fall darin, dass das reduzierte Trägheitsmoment Θ_{red1} für eine wirkliche Masse m_1 mit Trägheitsradius i, an der ein Moment angreift, annähernd Null werden kann und dass Störungen mit sehr hoher Eigenschwingungs-Frequenz auftreten können. Eine *kritische* Drehzahl ist dann vorhanden, wenn $\omega_W = \omega_B$. Wenn das der Fall ist, gehört zu einer sehr grossen Biegefrequenz ω_B (sehr gross im Verhältnis zur Biegefrequenz ω_{B0} der nicht umlaufenden Welle)

[4]) *O. Föppl*, Mittlg. d. Wöhler-Instituts, Heft 40. Dort ist ausgeführt, was in diesem Falle unter Schwingungen 1. und 2. Grades zu verstehen ist.

[5]) *C. B. Biezeno* und *R. Grammel:* Techn. Mechanik, Berlin 1939, Verlag J. Springer.

[6]) Die Indizes beziehen sich auf die Massen m_1 und m_2.

auch eine sehr grosse Drehgeschwindigkeit ω_W. Wenn also bei einer Welle mit zwei Massen die eine Masse m_1 langgestreckt ist, so dass $\Theta_{x1} = \Theta_{y1}$ ist, dann hat die Gesamtanordnung bei besonders raschem Umlauf der Welle ($\omega_W = \infty$) eine grosse Eigenschwingungsfrequenz ($\omega_B = \infty$). Das ist eine kritische Drehzahl höherer Ordnung. Es schwingt nur das eine Trägheitsmoment Θ_1 sehr rasch, während m_1, m_2 und Θ_2 in Ruhe bleiben. Die Welle läuft in der verbogenen Form mit schräg gestelltem Trägheitsmoment Θ_1 um, wobei die Welle so verbogen ist, dass die Schwerpunkte von m_1 und m_2 und das Trägheitsmoment Θ_2 in Ruhe bleiben. Ich nehme an, dass diese Erscheinung in der heutigen Zeit, in der man vielfach Wellen mit sehr hohen Drehzahlen umlaufen lässt, Störungen hervorrufen kann, die nicht sofort auf ihren Ursprung zurückgeführt werden können.

Zur Wiederherstellung der Tacoma-Hängebrücke

DK 624.53 (73)

Ueber den Entwurf der neuen Tacoma-Hängebrücke, die das am 7. November 1940 eingestürzte Bauwerk[1]) ersetzen soll, berichtet Charles E. Andrew im «Engineering News Record» vom 29. November 1945. Wir entnehmen diesem Bericht die folgenden wichtigsten Ergebnisse.

Entsprechend den Untersuchungen der Expertenkommission[2]) musste die neue Brücke mit grösserem Hauptträgerabstand und grösserer Steifigkeit bei Verminderung der aerodynamischen Unstabilität des Brückenprofils erstellt werden. Eingehende Versuche, die sich über einen Zeitraum von rund vier Jahren erstreckten, führten dazu, den Hauptträgerabstand auf 18,29 m statt 11,90 m anzusetzen, während an Stelle des ursprünglichen, vollwandigen Versteifungsträgers von 2,44 m Höhe nun ein Fachwerkversteifungsträger von 10,06 m Höhe bei einem Trägheitsmoment von rund $300 \cdot 10^6$ cm^4 mit möglichst kleiner Windangriffsfläche angeordnet wurde. Die Spannweite der alten Brücke mit 2800 Fuss wurde beibehalten; es konnten so die Hauptpfeiler, sowie Teile der Verankerungen und die westliche Zufahrt der alten Brücke wieder verwendet werden. Die Fahrbahn zeigt ein neues charakteristisches Merkmal: zur Verminderung der Torsionsmomente aus Wind wurden zwischen den einzelnen Fahrbahnstreifen, sowie zwischen Fahrbahn und Gehwegen durchlaufende Längsschlitze von rund 80 bzw. 47 cm Breite angeordnet. Das Eigengewicht der neuen Brücke ist rund 50 % grösser als das der alten.

Die aerodynamischen Versuche, die die Grundlage für den neuen Entwurf bilden, wurden an einem Modell im Massstab 1:50 von 100 Fuss = 30,48 m Länge durchgeführt. Der für diese Versuche erstellte Windkanal musste einen Luftstrom mit einem Querschnitt von $1{,}2 \cdot 30{,}5$ m^2 liefern, der durch 10 Propeller mit je 2,3 m Durchmesser erzeugt wurde. Zur «Eichung» der Modellversuche konnte der glückliche Umstand verwendet werden, dass eine ganze Reihe von Beobachtungen über Schwingungen der früheren Brücke zur Verfügung stand. Es zeigte sich bei diesen Versuchen wieder der bekannte Mangel, dass unser Erfahrungsmaterial über die Dämpfung bei ausgeführten Brücken sehr dürftig ist; in den Modellversuchen wurde deshalb möglichst kleine Dämpfung angestrebt, um bei der Ausführung möglichst sicher zu gehen. Trotzdem in der Natur der Wind starke Veränderung der Geschwindigkeiten und über die Brücke veränderlichen Einfallswinkel aufweist, wurden diese beiden Grössen, mittlere Windgeschwindigkeit und Einfallswinkel, konstant gehalten; auch das ist ungünstiger als die Wirklichkeit, weil durch konstante Windgeschwindigkeit ständig Energie zugeführt wird, während ein veränderlicher Einfallswinkel dämpfend wirkt.

[1]) *F. Stüssi* und *J. Ackeret:* Zum Einsturz der Tacoma-Hängebrücke. SBZ B. 117, S. 137* (29. März 1941).

