

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 65 (1947)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Eine Erweiterung der technischen Biegungslehre  
**Autor:** Ziegler, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-55812>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Eine Erweiterung der technischen Biegungslehre

Von Prof. Dr. HANS ZIEGLER, E. T. H., Zürich DK 539.384

1. Problemstellung. Die vorliegende Arbeit beruht — wie eine frühere<sup>1)</sup>, deren Fortsetzung sie bildet — auf den folgenden Voraussetzungen:

1. Es wird ein gerader, homogener Stab (Bild 1) betrachtet, dessen Querschnittshauptachsen unter sich parallel sind.

2. Er wird als einigermassen schlank, mithin das Verhältnis  $\epsilon$  zwischen den Querschnittsabmessungen und der Länge als klein angenommen.

3. Die Lasten sollen durch eine Kräftegruppe in der durch die Stab- und die eine Querschnittshauptaxe aufgespannten Ebene dargestellt werden können und nicht zu schwach gegen die Stabaxe geneigt sein, sodass die Schnitte auf Zug, Schub und Biegung um die andere Querschnittshauptaxe beansprucht sind.

4. Der Spannungszustand wird als hinreichend eben vorausgesetzt, und dies bedeutet die Beschränkung auf Querschnitte, die nur wenig vom schmalen Rechteck mit konstanter Breite und gleichmässig darüber verteilter Belastung abweichen und deren Höhe als schwach veränderlich zugelassen wird.

Der Spannungszustand in einem solchen Stab kann — die Umgebungen von Einzelkraftangriffspunkten ausgenommen — näherungsweise dadurch ermittelt werden, dass der Untersuchung eines — keine solchen Stellen enthaltenden — Stababschnittes die elastischen Grundgleichungen und die Randbedingungen längs der Mantelfläche zu Grunde gelegt, in den be-

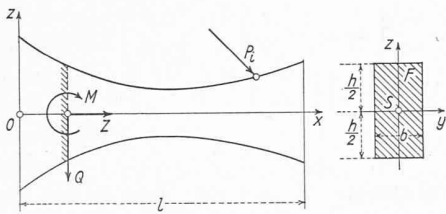


Bild 1

grenzenden Schnitten die Äquivalenz der inneren Kräfte mit der Beanspruchung ausgedrückt und die so erhaltenen Beziehungen unter Beschränkung auf Glieder einer bestimmten Grössenordnung gelöst werden. Diese lauten im Falle des exakt ebenen Spannungszustandes<sup>2)</sup>

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \gamma \sin \psi, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \cos \psi,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma_x \sin \varphi - \tau_{xz} \cos \varphi + q_x = 0, \\ \tau_{xz} \sin \varphi - \sigma_z \cos \varphi - q_z = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \int_F \sigma_x z dF = M, \quad \int_F \sigma_x dF = Z, \quad \int_F \tau_{xz} dF = -Q,$$

und zwar bedeuten dabei

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_x(x, z) = a_0(x) + a_1(x)z + a_2(x)z^2 + a_3(x)z^3 + \\ + a_4(x)z^4 + \dots \end{cases}$$

$\tau_{xz}$  und  $\sigma_z$  die drei Spannungskomponenten,  $\gamma$  das spezifische Gewicht,  $\psi$  (Bild 2) die Neigung der Stabaxe gegen die Horizontale,  $\varphi$   $\approx \epsilon$  bzw.  $-\varphi$  die kleinen Neigungswinkel des Umrisses gegenüber der Stabaxe,  $q_x$  und  $q_z$  die Spannungen an der Oberfläche,  $M$ ,  $Z$  und  $Q$  die drei Komponenten der Beanspruchung und die Grössen  $a_k(x)$  noch freie Funktionen; ferner geben die beigefügten Zeiger an, von welcher Ordnung klein die betreffenden — dimensionslos gedachten — Glieder sind. Die Deformation des Stabes wird alsdann in grossen

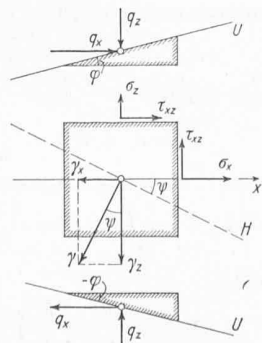


Bild 2

Zügen durch seine elastische Linie beschrieben, welche die Krümmung

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}(x, 0) + \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial z}(x, 0) - \right. \\ \left. -\frac{1}{m} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}(x, 0) \right] \end{cases}$$

besitzt.

