Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 65 (1947)

Heft: 2

Artikel: Eine Erweiterung der technischen Biegungslehre

Autor: Ziegler, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55812

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nachdruck von Bild oder Text nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Eine Erweiterung der technischen Biegungslehre Von Prof. Dr. HANS ZIEGLER, E. T. H., Zürich

1. Problemstellung. Die vorliegende Arbeit beruht wie eine frühere 1), deren Fortsetzung sie bildet - auf den folgenden Voraussetzungen:

1. Es wird ein gerader, homogener Stab (Bild 1) betrachtet, dessen Querschnitthauptaxen unter sich parallel sind.

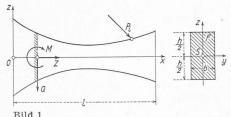
2. Er wird als einigermassen schlank, mithin das Verhältnis ε zwischen den Querschnittabmessungen und der Länge als klein angenommen.

3. Die Lasten sollen durch eine Kräftegruppe in der durch die Stab- und die eine Querschnitthauptaxe aufgespannten Ebene dargestellt werden können und nicht zu schwach gegen die Stabaxe geneigt sein, sodass die Schnitte auf Zug, Schub und Biegung um die andere Querschnitthauptaxe beansprucht

4. Der Spannungszustand wird als hinreichend eben vorausgesetzt, und dies bedeutet die Beschränkung auf Querschnitte, die nur wenig vom schmalen Rechteck mit konstanter Breite und gleichmässig darüber verteilter Belastung abweichen und deren Höhe als schwach veränderlich zugelassen

Der Spannungszustand in einem solchen Stab kann die Umgebungen von Einzelkraftangriffspunkten ausgenom-- näherungsweise dadurch ermittelt werden, dass

der Untersuchung eines - keine solchen Stellen enthaltenden - Stababschnittes die elastischen Grundgleichungen und die Randbedingungen längs der Mantelfläche zu Grunde gelegt, in den be-



grenzenden Schnitten die Aequivalenz der inneren Kräfte mit der Beanspruchung ausgedrückt und die so erhaltenen Beziehungen unter Beschränkung auf Glieder einer bestimmten Grössenordnung gelöst werden. Diese lauten im Falle des exakt ebenen Spannungszustandes2)

(1)
$$\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \gamma \sin \psi, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} = \gamma \cos \psi,$$
(2)
$$\frac{\partial^{2} \sigma_{x}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \sigma_{z}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \sigma_{x}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial^{2} \sigma_{z}}{\partial z^{2}} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial z} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial z} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{x}}{\partial z} = 0,$$

(2)
$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0,$$

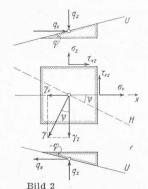
(3)
$$\begin{cases} \sigma_x \sin \varphi - \tau_{xz} \cos \varphi + q_x = 0, \\ 0 & 1 \\ \tau_{xz} \sin \varphi - \sigma_z \cos \varphi - q_z = 0, \\ 1 & 1 \end{cases}$$
(4)
$$\int_F \sigma_x z \, dF = M, \int_T \sigma_x \, dF = Z, \int_F \tau_{xz} \, dF = -Q, \int_T \tau_{xz} \, dF = Q, \int_T \tau_{xz} \, dF = Q$$

(4)
$$\int\limits_F \sigma_x z \, dF = M, \int\limits_F \sigma_x dF = Z, \int\limits_F \tau_{xz} dF = Q,$$

(5)
$$\begin{cases} a_x(x, z) = a_0(x) + a_1(x)z + a_2(x)z^2 + a_3(x)z^3 + \\ 0 & -1 & 1 \\ + a_4(x)z^4 + \dots, \end{cases}$$

 au_{xz} und au_z die drei Spannungskomponenten, γ das spezifische Gewicht, ψ (Bild 2) die Neigung der Stabaxe gegen die Horizontale, $\varphi \propto \varepsilon$ bzw. $-\varphi$ die kleinen Neigungswinkel des Umrisses gegenüber der Stabaxe,

 q_x und q_z die Spannungen an der Oberfläche, M, Z und Q die drei Komponenten der Beanspruchung und die Grössen $a_k(x)$ noch freie Funktionen; ferner geben die beigefügten Zeiger an, von welcher Ordnung klein die betreffenden dimensionslos gedachten - Glieder sind. Die Deformation des Stabes wird alsdann in grossen



¹⁾ H. Ziegler, Zur Kritik der technischen Biegungslehre, SBZ Bd.128, S.187* (12. Oktober 1946).