[2]) *O. H. Ammann, T. v. Karman* und *G. B. Woodruff:* The Failure of the Tacoma-Narrows-Bridge. A Report by the Board of Engineers. März 1941.

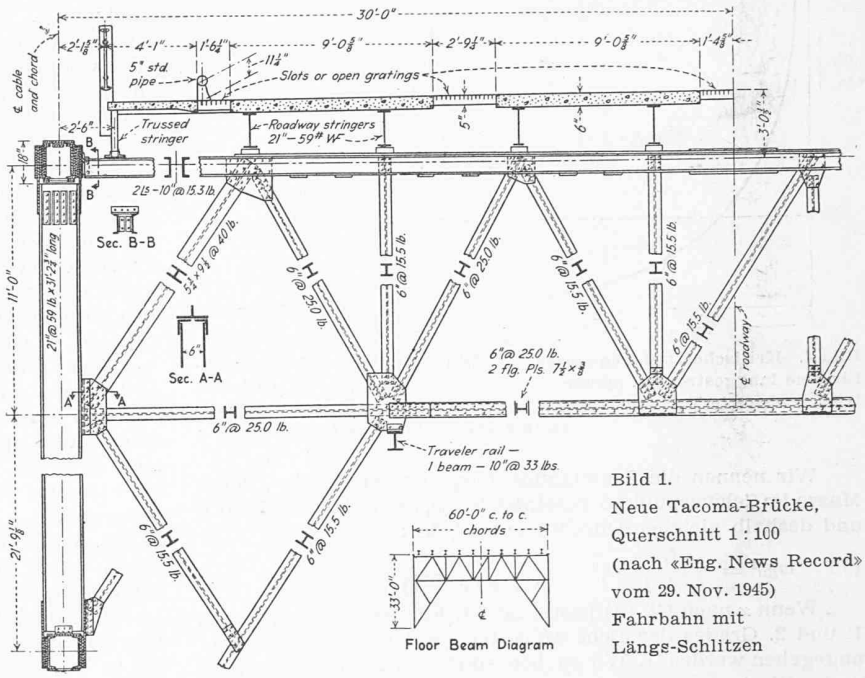

Bild 1. Neue Tacoma-Brücke, Querschnitt 1 : 100 (nach «Eng. News Record» vom 29. Nov. 1945) Fahrbahn mit Längs-Schlitzen

Zur ausgeführten Form des neuen Brückentragwerkes (Querschnitt Bild 1) gelangte man in zwei Etappen. In einer ersten Etappe wurde die Fahrbahn noch ohne Längsschlitze vorgesehen, dagegen die Hauptträger fachwerkförmig ausgebildet. Das Modell dieser Brücke zeigte aerodynamische Stabilität bis zu einer Windgeschwindigkeit von rund 180 km/h, für Einfallswinkel zwischen 2° aufwärts und 5° abwärts, bei einem Trägheitsmoment von rund $270 \cdot 10^6$ cm^4. Eine Vergrösserung des Trägheitsmomentes auf annähernd das Doppelte beeinflusste die kritische Windgeschwindigkeit nur wenig. Wohl zeigte dieses Modell gegenüber der ursprünglichen Brücke ein wesentlich verbessertes Verhalten. Da aber Rauchversuche zeigten, dass bei Sturm die Einfallswinkel des Windes ausserhalb der gefundenen kritischen Winkelwerte liegen können, wurde Stabilität für Neigungswinkel bis $\pm 15°$ bei Windgeschwindigkeiten bis etwa 150 km/h gefordert. Um diese Forderung einhalten zu können, standen zwei Wege offen: Man konnte entweder die Bewegungsursache weiter verkleinern oder die Möglichkeit der Energieaufnahme durch das Tragwerk vergrössern. Der erste Weg ist bestimmt wirtschaftlicher.

Die zweite Versuchsetappe zeigte nun, dass durch durchgehende Längsschlitze, abgedeckt mit Stahlgitterrosten, die aerodynamische Unstabilität praktisch eliminiert werden kann. Die Versuche zeigten, dass die Schlitzbreite auf die Grösse des anfachenden Momentes von Einfluss ist; bei den gewählten Ausführungsbreiten werden die Impulse so stark vermindert, dass die vom Wind übertragene Energie bei kleiner Schwingungsweite aufgenommen werden kann. Damit waren die Grundlagen für die Ausführung der neuen Brücke gegeben. Mit der Durchführung dieser Untersuchungen war Prof. F. B. Farquharson der University of Washington beauftragt.

In diesem Entwurf wird zum ersten Mal ein neues Konstruktionsmerkmal in Form der durchlaufenden Fahrbahnlängsschlitze verwirklicht, wodurch die aerodynamische Unstabilität weitgespannter und schmaler leichter Hängebrücken gegenüber Torsion praktisch ausgeschaltet wird. Es muss hier festgestellt werden, dass dieses Merkmal nicht eine amerikanische, sondern eine schweizerische Erfindung ist. Im Anschluss an unsere Untersuchungen über den Einsturz der Tacoma-Brücke[1]) hat Prof. Dr. J. Ackeret, unterstützt durch Konstrukteur J. Egli, grundsätzliche Modellversuche in kleinem Masstab über den Einfluss des Fahrbahnlängsschlitzes durchgeführt. Die Versuchsergebnisse, in Bild 2 wiedergegeben, sind ausserordentlich instruktiv und schlüssig. Diese Versuchsergebnisse von Bild 2 hat Prof. Ackeret am 21. Nov. 1941 Prof. Farquharson zugestellt und der Empfang dieser Ergebnisse wurde von Prof. Farquharson am 3. März 1942 auch bestätigt. Es unterliegt deshalb keinem Zwefel, dass die Ausführungsform der neuen Tacoma-Brücke in einem grundlegend wichtigen Merkmal durch diese Versuche Ackeret-Egli