In der zitierten Arbeit wurden die Beziehungen (1) bis (6) in erster und zweiter Näherung, d. h. unter Beschränkung auf Glieder der Grössenordnungen  $1/\epsilon$  und  $1$ , gelöst. Dabei stellte sich heraus, dass der Spannungszustand und die Krümmung der elastischen Linie in zweiter Näherung durch die Gleichungen

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{12M}{bh^3} z + \frac{Z}{bh}, \\ \tau_{xz} = -\frac{3}{2bh} \left[ \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2}\right) Q + 2 \left(1 - 12 \frac{z^2}{h^2}\right) \frac{\varphi M}{h} \right], \\ \sigma_z = 0, \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{12M}{Eb h^3} \end{cases}$$

gegeben sind, die auch in der Form

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{M}{J} z + \frac{Z}{F}, \\ \tau_{xz} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M}{J} S_2 \right) = -\frac{Q}{b} \frac{S_2}{J} + \frac{M}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{S_2}{J} \right), \\ \sigma_z = 0, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \end{cases}$$

angeschrieben werden können und in dieser Gestalt auch für nichtrechteckige Querschnitte mit schwach veränderlicher Breite gültig bleiben, insofern noch mit einem einigermaßen ebenen Spannungszustand gerechnet werden kann.

Im folgenden werden die Beziehungen (1) bis (6) in dritter Näherung, d. h. unter Berücksichtigung der mit  $\epsilon$  vergleichbaren Glieder, gelöst. Damit wird eine Verfeinerung der elementaren Beziehungen (7) bzw. (8) gewonnen, die vor allem im Hinblick auf Balken mit geringerem Schlankheitsgrad und stärkerem Anzug im Aufriss wünschbar ist. Bei der Anwendung der Ergebnisse ist allerdings darauf zu achten, dass diese

a) einem weiteren Näherungsschritt entsprechen und daher in höherem Masse von der Voraussetzung 4 Gebrauch machen,

b) so wenig wie die elementaren Beziehungen auf die Umgebungen von Einzelkraft-Angriffspunkten angewandt werden dürfen.

2. Dritte Näherung. Im Sinne einer dritten Näherung sind in den Beziehungen (1) bis (6), deren Gültigkeit auf den schmalen Rechteckquerschnitt mit konstanter Breite beschränkt ist, auch die von erster Ordnung kleinen, mit dem Zeiger 1 versehenen Glieder, also insbesondere die beiden Komponenten des Eigengewichtes sowie die Spannungen an der Oberfläche zu berücksichtigen, die mittels

(9)  $p_x = b q_x, \quad p_z = b q_z$   
auf die Belastung  $p_x, p_z$  je Längeneinheit zurückgeführt werden und je nach dem Rand, an dem sie angreifen, mit dem Zeiger  $o$  bzw.  $u$  versehen werden sollen. Für ihren Zusammenhang mit den Komponenten der Beanspruchung

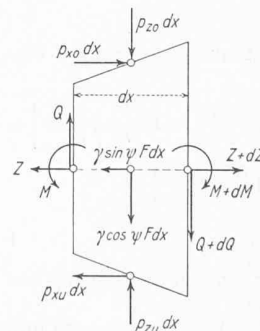


Bild 3

liefert das Gleichgewicht des in Bild 3 wiedergegebenen Stabelementes die Beziehungen

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dZ}{dx} = -p_{xo} + p_{xu} + \gamma F \sin \psi, \\ \frac{dQ}{dx} = -p_{zo} + p_{zu} - \gamma F \cos \psi, \end{cases}$$

$$(11) \quad \frac{dM}{dx} = -Q - \frac{h}{2} (p_{xo} + p_{xu}),$$

<sup>1)</sup> H. Ziegler, Zur Kritik der technischen Biegungslehre, SBZ Bd. 128, S. 187\* (12. Oktober 1946).