Zügen durch seine elastische Linie beschrieben, welche die

(6)
$$\begin{cases} \frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} (x, 0) + \frac{1}{E} \left[\frac{\partial \sigma_{x}}{\partial z} (x, 0) - \frac{1}{G} \left[\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} (x, 0) - \frac{1}{G} \left[\frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} (x, 0) \right] \right] \end{cases}$$

In der zitierten Arbeit wurden die Beziehungen (1) bis (6) in erster und zweiter Näherung, d. h. unter Beschränkung auf Glieder der Grössenordnungen 1/ɛ und 1, gelöst. Dabei stellte sich heraus, dass der Spannungszustand und die Krümmung der elastischen Linie in zweiter Näherung durch die Gleichungen

(7)
$$\begin{cases} \sigma_{x} = \frac{12M}{bh^{3}}z + \frac{Z}{bh}, \\ \tau_{xz} = -\frac{3}{2bh} \left[\left(1 - 4\frac{z^{2}}{h^{2}} \right)Q + 2\left(1 - 12\frac{z^{2}}{h^{2}} \right)\frac{\varphi}{h}M \right], \\ \sigma_{z} = 0, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{12M}{Ebh^{3}} \end{cases}$$

(8)
$$\begin{cases} \sigma_{x} = \frac{M}{J}z + \frac{Z}{F}, \\ \tau_{xz} = \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M}{J}S_{2}\right) = -\frac{Q}{b}\frac{S_{2}}{J} + \frac{M}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_{2}}{J}\right), \\ \sigma_{z} = 0, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} \end{cases}$$

angeschrieben werden können und in dieser Gestalt auch für nichtrechteckige Querschnitte mit schwach veränderlicher Breite gültig bleiben, insofern noch mit einem einigermassen ebenen Spannungszustand gerechnet werden kann.

Im folgenden werden die Beziehungen (1) bis (6) in dritter Näherung, d. h. unter Berücksichtigung der mit & vergleichbaren Glieder, gelöst. Damit wird eine Verfeinerung der elementaren Beziehungen (7) bzw. (8) gewonnen, die vor allem im Hinblick auf Balken mit geringerem Schlankheitsgrad und stärkerem Anzug im Aufriss wünschbar ist. Bei der Anwendung der Ergebnisse ist allerdings darauf zu achten, dass diese

a) einem weiteren Näherungsschritt entsprechen und daher in höherem Masse von der Voraussetzung 4 Gebrauch machen,

b) so wenig wie die elementaren Beziehungen auf die Umgebungen von Einzelkraft-Angriffspunkten angewandt werden dürfen.

2. Dritte Näherung. Im Sinne einer dritten Näherung sind in den Beziehungen (1) bis (6), deren Gültigkeit auf den

Bild 3

schmalen Rechteckquerschnitt mit konstanter Breite beschränkt ist, auch die von erster Ordnung kleinen, mit dem Zeiger 1 versehenen Glieder, also insbesondere die beiden Komponenten des Eigengewichtes sowie die Spannungen an der Oberfläche zu berücksichtigen, die mittels

 $p_x \equiv b \, q_x, \quad p_z \equiv b \, q_z$ (9)auf die Belastung p_x , p_z je Längeneinheit zurückgeführt werden und je nach dem Rand, an dem sie angreifen, mit dem Zeiger o bzw. u versehen werden sollen. Für ihren Zusammenhang mit den Komponenten der Beanspruchung

liefert das Gleichgewicht des in Bild 3 wiedergegebenen Stabelementes die Beziehungen

(10)
$$\begin{cases} \frac{dZ}{dx} = -p_{xo} + p_{xu} + \gamma F \sin \psi, \\ \frac{dQ}{dx} = -p_{zo} + p_{zu} - \gamma F \cos \psi, \end{cases}$$

(11)
$$\frac{dM}{dx} = -Q - \frac{h}{2} (p_{xo} + p_{xu}),$$

²⁾ H. Ziegler, a. a. O.

die als Verallgemeinerungen der von der reinen Biegung her bekannten Identitäten $dQ/dx = -p_z$ und $d\dot{M}/dx = -Q$ aufzufassen sind. Ferner folgt aus (11) in der hier beobachteten

(12)
$$\frac{d^2 M}{d x^2} = -\frac{d Q}{d x} = p_{zo} - p_{zu} + \gamma F \cos \psi$$
.

Die Vernachlässigung der mit $p_{x\,o}$, $p_{x\,u}$ behafteten Glieder geschieht dabei mit Rücksicht auf die — schon den Abschätzungen in (1) bis (6) zu Grunde gelegte — Annahme, dass sämtliche Spannungskomponenten bei der Ableitung nach x von nächsthöherer Ordnung klein werden; damit ist allerdings in Kauf zu nehmen, dass Stellen mit sprunghaft ändernder Belastung in dieser Näherung nicht mehr genügend genau erfasst werden.

