Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 127/128 (1946)
Heft: 15

Artikel: Zur Kritik der technischen Biegungslehre
Autor: Ziegler, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83916

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Band 128 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 15

Zur Kritik der technischen Biegungslehre

Von Prof. Dr. HANS ZIEGLER, E. T. H., Zürich

1. Problemstellung. Die technische Festigkeitslehre geht bei der Bestimmung des Spannungszustandes im Stab von willkürlichen und in Wirklichkeit unzutreffenden Annahmen aus. Sie bedient sich beispielsweise im Falle der Biegung bei der Ermittlung der Normalspannungen der Bernoullischen Hypothese[1]) und legt das Resultat, obschon die verwendete Annahme mit dem Auftreten von Schubspannungen unverträglich ist, auch der Bestimmung dieser letztgenannten zugrunde. Ihre Ergebnisse erscheinen zunächst nur dadurch gerechtfertigt, dass sie der Erfahrung im allgemeinen hinreichend entsprechen. Sie werden allerdings in besondern Fällen durch die Elastizitätstheorie bestätigt[2]); zudem hat *J. N. Goodier*[3]) gezeigt, dass bei einfach beanspruchten zylindrischen Stäben die in der technischen Festigkeitslehre üblichen Methoden als Näherungsverfahren im Sinne der Elastizitätstheorie gelten können. Es bleibt indessen die Frage nach ihrer Uebertragbarkeit bzw. Erweiterung auf verwickeltere Fälle, insbesondere auf Stäbe mit veränderlichem Querschnitt, offen. Diese Frage bildet den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung, die auf folgenden Voraussetzungen beruht:

1. Es wird ein gerader, homogener Stab (Bild 1) betrachtet, dessen Querschnittshauptaxen unter sich parallel sind und die Richtungen y, z haben.

2. Der Stab soll schlank, mithin das Verhältnis

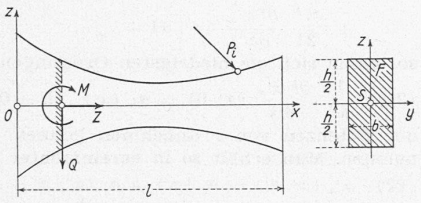

Bild 1.

$$(1) \qquad \frac{B}{L} = \varepsilon$$

zweier Strecken, von denen die erste mit den Querschnittsabmessungen, die zweite mit der Stablänge vergleichbar ist, klein sein.

3. Die Lasten sollen eine Kräftegruppe in der (x, z)-Ebene bilden und nicht allzu schwach gegen die Stabaxe geneigt sein, so dass die Schnitte auf Zug, Schub und Biegung um die zu y parallele Hauptaxe beansprucht sind.

4. Der Spannungszustand wird als eben vorausgesetzt, und dies soll vorerst durch Beschränkung auf den schmalen Rechteckquerschnitt mit konstanter Breite b und gleichmässig über die letztgenannte verteilten Lasten erreicht werden, während die Höhe $h(x)$ als schwach veränderlich zugelassen wird.

Das Verfahren besteht darin, dass der Ermittlung der Spannungen in einem Stababschnitt, der durch zwei benachbarte Querschnitte begrenzt wird, die elastischen Grundgleichungen und die Randbedingungen längs der Mantelfläche zugrunde gelegt werden, während in den begrenzenden Schnitten nur die Aequivalenz der inneren Kräfte mit der Beanspruchung zum Ausdruck gebracht wird. Die Tatsache, dass die in diesen Beziehungen auftretenden Bestimmungsstücke von verschiedener Grössenordnung sind, gestattet die Ausscheidung der Spannungskomponenten und ihrer partiellen Ableitungen in Klassen verschiedener Ordnung, analog derjenigen, die in der Grenzschichttheorie für die Geschwindigkeitskomponenten üblich ist[4]). Durch Entwicklung der axialen Normalspannung in eine Potenzreihe mit abschätzbaren Gliedern ergibt sich alsdann die Möglichkeit, das Problem unter Beschränkung auf Glieder einer bestimmten Ordnung zu lösen.