<sup>2)</sup> H. Ziegler, a. a. O.

die als Verallgemeinerungen der von der reinen Biegung her bekannten Identitäten  $dQ/dx = -p_z$  und  $dM/dx = -Q$  aufzufassen sind. Ferner folgt aus (11) in der hier beobachteten Näherung

$$(12) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{dQ}{dx} = p_{z0} - p_{zu} + \gamma F \cos \psi.$$

Die Vernachlässigung der mit  $p_{x0}$ ,  $p_{xu}$  behafteten Glieder geschieht dabei mit Rücksicht auf die — schon den Abschätzungen in (1) bis (6) zu Grunde gelegte — Annahme, dass sämtliche Spannungskomponenten bei der Ableitung nach  $x$  von nächsthöherer Ordnung klein werden; damit ist allerdings in Kauf zu nehmen, dass Stellen mit sprunghaft ändernder Belastung in dieser Näherung nicht mehr genügend genau erfasst werden.

Für die Ermittlung der Schubspannung  $\tau_{xz}$  geht man von den ersten Beziehungen (1) und (3) aus, wobei  $\sigma_x$  nur bis auf Glieder der Grössenordnung 1 genau einzusetzen ist und daher durch die rechte Seite der ersten Gleichung (8) ersetzt werden kann. Man erhält so die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M}{J} z + \frac{Z}{F} \right) + \gamma \sin \psi$$

mit dem allgemeinen Integral

$$\tau_{xz} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{z^2}{2} - \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{Z}{F} \right) - \gamma \sin \psi \right] z + f(x)$$

sowie nach Ersatz von  $\sin \varphi$  durch  $\varphi$  und  $\cos \varphi$  durch 1 die beiden Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h^2}{8} - \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{Z}{F} \right) - \gamma \sin \psi \right] \frac{h}{2} + f &= \\ &= \left( \frac{M}{J} \frac{h}{2} + \frac{Z}{F} \right) \varphi + q_{x0}, \\ -\frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h^2}{8} + \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{Z}{F} \right) - \gamma \sin \psi \right] \frac{h}{2} + f &= \\ &= \left( \frac{M}{J} \frac{h}{2} - \frac{Z}{F} \right) \varphi + q_{xu}. \end{aligned}$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen führt auf

$$(13) \quad -\left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{Z}{F} \right) - \gamma \sin \psi \right] \frac{h}{2} = \frac{Z}{F} \varphi + \frac{1}{2} (q_{x0} - q_{xu})$$

und nach der Auswertung für den Rechteckquerschnitt mit konstantem  $b$  auf die erste Komponentenbedingung (10); ihre Addition liefert

$$f = \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h^2}{8} + \frac{M}{J} \frac{h}{2} \varphi + \frac{1}{2} (q_{x0} + q_{xu})$$

und damit die Schubspannung

$$(14) \quad \begin{cases} \tau_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) + \frac{h}{2} \frac{M}{J} \varphi - \\ - \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{Z}{F} \right) - \gamma \sin \psi \right] z + \frac{1}{2} (q_{x0} + q_{xu}), \end{cases}$$

die zufolge (9) und (13) auch in der Form

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) + \frac{h}{2} \frac{M}{J} \varphi + \frac{2z}{h} \frac{Z}{F} \varphi + \\ &+ \frac{1}{2b} \left( 1 + \frac{2z}{h} \right) p_{x0} + \frac{1}{2b} \left( 1 - \frac{2z}{h} \right) p_{xu} \end{aligned}$$

und — unter Verwendung der Momentenbedingung (11) vollends ausgewertet — mit

$$(15) \quad \begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{3}{2bh} \left[ \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) Q + 2 \left( 1 - 12 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\varphi}{h} M \right] + \\ + \frac{2\varphi}{bh} \frac{z}{h} Z - \frac{1}{4b} \left( 1 + 2 \frac{z}{h} \right) \left( 1 - 6 \frac{z}{h} \right) p_{x0} - \\ - \frac{1}{4b} \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right) \left( 1 + 6 \frac{z}{h} \right) p_{xu} \end{cases}$$

angeschrieben werden kann sowie der dritten Forderung (4) genügt.