Für die Ermittlung der Schubspannung $\tau_{x\,z}$ geht man von den ersten Beziehungen (1) und (3) aus, wobei σ_x nur bis auf Glieder der Grössenordnung 1 genau einzusetzen ist und daher durch die rechte Seite der ersten Gleichung (8) ersetzt werden kann. Man erhält so die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathit{M}}{\mathit{J}} z + \frac{\mathit{Z}}{\mathit{F}} \right) + \gamma \sin \psi$$
 mit dem allgemeinen Integral

$$\tau_{xz} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{M}{J}\right) \frac{z^2}{2} - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{Z}{F}\right) - \gamma \sin \psi\right] z + f(x)$$

sowie nach Ersatz von $\sin \varphi$ durch φ und $\cos \varphi$ durch 1 die beiden Randbedingungen

$$\begin{split} &-\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\mathit{M}}{\mathit{J}}\right)\frac{h^{2}}{8}-\left[\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\mathit{Z}}{\mathit{F}}\right)-\gamma\sin\psi\right]\frac{h}{2}+\mathit{f}=\\ &=\left(\frac{\mathit{M}}{\mathit{J}}\cdot\frac{h}{2}+\frac{\mathit{Z}}{\mathit{F}}\right)\varphi+\mathit{q}_{xo}\,,\\ &-\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\mathit{M}}{\mathit{J}}\right)\frac{h^{2}}{8}+\left[\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\mathit{Z}}{\mathit{F}}\right)-\gamma\sin\psi\right]\frac{h}{2}+\mathit{f}=\\ &=\left(\frac{\mathit{M}}{\mathit{J}}\cdot\frac{h}{2}-\frac{\mathit{Z}}{\mathit{F}}\right)\varphi+\mathit{q}_{xu}\,. \end{split}$$
 Die Subtraktion dieser Gleichungen führt auf

(13)
$$-\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{Z}{F}\right) - \gamma \sin \psi\right] \frac{h}{2} = \frac{Z}{F} \varphi + \frac{1}{2} (q_{xo} - q_{xu})$$

und nach der Auswertung für den Rechteckquerschnitt mit konstantem b auf die erste Komponentenbedingung (10); ihre

$$f = \frac{d}{d\,x} \left(\frac{M}{J}\right) \frac{h^2}{8} + \frac{M}{J} \frac{h}{2} \, \varphi + \frac{1}{2} \left(q_{x\,o} + q_{x\,u}\right)$$
 und damit die Schubspannung

(14)
$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{J} \right) + \frac{h}{2} \frac{M}{J} \varphi - \\ - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{Z}{F} \right) - \gamma \sin \psi \right] z + \frac{1}{2} (q_{xo} + q_{xu}), \end{cases}$$

$$au_{x\,z} = rac{1}{2} \left(rac{h^2}{4} - z^2
ight) rac{d}{d\,x} \left(rac{M}{J}
ight) + rac{h}{2} rac{M}{J} arphi + rac{2\,z}{h} rac{Z}{F} arphi + rac{1}{2\,b} \left(1 + rac{2\,z}{h}
ight) p_{x\,o} + rac{1}{2\,b} \left(1 - rac{2\,z}{h}
ight) p_{x\,u}$$

und — unter Verwendung der Momentenbedingung (11) vollends ausgewertet - mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xz} = -\,\frac{3}{2\,b\,h} \Big[\Big(1 - 4\,\frac{z^2}{h^2} \Big) Q + 2 \Big(1 - 12\frac{z^2}{h^2} \Big) \frac{\varphi}{h} M \Big] + \\ + \,\frac{2\,\varphi}{b\,h}\,\frac{z}{h}\,Z - \frac{1}{4\,b} \Big(1 + 2\,\frac{z}{h} \Big) \Big(1 - 6\,\frac{z}{h} \Big) \,p_{x\,o} - \\ - \,\frac{1}{4\,b} \Big(1 - 2\,\frac{z}{h} \Big) \Big(1 + 6\,\frac{z}{h} \Big) \,p_{x\,u} \end{array} \right.$$

angeschrieben werden kann sowie der dritten Forderung (4)

Analog gewinnt man aus den zweiten Beziehungen (1) und (3) in der beobachteten Näherung für die zur Stabaxe senkrechte Normalspannung σ_z die Differentialgleichung