2. Der Spannungszustand. Es ist zweckmässig, die Koordinaten x, y, z, die Stablänge l, die Breite b, die Höhe $h(x)$ und die Fläche $F(x)$ des Querschnittes, sowie dessen Trägheitsmoment $J(x)$ auf die Vergleichslänge B zu beziehen. Von den dimensionslosen Koordinaten

$$(2) \qquad x' = \frac{x}{B} \backsim \frac{1}{\varepsilon}, \quad y' = \frac{y}{B} \backsim 1, \quad z' = \frac{z}{B} \backsim 1$$

wird dann nur die erste innerhalb des Stabes von der Grössenordnung $1/\varepsilon$, während die anderen von der Ordnung 1 bleiben; auch die Grössen

$$(3) \qquad l' = \frac{l}{B} \backsim \frac{1}{\varepsilon}, \quad b' = \frac{b}{B} \backsim 1, \quad h' = \frac{h}{B} \backsim 1,$$

$$F' = \frac{F}{B^2} \backsim 1, \quad J' = \frac{J}{B^4} \backsim 1$$

sind mit Ausnahme der ersten von der Ordnung 1.

Bezeichnet ferner P eine Kraft, die mit der — zunächst in Form weniger Einzelkräfte P_i angenommenen — Gesamtbelastung vergleichbar ist, so lassen sich die Komponenten der Beanspruchung eines beliebigen Schnittes (nämlich das Biegemoment M, die Zugkraft Z und die Querkraft Q) vermittelst

$$(4) \qquad M \backsim PL, \quad Z \backsim P, \quad Q \backsim P$$

abschätzen, und hieraus folgt, dass im Schnitte Spannungskomponenten der Grössenordnungen

$$(5) \qquad \sigma_x \backsim \frac{M}{B^3} \backsim \frac{PL}{B^3}, \quad \tau_{xz} \backsim \frac{P}{B^2}$$

auftreten müssen. Macht man auch die Komponenten der Beanspruchung sowie des Spannungszustandes durch Bezug auf PB, P und P/B^2 dimensionslos, so erhält man

$$(6) \qquad M' = \frac{M}{PB} \backsim \frac{1}{\varepsilon}, \quad Z' = \frac{Z}{P} \backsim 1, \quad Q' = \frac{Q}{P} \backsim 1$$

und

$$(7) \qquad \sigma'_x = \frac{B^2}{P}\,\sigma_x \backsim \frac{1}{\varepsilon}, \quad \tau'_{xz} = \frac{B^2}{P}\,\tau_{xz} \backsim 1, \quad \sigma'_z = \frac{B^2}{P}\,\sigma_z,$$

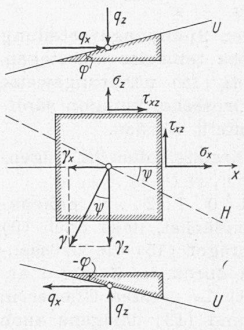

Bild 2.

wobei sich sämtliche Grössenordnungen mit Ausnahme derjenigen von σ'_z den Beziehungen (1), (4) und (5) entnehmen lassen. Demnach sind die Schubspannungen im Vergleich zu den axialen Normalspannungen von erster Ordnung klein.

Lässt man neben Einzellasten auch kontinuierlich verteilte Belastungen der gleichen Grössenordnung zu, so repräsentieren diese Oberflächenspannungen (Bild 2)

$$q_x,\ q_z \backsim \frac{P}{LB},$$

die mit

$$(8) \qquad q'_x = \frac{B^2}{P}\,q_x \backsim \varepsilon, \quad q'_z = \frac{B^2}{P}\,q_z \backsim \varepsilon$$

dimensionslos gemacht und abgeschätzt werden können.