Analog gewinnt man aus den zweiten Beziehungen (1) und (3) in der beobachteten Näherung für die zur Stabaxe senkrechte Normalspannung  $\sigma_z$  die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) + \frac{h}{2} \frac{M}{J} \varphi \right] + \gamma \cos \psi$$

mit dem allgemeinen Integral

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{6} \right) z - \\ &- \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h}{2} \varphi + \frac{M}{J} \left( \varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right) - \gamma \cos \psi \right] z + \\ &+ g(x) \end{aligned}$$

und den beiden Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h^3}{24} - \\ - \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h}{2} \varphi + \frac{M}{J} \left( \varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right) - \gamma \cos \psi \right] \frac{h}{2} + \\ + g = \frac{M}{J} \frac{h}{2} \varphi^2 - q_{z0}, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h^3}{24} + \\ + \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h}{2} \varphi + \frac{M}{J} \left( \varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right) - \gamma \cos \psi \right] \frac{h}{2} + \\ + g = -\frac{M}{J} \frac{h}{2} \varphi^2 - q_{zu}. \end{aligned}$$

Ihre Subtraktion ergibt

$$(16) \quad \begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h^3}{24} - \\ - \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h}{2} \varphi + \frac{M}{J} \left( \varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right) - \gamma \cos \psi \right] \frac{h}{2} = \\ = \frac{M}{J} \frac{h}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} (q_{z0} - q_{zu}) \end{cases}$$

und führt auf die Ableitung (12) der Momentenbedingung für das Stabelement; ihre Addition liefert

$$g = -\frac{1}{2} (q_{z0} + q_{zu})$$

und damit die Normalspannung

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma_z = -\frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) - \\ - \left[ \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) \varphi + \frac{M}{J} \left( \varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right) - \gamma \cos \psi \right] z - \\ - \frac{1}{2} (q_{z0} + q_{zu}), \end{cases}$$

die zufolge (9) und (16) auch in der Form

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{1}{6} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) + z \frac{M}{J} \varphi^2 - \\ &- \frac{1}{2b} \left( 1 + 2 \frac{z}{h} \right) p_{z0} - \frac{1}{2b} \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right) p_{zu} \end{aligned}$$

und — unter Verwendung der Momentenbedingung (11) sowie ihrer Ableitung (12) bei Beschränkung auf Grössen der Ordnung  $\varepsilon$  vollends ausgewertet — mit

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_z = \frac{3}{bh} \frac{z}{h} \left[ \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{d\varphi}{dx} - 4 \left( 1 - 8 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{\varphi^2}{h} \right] M - \\ - \frac{1}{2b} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{z}{h} \left( 12 \frac{\varphi}{h} Q + bh \gamma \cos \psi \right) - \\ - \frac{1}{2b} \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \left( 1 + 2 \frac{z}{h} \right)^2 p_{z0} - \\ - \frac{1}{2b} \left( 1 + \frac{z}{h} \right) \left( 1 - 2 \frac{z}{h} \right)^2 p_{zu} \end{cases}$$

angeschrieben werden kann.

Schliesslich stehen zur Ermittlung der axialen Normalspannung

$$\sigma_x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

noch die Verträglichkeitsbedingung (2), sowie die beiden ersten Forderungen (4) zur Verfügung. Die erstgenannte kann unter Verwendung von (17) in der beobachteten Näherung mit

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = 2a_2 + 6a_3 z = -2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) z$$

angeschrieben werden, sodass man zunächst die Beiwerte

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right)$$

und damit

$$\sigma_x = a_0 + a_1 z - \frac{1}{3} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) z^3$$

erhält; die letztgenannten führen alsdann mit der Abkürzung

$$(19) \quad K = \int_F z^4 dF = \frac{bh^5}{80}$$

auf

$$a_1 J - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{K}{3} = M, \quad a_0 F = Z$$

und liefern mit den weiteren Beiwerten

$$a_0 = \frac{Z}{F}, \quad a_1 = \frac{M}{J} + \frac{1}{3} \frac{K}{J} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right)$$