Normalispanning
$$\sigma_z$$
 die Differentialgleichung $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{J} \right) + \frac{h}{2} \frac{M}{J} \varphi \right] + \gamma \cos \psi$

mit dem allgemeinen Integral

$$\sigma_z = -\frac{d^2}{d \, x^2} \left(\frac{M}{J} \right) \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{6} \right) z - \left[\frac{d}{d \, x} \left(\frac{M}{J} \right) h \, \varphi + \frac{M}{J} \left(\varphi^2 + \frac{h}{2} \, \frac{d \, \varphi}{d \, x} \right) - \gamma \cos \psi \right] z + g \left(x \right)$$

und den beiden Randbedingungen

$$\begin{split} &-\frac{d^2}{d\,x^2}\left(\frac{M}{J}\right)\frac{h^3}{24} - \\ &-\left[\frac{d}{d\,x}\left(\frac{M}{J}\right)h\,\varphi + \frac{M}{J}\left(\varphi^2 + \frac{h}{2}\,\frac{d\,\varphi}{d\,x}\right) - \gamma\cos\psi\right]\frac{h}{2} + \\ &+ g = \frac{M}{J}\,\frac{h}{2}\,\varphi^2 - q_{z\,o}, \\ &\frac{d^2}{d\,x^2}\left(\frac{M}{J}\right)\frac{h^3}{24} + \\ &+\left[\frac{d}{d\,x}\left(\frac{M}{J}\right)h\,\varphi + \frac{M}{J}\left(\varphi^2 + \frac{h}{2}\,\frac{d\,\varphi}{d\,x}\right) - \gamma\cos\psi\right]\frac{h}{2} + \\ &+ g = -\frac{M}{J}\,\frac{h}{2}\,\varphi^2 - q_{z\,u}. \end{split}$$

Ihre Subtraktion ergibt

(16)
$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{J}\right) \frac{h^3}{24} - \\ -\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{M}{J}\right) h \varphi + \frac{M}{J} \left(\varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx}\right) - \gamma \cos \psi\right] \frac{h}{2} = \\ = \frac{M}{J} \frac{h}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} (q_{zo} - q_{zu}) \end{cases}$$
und führt auf die Ableitung (12) der Momentenbedingung

und führt auf die Ableitung (12) der Momentenbedingung für das Stabelement; ihre Addition liefert

$$g = -\frac{1}{2} (q_{zo} + q_{zu})$$

und damit die Normalspannung

(17)
$$\begin{cases} \sigma_z = -\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) z \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{J} \right) - \\ -\left[h \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{J} \right) \varphi + \frac{M}{J} \left(\varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d \varphi}{dx} \right) - \gamma \cos \psi \right] z - \\ -\frac{1}{2} \left(q_{zo} + q_{zu} \right), \end{cases}$$

die zufolge (9) und (16) auch in der Form

$$egin{aligned} \sigma_z = & -rac{1}{6} \Big(rac{h^2}{4} - z^2\Big) z rac{d^2}{d\,x^2} \Big(rac{M}{J}\Big) + z rac{M}{J} \,arphi^2 - \ & -rac{1}{2\,b} \left(1 + 2\,rac{z}{h}
ight) p_{z\,\,o} - rac{1}{2\,b} \left(1 - 2\,rac{z}{h}
ight) p_{z\,\,u} \end{aligned}$$

und — unter Verwendung der Momentenbedingung (11) sowie ihrer Ableitung (12) bei Beschränkung auf Grössen der Ordnung ε vollends ausgewertet — mit

$$\begin{cases}
\sigma_{z} = \frac{3}{b h} \frac{z}{h} \left[\left(1 - 4 \frac{z^{2}}{h^{2}} \right) \frac{d \varphi}{d x} - 4 \left(1 - 8 \frac{z^{2}}{h^{2}} \right) \frac{\varphi^{2}}{h} \right] M - \\
- \frac{1}{2 b} \left(1 - 4 \frac{z^{2}}{h^{2}} \right) \frac{z}{h} \left(12 \frac{\varphi}{h} Q + b h \gamma \cos \psi \right) - \\
- \frac{1}{2 b} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \left(1 + 2 \frac{z}{h} \right)^{2} p_{z o} - \\
- \frac{1}{2 b} \left(1 + \frac{z}{h} \right) \left(1 - 2 \frac{z}{h} \right)^{2} p_{z u}
\end{cases}$$

angeschrieben werden kann.

Schliesslich stehen zur Ermittlung der axialen Normalspannung

$$\sigma_x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

noch die Verträglichkeitsbedingung (2), sowie die beiden ersten Forderungen (4) zur Verfügung. Die erstgenannte kann unter Verwendung von (17) in der beobachteten Näherung mit

$$rac{\partial^2 \, \sigma_x}{\partial \, z^2} = 2 \, a_2 \, + \, 6 \, a_3 \, z = - \, 2 \, rac{d^2}{d \, x^2} \left(rac{M}{J}
ight) z$$

angeschrieben werden, sodass man zunächst die Beiwerte $a_2=0$, $a^3=-\frac{1}{3}\frac{d^2}{d\,x^2}\left(\frac{M}{J}\right)$