Nimmt man schliesslich an, dass auch das Eigengewicht des Stabes von der Grössenordnung der gesamten Belastung sei, so besteht für das spezifische Gewicht γ die Beziehung

$$\gamma\, LB^2 \backsim P;$$

es ist daher

$$(9) \qquad \gamma' = \frac{B^3}{P}\,\gamma \backsim \varepsilon.$$

Der Spannungszustand im Stab wird im Sinne der Elastizitätstheorie[5]) durch die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$(10) \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \gamma_x, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma_z,$$

die Verträglichkeitsbedingung

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\sigma_x + \sigma_z) = 0$$

und die Randbedingungen

$$(12) \qquad \sigma_x \sin\varphi - \tau_{xz}\cos\varphi + q_x = 0, \quad \tau_{xz}\sin\varphi - \sigma_z\cos\varphi - q_z = 0$$

bestimmt. Dabei bedeutet

$$(13) \qquad \varphi \backsim \varepsilon$$

den Neigungswinkel des Stabumrisses U gegenüber der Stabaxe, der samt seinen Ableitungen nach x als von der Grössenordnung ε vorausgesetzt wird, und die beiden Grössen

$$(14) \qquad \gamma_x = \gamma \sin\psi, \quad \gamma_z = \gamma\cos\psi$$

stellen unter der Annahme, dass die Axe um den Winkel ψ gegen die Horizontale H geneigt sei, die negativen Projektionen der nach Voraussetzung *1* konstanten Raumkraft dar.

Nun handelt es sich aber nicht darum, die Beziehungen (10) bis (12), die mit Hilfe von (2), (7), (8), (9) und (14) auch in der dimensionslosen Form

[1]) *Jak. Bernoulli*, Mémoires de Paris 1705; Oeuvres Bd. I, Genf 1744, S. 976.

[2]) Vgl. *A. Föppl*, Vorles. über techn. Mechanik, Bd. III, Festigkeitslehre, Berlin 1927, S. 423.

[3]) *J. N. Goodier*, On the Problems of the Beam and the Plate in the Theorie of Elasticity, Trans. Roy. Soc. of Canada, Ottawa 1938, 3. Serie, Bd. 32. Sect. III, S. 65.

[4]) Vgl. *W. Tollmien*, Grenzschichttheorie, Hdb. d. Exp. Phys., Bd. IV, 1. Teil, Leipzig 1931, S. 244 ff.

[5]) Vgl. z. B. *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity, New York und London 1934, S. 20 ff.

$$(15)\quad \underset{0}{\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x'}} + \underset{0}{\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z'}} = \gamma' \underset{1}{\sin \psi}, \quad \underset{1}{\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x'}} + \underset{1}{\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z'}} = \gamma' \underset{1}{\cos \psi},$$

$$(16)\quad \underset{1}{\frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial x'^2}} + \underset{3}{\frac{\partial^2 \sigma'_z}{\partial x'^2}} + \underset{1}{\frac{\partial^2 \sigma_x'}{\partial z'^2}} + \underset{1}{\frac{\partial^2 \sigma'_z}{\partial z'^2}} = 0,$$

$$(17)\quad \underset{0}{\sigma'_x \sin \varphi} - \underset{0}{\tau'_{xz} \cos \varphi} + \underset{1}{q'_x} = 0,$$

$$\underset{1}{\tau'_{xz} \sin \varphi} - \underset{1}{\sigma'_z \cos \varphi} - \underset{1}{q'_z} = 0$$

angeschrieben werden können, exakt zu integrieren. Es soll ja hier nur ein Nährungsverfahren entwickelt werden, und dazu gehen wir von der Bemerkung aus, dass die Abschätzung (8) unmittelbar unter den wenigen zugelassenen Einzelkräften ihre Gültigkeit verliert. Grenzt man aber diese Stellen durch Querschnitte ab, die etwa im Abstand B voneinander liegen, so bleibt eine kleine Zahl von Stababschnitten zurück, deren Längen mit L vergleichbar sind. Sie werden durch Schnitte begrenzt, in denen die Spannungsverteilung zwar unbekannt ist, aber den Beziehungen