die Normalspannung

$$(20) \quad \sigma_x = \left[ \frac{M}{J} + \frac{1}{3} \left( \frac{K}{J} - z^2 \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \right] z + \frac{Z}{F},$$

die — unter Verwendung von (11) und (12) bei Beschränkung auf Grössen der Ordnung  $\varepsilon$  vollends ausgewertet — auch mit

$$(21) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{12}{bh^3} \left[ 1 + \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{20}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 4\varphi^2 - \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right) \right] \frac{z}{h} M + \\ + \frac{1}{bh} Z + \\ + \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{20}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{z}{h} \left[ \frac{12\varphi}{bh} Q + \frac{1}{b} (p_{z0} - p_{zu}) + h\gamma \cos \psi \right] \end{cases}$$

angeschrieben werden kann.

Für die Krümmung der elastischen Linie erhält man durch Einsetzen von (14), (17) und (20) in (6) in der beobachteten Näherung

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{K}{EJ} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) + \left( \frac{1}{mE} - \frac{1}{G} \right) \cdot \\ \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \frac{h^2}{8} + \frac{d}{dx} \left( \frac{M}{J} \right) h\varphi + \frac{M}{J} \left( \varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right) \right] - \\ - \frac{1}{mE} \gamma \cos \psi, \end{cases}$$

unter Verwendung von (9), (16) sowie der Identität

$$(23) \quad G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

auch

$$\frac{1}{\rho} = \left( 1 + \frac{2m+1}{m} \varphi^2 \right) \frac{M}{EJ} + \frac{1}{E} \left( \frac{1}{3} \frac{K}{J} - \frac{2m+1}{m} \frac{h^2}{24} \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) - \frac{2m+1}{mE} \frac{p_{z0} - p_{zu}}{F} - \frac{2(m+1)}{mE} \gamma \cos \psi,$$

und hierfür kann man nach völliger Auswertung unter Berücksichtigung von (11) und (12) schliesslich

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} = \left[ 1 + \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{m} \right) \varphi^2 + \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{2m} \right) \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx} \right] \frac{12M}{Ebh^3} - \\ - \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{2m} \right) \frac{12\varphi Q}{Ebh^2} - \\ - \left( \frac{12}{5} + \frac{3}{2m} \right) \frac{p_{z0} - p_{zu}}{Ebh} - \left( \frac{12}{5} + \frac{5}{2m} \right) \frac{\gamma}{E} \cos \psi \end{cases}$$

schreiben.

3. Verallgemeinerung. Die Ergebnisse des letzten Abschnittes lassen sich dahin interpretieren, dass es — im Sinne einer dritten Näherung und unter Ausschluss von Stellen, wo Einzelkräfte angreifen oder die Belastung sich sprunghaft ändert — erlaubt ist,

1. die Schubspannung aus der Komponentenbedingung für die axiale Richtung und der entsprechenden Randbedingung herzuleiten und dabei für  $\sigma_x$  die zweite Näherung zu verwenden,

2. die zur Axe senkrechte Normalspannung der anderen Komponenten- und Randbedingung zu entnehmen, wobei für  $\tau_{xz}$  die zweite Näherung verwendet werden kann,

3. den Verlauf der axialen Normalspannung kubisch anzunehmen und — unter Beschränkung auf Grössen der Ordnung  $\varepsilon$  — mittels der Forderung seiner Aequivalenz mit dem Biege-

moment und der Zugkraft, sowie der Verträglichkeitsbedingung zu bestimmen,

4. die Krümmung der elastischen Linie — ebenfalls unter Beschränkung auf Grössen der Ordnung  $\varepsilon$  — der Beziehung (6) zu entnehmen.

Mit Hilfe dieser Vorschriften lassen sich die gewonnenen Beziehungen etwas bequemer und gleichzeitig so fassen, dass sie auch dann noch gelten, wenn der Spannungszustand nur noch hinreichend eben ist, d. h. bei Stäben mit nur schwach vom schmalen Rechteck abweichendem Querschnitt und geringem Anzug auch im Grundriss.