$$a_2 \equiv 0$$
 , $a^3 \equiv -\frac{1}{3} \frac{d^2}{d x^2} \left(\frac{M}{J} \right)$

$$\sigma_x = a_0 + a_1 z - rac{1}{3} rac{d^2}{d \, x^2} \Big(rac{M}{J}\Big) \, z^3$$

erhält; die letztgenannten führen alsdann mit der Abkürzung

(19)
$$K = \int_{F} z^4 dF = \frac{b h^5}{80}$$

$$a_{\scriptscriptstyle 1} J = \frac{d^{\scriptscriptstyle 2}}{d\,x^{\scriptscriptstyle 2}} \left(\frac{\it M}{\it J}\right) \frac{\it K}{\it 3} = \it M \,, \quad a_{\scriptscriptstyle 0} \, F = \it Z \,$$

und liefern mit den weiteren Beiwerten

$$a_{\scriptscriptstyle 0} = rac{Z}{F}$$
 , $a_{\scriptscriptstyle 1} = rac{M}{J} + rac{1}{3} rac{K}{J} rac{d^2}{d\,x^2} \Big(rac{M}{J}\Big)$

$$(20) \quad \sigma_x = \left\lceil \frac{M}{J} + \frac{1}{3} \left(\frac{K}{J} - z^2 \right) \frac{d^2}{d \, x^2} \left(\frac{M}{J} \right) \right\rceil z \, + \, \frac{Z}{F} \, ,$$

die — unter Verwendung von (11) und (12) bei Beschränkung auf Grössen der Ordnung ε vollends ausgewertet — auch mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x} = \frac{12}{b\,h^{2}} \left[1 + \frac{3}{5} \left(1 - \frac{20}{3} \frac{z^{2}}{h^{2}} \right) \left(4\,\varphi^{2} - \frac{h}{2} \frac{d\,\varphi}{d\,x} \right) \right] \frac{z}{h} M + \\ + \frac{1}{b\,h} Z + \\ + \frac{3}{5} \left(1 - \frac{20}{3} \frac{z^{2}}{h^{2}} \right) \frac{z}{h} \left[\frac{12\,\varphi}{b\,h} Q + \frac{1}{b} \left(p_{z\,o} - p_{z\,u} \right) + h\gamma\cos\psi \right] \end{array} \right.$$

Für die Krümmung der elastischen Linie erhält man durch Einsetzen von (14), (17) und (20) in (6) in der beobachteten Näherung

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{K}{EJ} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{J}\right) + \left(\frac{1}{mE} - \frac{1}{G}\right) \cdot \\ \cdot \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{J}\right) \frac{h^2}{8} + \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{J}\right) h \varphi + \frac{M}{J} \left(\varphi^2 + \frac{h}{2} \frac{d\varphi}{dx}\right) \right] - \\ - \frac{1}{mE} \gamma \cos \psi \,, \end{array} \right.$$

unter Verwendung von (9), (16) sowie der Identität

(23)
$$G = \frac{m E}{2 (m + 1)}$$

auch

$$\begin{split} &\frac{1}{\varrho} = \left(1 + \frac{2\,m+1}{m}\,\varphi^2\right) \frac{M}{E\,J} \,+ \\ &+ \frac{1}{E} \left(\frac{1}{3}\,\frac{K}{J} - \frac{2\,m+1}{m}\,\frac{h^2}{24}\right) \frac{d^2}{d\,x^2} \left(\frac{M}{J}\right) - \\ &- \frac{2\,m+1}{m\,E}\,\frac{p_{z\,o} - p_{z\,u}}{F} - \frac{2\,(m+1)}{m\,E}\,\gamma\cos\psi\,, \end{split}$$

und hierfür kann man nach völliger Auswertung unter Berücksichtigung von (11) und (12) schliesslich

(24)
$$\begin{cases} \frac{1}{\varrho} = \left[1 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{m}\right)\varphi^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2m}\right)\frac{h}{2}\frac{d\varphi}{dx}\right]\frac{12M}{Ebh^3} - \\ -\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2m}\right)\frac{12\varphi Q}{Ebh^2} - \\ -\left(\frac{12}{5} + \frac{3}{2m}\right)\frac{p_{zo} - p_{zu}}{Ebh} - \left(\frac{12}{5} + \frac{5}{2m}\right)\frac{\gamma}{E}\cos\psi \end{cases}$$

3. Verallgemeinerung. Die Ergebnisse des letzten Abschnittes lassen sich dahin interpretieren, dass es — im Sinne einer dritten Näherung und unter Ausschluss von Stellen, wo Einzelkräfte angreifen oder die Belastung sich sprunghaft ändert - erlaubt ist,