$$\int_F \sigma_x z \, dF = M, \quad \int_F \sigma_x \, dF = Z, \quad \int_F \tau_{xz} \, dF = -Q$$

genügen muss. Für die Behandlung solcher Abschnitte kann man den Bestimmungsgleichungen der Spannungskomponenten die — nunmehr mit Hilfe von (2), (3), (6) und (7) dimensionslos geschriebenen — Forderungen

$$(18)\quad \int_{F'} \sigma'_x z' \, dF' = \underset{-1}{M'}, \quad \int_{F'} \sigma'_x \, dF' = \underset{0}{Z'}, \quad \int_{F'} \tau'_{xz} \, dF' = -\underset{0}{Q'}$$

beifügen, die die Unkenntnis der genauen Spannungsverteilung in den begrenzenden Schnitten wenigstens teilweise aufwiegen, und versuchen, die Beziehungen (15) bis (18) näherungsweise aufzulösen. Zuvor müssen indessen die Grössenordnungen sämtlicher darin auftretenden Glieder festgestellt werden.

3. Grössenordnungen. Zur Abkürzung sollen im folgenden Glieder der Grössenordnungen ε^{-1}, ε^0 $(=1)$, ε^1, ε^2, ... durch beigesetzte Ordnungszahlen $-1, 0, 1, 2, \ldots$ gekennzeichnet werden. Wir bemerken dann zunächst, dass nach (9) die rechten Seiten der Differentialgleichungen (15) die Grössenordnungen ε aufweisen, und deuten dies durch die Zeiger 1 an. Von derselben Ordnung sind gemäss (8) die letzten Glieder in (17), in denen mit Rücksicht auf (7) und (13) übrigens auch die mit σ'_x und τ'_{xz} behafteten Glieder der Reihe nach mit 0, 0 und 1 bezeichnet werden können. Schliesslich folgen aus (6) die Grössenordnungen der rechten Seiten von (18).

Um auch die übrigen Grössen abzuschätzen, ordnet man die Spannungskomponenten samt ihren partiellen Ableitungen in Form dreier dreieckiger Schemata (Tabelle 1) an, wobei sich den Spitzenelementen σ'_x und τ'_{xz} mit Rücksicht auf (7) sofort die Ordnungszahlen -1 bzw. 0 beilegen lassen.

Nun kann ein beliebiges Element aus einem der drei Schemata nur dann im ganzen betrachteten, von Einzellasten freien Stababschnitt, d.h. in einem x'-Intervall der Länge $1/\varepsilon$, von einer bestimmten Ordnung bleiben, wenn seine partielle Ableitung nach x' — von vereinzelten Stellen abgesehen, die etwa starken Belastungsänderungen entsprechen können — von der nächsten Ordnung klein ist. Die Ordnungszahl nimmt demnach beim Fortschreiten nach links unten von Element zu Element um 1 zu.

Auf Grund dieser ersten Regel gewinnt man zunächst die Ordnungszahlen von $\partial\sigma'_x/\partial x'$ und $\partial\tau'_{xz}/\partial x'$, aus (15) sodann diejenigen der Elemente $\partial\tau'_{xz}/\partial z'$ und $\partial\sigma'_z/\partial z'$ und aus (17) schliesslich die Aussage, dass σ'_z mindestens am Rande von erster Ordnung klein ist. Nun kann aber σ'_z im x'-Intervall der Grössenordnung 1 nicht bis zur nullten Ordnung ansteigen, wenn $\partial\sigma'_z/\partial z'$ von erster Ordnung klein ist; man hat also

$$(20)\quad \sigma'_x \backsim \varepsilon$$

und ist damit in der Lage, auch $\partial\sigma'_z/\partial x'$ zu klassifizieren. Aehnlich folgt aus dem Umstand, dass σ'_x in jedem Querschnitt eine Nullstelle besitzt und bis zur Grössenordnung $1/\varepsilon$ ansteigt, die Ordnungszahl von $\partial\sigma'_x/\partial z'$ zu -1. Damit sind aber die beiden ersten Zeilen des Schemas (19) und unter Berücksichtigung der eben angegebenen Regel auch die links darunter stehenden Elemente klassifiziert.