Zu diesem Zweck zerlegt man den Querschnitt  $F$  (Bild 4) durch die Gerade  $z = \text{konst.}$  in die Teilflächen

$$(25) \quad F_2(x, z) = \int_{F_2} dF = \int_z^{e_2} b d\zeta \quad \text{und} \quad F_1 = F - F_2,$$

die bezüglich der  $y$ -Axe die statischen Momente

$$(26) \quad S_2(x, z) = \int_{F_2} \zeta dF = \int_z^{e_2} b \zeta d\zeta \quad \text{und} \quad S_1 = -S_2$$

sowie die Trägheitsmomente

$$(27) \quad J_2(x, z) = \int_{F_2} \zeta^2 dF = \int_z^{e_2} b \zeta^2 d\zeta \quad \text{und} \quad J_1 = J - J_2$$

aufweisen. Man hat dann

$$(28) \quad \frac{\partial J_2}{\partial z} = -bz^2, \quad \frac{\partial S_2}{\partial z} = -bz, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = -b$$

und

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial J_2}{\partial z} \right) = -2z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right) = -1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) = 0; \end{cases}$$

ferner lässt sich  $J_2$  in der Form

$$J_2 = - \int_z^{e_2} \zeta dS_2 = - \left[ \zeta S_2 \right]_z^{e_2} + \int_z^{e_2} S_2 d\zeta$$

darstellen, sodass man mit Rücksicht auf das Verschwinden von  $S_2$  an der oberen Grenze

$$(30) \quad \begin{cases} \int_{F_2} \frac{1}{b(\zeta)} S_2(x, \zeta) dF = \\ = \int_z^{e_2} S_2(x, \zeta) d\zeta = J_2 - zS_2 = J - J_1 + zS_1 \end{cases}$$

sowie

$$(31) \quad \begin{cases} \int_{F_2} \frac{1}{b(\zeta)} \frac{\partial}{\partial x} S_2(x, \zeta) dF = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{e_2} S_2(x, \zeta) d\zeta = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (J_2 - zS_2) = \frac{\partial}{\partial x} (J - J_1 + zS_1) \end{cases}$$

erhält.

Nun lautet die erste Komponentenbedingung für die am schraffierten Stabelement (Bild 4) mit der Stirnfläche  $F_2$  angreifenden Kräfte

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx - b \tau_{xz} dx + p_{x0} dx - \gamma \sin \psi F_2 dx = 0,$$

wobei  $X$  die Resultierende der Normaldruckverteilung über  $F_2$  darstellt und im Sinne der ersten Forderung durch

$$X(x, z) = \frac{M}{J} \int_{F_2} z dF + \frac{Z}{F} \int_{F_2} dF = \frac{M(x)}{J(x)} S_2(x, z) + \frac{Z(x)}{F(x)} F_2(x, z)$$

ersetzt werden darf. Man hat also

$$(32a) \quad \tau_{xz} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M}{J} S_2 + \frac{Z}{F} F_2 \right) + \frac{p_{x0}}{b} - \frac{\gamma}{b} \sin \psi F_2$$

und kann hierfür mit Rücksicht auf (10) und (25) auch

$$(32b) \quad \tau_{xz} = - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M}{J} S_1 + \frac{Z}{F} F_1 \right) + \frac{p_{xu}}{b} + \frac{\gamma}{b} \sin \psi F_1$$

schreiben.

Die zweite Komponentenbedingung lautet

$$\frac{\partial Y}{\partial x} dx - b \sigma_z dx - p_{z0} dx - \gamma \cos \psi F_2 dx = 0,$$

wobei  $Y$  die Resultierende der Schubkraftverteilung über  $F_2$  darstellt und im Sinne der zweiten Forderung durch

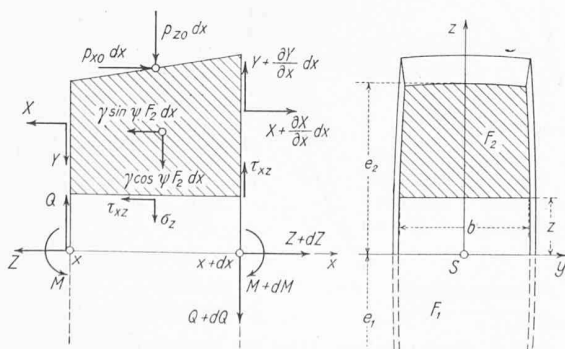


Bild 4

$$Y(x, z) = \int_{F_2} \frac{1}{b(\zeta)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{M(x)}{J(x)} S_2(x, \zeta) \right] dF$$

bzw.