1. die Schubspannung aus der Komponentenbedingung für die axiale Richtung und der entsprechenden Randbedingung herzuleiten und dabei für σ_x die zweite Näherung zu verwenden,

2. die zur Axe senkrechte Normalspannung der anderen Komponenten- und Randbedingung zu entnehmen, wobei für die zweite Näherung verwendet werden kann,

3. den Verlauf der axialen Normalspannung kubisch anzunehmen und - unter Beschränkung auf Grössen der Ordnung ε - mittels der Forderung seiner Aequivalenz mit dem Biege-

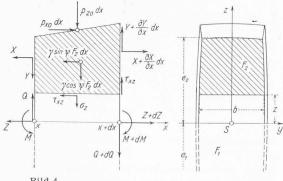


Bild 4

moment und der Zugkraft, sowie der Verträglichkeitsbedingung zu bestimmen,

4. die Krümmung der elastischen Linie - ebenfalls unter Beschränkung auf Grössen der Ordnung ε — der Beziehung (6) zu entnehmen.

Mit Hilfe dieser Vorschriften lassen sich die gewonnenen Beziehungen etwas bequemer und gleichzeitig so fassen, dass sie auch dann noch gelten, wenn der Spannungszustand nur noch hinreichend eben ist, d. h. bei Stäben mit nur schwach vom schmalen Rechteck abweichendem Querschnitt und geringem Anzug auch im Grundriss.

Zu diesem Zweck zerlegt man den Querschnitt F (Bild 4) durch die Gerade z = konst. in die Teilflächen

(25)
$$F_{2}(x, z) = \int_{F_{2}} dF = \int_{z}^{e_{2}} b d\zeta$$
 und $F_{1} = F - F_{2}$,

(27)
$$J_2(x, z) = \int_{F_2} \zeta^2 dF = \int_z^{e_2} b \, \zeta^2 d\zeta \text{ und } J_1 = J - J_2$$

(28)
$$\frac{\partial J_2}{\partial z} = -bz^2$$
, $\frac{\partial S_2}{\partial z} = -bz$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = -b$

(29)
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial J_2}{\partial z} \right) = -2z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right) = -1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) = 0; \end{cases}$$

$$J_2 = -\int\limits_z^{e_2} \!\!\!\! \zeta \, d\, S_2 = - \left[\zeta \, S_2
ight]_z^{e_2} + \int\limits_z^{e_2} \!\!\!\! S_2 \, d\, \zeta$$

darstellen, sodass man mit Rücksicht auf das Verschwinden von S_9 an der oberen Grenze

$$\begin{cases} \int \frac{1}{b(\zeta)} S_2(x, \zeta) dF = \\ \int_{\mathbb{R}_2}^{e_2} = \int_{\mathbb{R}_2}^{e_2} S_2(x, \zeta) d\zeta = J_2 - zS_2 = J - J_1 + zS_1 \end{cases}$$

(31)
$$\begin{cases} \int \frac{1}{b(\zeta)} \frac{\partial}{\partial x} S_2(x, \zeta) dF = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{e_2} S_2(x, \zeta) d\zeta = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (J_2 - zS_2) = \frac{\partial}{\partial x} (J - J_1 + zS_1) \end{cases}$$

Nun lautet die erste Komponentenbedingung für die am schraffierten Stabelement (Bild 4) mit der Stirnfläche F, an-

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx = b \tau_{xz} dx + p_{xo} dx = \gamma \sin \psi F_2 dx = 0,$$

wobei X die Resultierende der Normaldruckverteilung über \boldsymbol{F}_{2} darstellt und im Sinne der ersten Forderung durch

$$egin{align} X\left(x\,,z
ight) &\equiv rac{M}{J}\!\!\int\!\!z\,d\,F + rac{Z}{F}\!\!\int\!\!d\,F = \ &= rac{M\left(x
ight)}{J\left(x
ight)}\,S_{2}\left(x\,,z
ight) + rac{Z\left(x
ight)}{F\left(x
ight)}\,F_{2}\left(x\,,z
ight) \end{array}$$

$$(32 \mathrm{a}) \; \tau_{xz} = \frac{1}{b} \; \frac{\partial}{\partial \, x} \left(\frac{M}{J} \, S_2 \, + \, \frac{Z}{F} \, F_2 \right) \, + \, \frac{p_{x\,\mathrm{o}}}{b} \, - \, \frac{\gamma}{b} \sin \, \psi \, F_2$$

und kann hierfür mit Rücksicht auf (10) und (25) auch

$$(32 \, \mathrm{b}) \; \tau_{xz} = - \; \frac{1}{b} \; \frac{\partial}{\partial \, x} \left(\frac{M}{J} \, S_1 \, + \, \frac{Z}{F} \, F_1 \right) \, + \, \frac{p_{x\,u}}{b} \, + \, \frac{\gamma}{b} \, \sin \, \psi \, F_1$$
 schreiben.

Die zweite Komponentenbedingung lautet

$$rac{\partial Y}{\partial x} dx = b \sigma_z dx = p_{zo} dx = \gamma \cos \psi F_2 dx \equiv 0$$
,

wobei Y die Resultierende der Schubkraftverteilung über F_2 darstellt und im Sinne der zweiten Forderung durch

$$Y\left(x,z
ight) = \int\limits_{F_{2}} rac{1}{b\left(\zeta
ight)} rac{\partial}{\partial x} \left[rac{M\left(x
ight)}{J\left(x
ight)} S_{2}(x,\zeta)
ight] dF$$

$$\begin{split} Y\left(x\,,\,z\right) &= -\,\frac{1}{J}\bigg(Q\,+\,\frac{\mathit{M}}{J}\,\frac{d\,J}{d\,x}\bigg)\!\!\int\!\frac{1}{b\,\left(\zeta\right)}\,S_{2}\left(x\,,\,\zeta\right)\,d\,F\,\,+\\ &+\,\frac{\mathit{M}}{J}\!\!\int\!\frac{1}{b\,\left(\zeta\right)}\,\frac{\partial}{\partial\,x}\,S_{2}\left(x\,,\,\zeta\right)\,d\,F \end{split}$$

ersetzt werden kann. Unter Berücksichtigung von (30) und (31) wird hieraus

$$egin{align} Y\left(x,z
ight) &= -rac{1}{J}\left(Q \ + rac{M}{J}rac{dJ}{dx}
ight)\left(J_{2}-z\,S_{2}
ight) \ + rac{M}{J}rac{\partial}{\partial\,x}\left(J_{2}-z\,S_{2}
ight) \end{aligned}$$

oder, wenn noch (11) verwendet und dabei das Glied der Grössenordnung ε unterdrückt wird,

$$Y\left(x,\,z\right)=\frac{\partial}{\partial\,x}\left\{\,\frac{M\left(x\right)}{J\left(x\right)}\left[J_{_{2}}(x,z)\,-\,z\,S_{_{2}}(x,z)\,\right]\,\right\}.$$
 Man hat also in der beobachteten Näherung

(33a)
$$\sigma_z = \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{M}{J} (J_2 - z S_2) \right] - \frac{p_{z | o}}{b} - \frac{\gamma}{b} \cos \psi F_2$$

oder nach Umformung mittels (25), (26) und (27)
$$(33 \text{ b}) \ \sigma_z = -\frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{M}{J} (J_1 - z S_1) \right] - \frac{p_{zu}}{b} + \frac{\gamma}{b} \cos \psi F_1.$$

Um schliesslich noch σ_x zu bestimmen, verwendet man die Verträglichkeitsbedingung zweckmässig in der Gestalt 3)

erträglichkeitsbedingung zweckmässig in der
$$0$$

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{1}{m}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{2(m+1)}{m}\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x \partial z}.$$

Man erhält dann in der beobachteten Näherung die Differential-

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{2(m+1)}{m} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2},$$

die mit (8) und (33a) — da im Sinne der dritten Forderung rechterhand für σ_x die erste und für τ_{xz} die zweite Näherung eingesetzt werden darf - in

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \, \sigma_x}{\partial \, z^2} = \frac{1}{m} \, \frac{d^2}{d \, x^2} \left(\frac{M}{J} \right) z \, + \\ + \, \frac{2 \, (m+1)}{m} \, \frac{\partial^2}{\partial \, x \partial \, z} \left[\frac{1}{b} \, \frac{\partial}{\partial \, x} \left(\frac{M}{J} \, S_2 \right) \right] + \\ + \, \frac{1}{m} \, \frac{\partial^2}{\partial \, z^2} \, \left\{ \, \frac{1}{b} \, \frac{\partial^2}{\partial \, x^2} \left[\, \frac{M}{J} \, (J_2 - z \, S_2) \, \right] \, \right\} \end{array}$$

übergeht.

Nun zeigt die Ausführung der rechten Seite, dass die Breite b des Stabes, insofern sie explizit auftritt, in der angestrebten Näherung als konstant betrachtet werden darf, wenn man annimmt, dass ihre Ableitungen nach x von der Ordnung ε^2 und diejenigen nach z von der Ordnung ε sind. Diese Bedingungen können auch dahin formuliert werden, dass der Anzug des Stabgrundrisses klein gegenüber demjenigen des Aufrisses und derjenige des Querschnittes in der z-Richtung mit dem Anzug des Aufrisses vergleichbar sei; sie liegen schon deshalb nahe, weil sie vermutlich die Voraussetzungen dafür darstellen, dass der Spannungszustand noch in der verlangten Näherung eben sei.