$$Y(x, z) = -\frac{1}{J} \left( Q + \frac{M}{J} \frac{dJ}{dx} \right) \int_{F_2} \frac{1}{b(\zeta)} S_2(x, \zeta) dF + \frac{M}{J} \int_{F_2} \frac{1}{b(\zeta)} \frac{\partial}{\partial x} S_2(x, \zeta) dF$$

ersetzt werden kann. Unter Berücksichtigung von (30) und (31) wird hieraus

$$Y(x, z) = -\frac{1}{J} \left( Q + \frac{M}{J} \frac{dJ}{dx} \right) (J_2 - z S_2) + \frac{M}{J} \frac{\partial}{\partial x} (J_2 - z S_2)$$

oder, wenn noch (11) verwendet und dabei das Glied der Grössenordnung  $\epsilon$  unterdrückt wird,

$$Y(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{M(x)}{J(x)} [J_2(x, z) - z S_2(x, z)] \right\}$$

Man hat also in der beobachteten Näherung

$$(33a) \sigma_z = \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{M}{J} (J_2 - z S_2) \right] - \frac{p_{z0}}{b} - \frac{\gamma}{b} \cos \psi F_2$$

oder nach Umformung mittels (25), (26) und (27)

$$(33b) \sigma_z = -\frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{M}{J} (J_1 - z S_1) \right] - \frac{p_{zu}}{b} + \frac{\gamma}{b} \cos \psi F_1$$

Um schliesslich noch  $\sigma_x$  zu bestimmen, verwendet man die Verträglichkeitsbedingung zweckmässig in der Gestalt <sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \\ = \frac{2(m+1)}{m} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

Man erhält dann in der beobachteten Näherung die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{2(m+1)}{m} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}$$

die mit (8) und (33a) — da im Sinne der dritten Forderung rechterhand für  $\sigma_x$  die erste und für  $\tau_{xz}$  die zweite Näherung eingesetzt werden darf — in

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{1}{m} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) z + \\ + \frac{2(m+1)}{m} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M}{J} S_2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{M}{J} (J_2 - z S_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

übergeht.

Nun zeigt die Ausführung der rechten Seite, dass die Breite  $b$  des Stabes, insofern sie explizit auftritt, in der angestrebten Näherung als konstant betrachtet werden darf, wenn man annimmt, dass ihre Ableitungen nach  $x$  von der Ordnung  $\epsilon^2$  und diejenigen nach  $z$  von der Ordnung  $\epsilon$  sind. Diese Bedingungen können auch dahin formuliert werden, dass der Anzug des Stabgrundrisses klein gegenüber demjenigen des Aufrisses und derjenige des Querschnittes in der  $z$ -Richtung mit dem Anzug des Aufrisses vergleichbar sei; sie liegen schon deshalb nahe, weil sie vermutlich die Voraussetzungen dafür darstellen, dass der Spannungszustand noch in der verlangten Näherung eben sei.

Auf Grund dieser Annahmen wird jetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{1}{m} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) z + \frac{2(m+1)}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{M}{J b} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right] + \\ + \frac{1}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{M}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial J_2}{\partial z} \right) - \frac{2}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

und diese Differentialgleichung, die sich zufolge (28) und (29) auf

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = -2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) z$$

reduziert, stimmt mit der für den Rechteckquerschnitt erhaltenen überein, sodass  $\sigma_x$  auch hier durch die Beziehung (20) gegeben ist.

<sup>3)</sup> Vgl. etwa S. Timoshenko, Theory of Elasticity, New York und London 1934 S. 23.

Die Krümmung der elastischen Linie wird durch Einsetzen der erhaltenen Spannungskomponenten in (6) gewonnen, wobei man sich im Sinne der vierten Forderung bei  $\tau_{xz}$  mit der zweiten Näherung begnügen kann. Man erhält zufolge (8), (20) und (33a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{M}{J} S_2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{E} \left[ \frac{M}{J} + \frac{1}{3} \frac{K}{J} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) \right] - \\ - \frac{1}{mE} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{M}{J} (J_2 - z S_2) \right] - \frac{\gamma}{b} \cos \psi F_2 \right\} \Bigg|_{z=0} \end{aligned}$$

hieraus — da  $b$  wieder als Konstante behandelt werden darf —

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{K}{EJ} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) - \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{M}{J} \frac{S_2}{b} \right) - \\ - \frac{1}{mE} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{M}{J} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial J_2}{\partial z} - \frac{1}{b} S_2 - \frac{z}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{b} \cos \psi \frac{\partial F_2}{\partial z} \right\} \Bigg|_{z=0} \end{aligned}$$

und schliesslich mit Rücksicht auf (23) und (28)

$$(34) \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} + \frac{K}{3EJ} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M}{J} \right) - \frac{2m+1}{mE} \frac{1}{b_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{M}{J} S_{20} \right) - \frac{1}{mE} \gamma \cos \psi,$$

wobei mit  $b_0$  die auf der  $y$ -Achse gemessene Breite des Querschnittes und mit  $S_{20} = -S_{10}$  das statische Moment von  $F$  bezüglich  $y$  ist.

Die Beziehungen (20), (32), (33) und (34), die unter den Voraussetzungen 1 bis 4 (Abschnitt 1) sowie unter Ausschluss von Stellen, wo Einzelkräfte angreifen oder die Belastung sich sprunghaft ändert, den Spannungszustand und die Krümmung der elastischen Linie in dritter Näherung beschreiben, könnten mit Hilfe der Identitäten (10) bis (12) — von denen die mittlere z. T. nur bis auf Grössen der Ordnung 1 genau zu formulieren wäre — weiter ausgeführt werden. Sie gehen bei Beschränkung auf Rechteckquerschnitte wieder in die Formeln (20), (15) (18) und (24) über, und zwar auch dann, wenn ein geringer Anzug im Grundriss zugelassen wird. (Schluss folgt)

### Umbau der Landquartbrücke der Rätischen Bahn in Klosters

DK 624.21.012.4.00467

#### 3. Kriechmessungen

(Forts. von S. 8)

Bei der Betrachtung der Kriechmessungen müssen wir unterscheiden zwischen der Bewegung von Punkten, die sich auf der Brücke, in der Bodenoberfläche und im Innern der Bergsturmasse bzw. der Schächte befinden. Die beiden erstgenannten Verschiebungen werden nachstehend im Zusammenhang diskutiert.

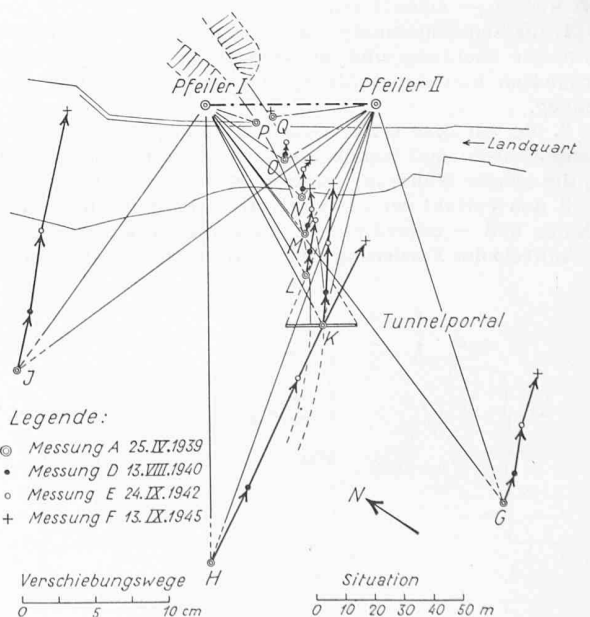


Bild 8. Horizontalprojektion der Verschiebungen (Nach den Plänen der Eidg. Landestopographie)