Auf Grund dieser Annahmen wird jetzt
$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} = \frac{1}{m} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{J} \right) z + \frac{2(m+1)}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{M}{J} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right] + \frac{1}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{M}{J} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial J_2}{\partial z} \right) - \frac{2}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right) \right] \right\},$$
 und diese Differentialgleichung, die sich zufolge (28) und

$$rac{\partial^2\, {\mathsf G}_x}{\partial\, z^2} = -\, 2\, rac{d^2}{d\, x^2} \left(rac{M}{J}
ight) z$$

reduziert, stimmt mit der für den Rechteckquerschnitt erhaltenen überein, sodass σ_x auch hier durch die Beziehung (20)

Die Krümmung der elastischen Linie wird durch Einsetzen der erhaltenen Spannungskomponenten in (6) gewonnen, wobei man sich im Sinne der vierten Forderung bei au_{xz} mit der zweiten Näherung begnügen kann. Man erhält zu-

mit der zweiten Naherung begnugen Rahn. Man ernalt zufolge (8), (20) und (33a)
$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{J} S_2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{E} \left[-\frac{M}{J} + \frac{1}{3} \frac{K}{J} \frac{d^2}{d \cdot x^2} \left(\frac{M}{J} \right) \right] - \\ - \frac{1}{mE} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{M}{J} (J_2 - z S_2) \right] - \frac{\gamma}{b} \cos \psi F_2 \right\} \right],$$

hieraus — da b wieder als Konstante behandelt werden darf — $\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{K}{EJ} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{J}\right) - \frac{1}{G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{M}{J} \frac{S_2}{b}\right) - \frac{1}{mE} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{M}{J} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial J_2}{\partial z} - \frac{1}{b} S_2 - \frac{z}{b} \frac{\partial S_2}{\partial z} \right) \right] -$

$$-\frac{1}{mE} \left\{ \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \left[\frac{M}{J} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial J_{2}}{\partial z} - \frac{1}{b} S_{2} - \frac{z}{b} \frac{\partial S_{2}}{\partial z} \right) \right] - \frac{\gamma}{b} \cos \psi \frac{\partial F_{2}}{\partial z} \right\}_{z=0}$$

und schliesslich mit Rücksicht auf (23) und (28)
(34)
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_{\parallel}}{EJ} + \frac{K}{3EJ} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{J}\right) - \frac{2m+1}{\lfloor mE \rfloor} \frac{1}{b_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{M}{J}S_{20}\right) - \frac{1}{mE} \gamma \cos \psi,$$

wobei mit bo die auf der y-Axe gemessene Breite des Querschnittes und mit $S_{20} = - S_{10}$ das statische Moment der durch die y-Axe begrenzten Teilfläche von F bezüglich y ist.

Die Beziehungen (20), (32), (33) und (34), die unter den Voraussetzungen 1 bis 4 (Abschnitt 1) sowie unter Ausschluss von Stellen, wo Einzelkräfte angreifen oder die Belastung sich sprunghaft ändert, den Spannungszustand und die Krümmung der elastischen Linie in dritter Näherung beschreiben, könnten mit Hilfe der Identitäten (10) bis (12) - von denen die mittlere z. T. nur bis auf Grössen der Ordnung 1 genau zu formulieren wäre - weiter ausgeführt werden. Sie gehen bei Beschränkung auf Rechteckquerschnitte wieder in die Formeln (20), (15) (18) und (24) über, und zwar auch dann, wenn ein geringer Anzug im Grundriss zugelassen wird.

(Schluss folgt)

Umbau der Landquartbrücke der DK 624.21.012.4.00467 Rhätischen Bahn in Klosters

3. Kriechmessungen

(Forts. von S. 8)

Bei der Betrachtung der Kriechmessungen müssen wir unterscheiden zwischen der Bewegung von Punkten, die sich auf der Brücke, in der Bodenoberfläche und im Innern der Bergsturzmasse bzw. der Schächte befinden. Die beiden erstgenannten Verschiebungen werden nachstehend im Zusammenhang diskutiert.

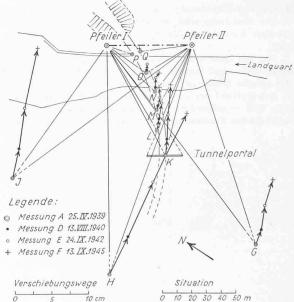


Bild 8. Horizontalprojektion der Verschiebungen (Nach den Plänen der Eidg. Landestopographie)

³⁾ Vgl. etwa S. Timoshenko, Theory of Elasticity, New York und London 1934 S. 23.