Leitet man die Beziehungen (15) beliebig oft nach x' und z' ab, so erhält man rechterhand Null. Daraus folgt als weitere Regel, dass diejenigen Elemente, die in den Dreiecken mit den Spitzen $\partial\sigma'_x/\partial x'$ und $\partial\tau'_{xz}/\partial z'$ an gleicher Stelle stehen, von derselben Grössenordnung sind und dass entsprechendes für die Dreiecke mit den Spitzen $\partial\tau'_{xz}/\partial x'$ und $\partial\sigma'_z/\partial z'$ gilt.

Vermittelst dieser zweiten sowie der ersten Regel lassen sich in der dritten Zeile von (19) sämtliche Ordnungen mit Ausnahme derjenigen von $\partial^2\sigma'_x/\partial z'^2$ angeben, die aber jetzt mit Hilfe von (16) bestimmt werden kann. Nach Berücksichtigung beider Regeln bleibt sodann in der vierten Zeile $\partial^3\sigma_x/\partial z'^3$ unbestimmt, lässt sich aber durch Ableiten der Verträglichkeitsbedingung nach z' abschätzen, und schliesslich können in der gleichen Weise die fünfte sowie weitere Zeilen behandelt werden.

Entwickelt man jetzt unter Beschränkung auf einen bestimmten Schnitt die axiale Normalspannung in die Maclaurinsche Reihe

$$\sigma'_x(x', z') = \sigma'_x(x', o) + \frac{z'}{1!} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial z'}(x', o) + \frac{z'^2}{2!} \frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial z'^2}(x', o) + \ldots,$$

so lassen sich die niedrigsten Ordnungen, die die Beiwerte

$$(21)\quad \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \sigma'_x}{\partial z'^k}(x', 0) = a_k(x') \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

der Potenzen von z' annehmen können, dem Schema (19) entnehmen. Man erhält so in vereinfachter Schreibweise

$$(22)\quad \sigma'_x(x', z') = \underset{-1}{a_0(x')} + \underset{-1}{a_1(x')} z' + \underset{1}{a_2(x')} z'^2 + \underset{1}{a_3(x')} z'^3 + \underset{3}{a_4(x')} z'^4 + \ldots,$$

wobei mit Rücksicht auf die Art der Abschätzung sowie darauf, dass (21) die partiellen Ableitungen von σ'_x für die bestimmte Stelle $z' = 0$ und im Nenner die Fakultät von k enthält, freilich noch damit zu rechnen ist, dass ein Teil der Beiwerte in Wirklichkeit von höherer als der angegebenen Ordnung klein ist.

4. Die elastische Linie. Bezeichnen

$$u = Bw', \quad w = Bw'$$

die Verschiebungen eines beliebigen Punktes parallel zur Belastungsebene und

$$(23)\quad E' = \frac{B^2}{P} E, \quad G' = \frac{B^2}{P} G = \frac{m E'}{2(m+1)}$$

die dimensionslosen elastischen Konstanten des Stabes, so ist der Verzerrungszustand in der Belastungsebene[6]) durch

$$\varepsilon_x = \frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{E'}\left(\sigma'_x - \frac{\sigma'_z}{m}\right), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{1}{E'}\left(\sigma'_z - \frac{\sigma'_x}{m}\right),$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{G'} \tau'_{xz}$$

gegeben; es ist demnach

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} = \frac{1}{G'} \underset{1}{\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x'}} - \frac{1}{E'}\left(\underset{-1}{\frac{\partial \sigma'_x}{\partial z'}} - \frac{1}{m} \underset{1}{\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z'}}\right),$$

wobei die Ordnungszahlen aus dem Schema (19) folgen.

Nun stellt bei unendlich kleinen Verschiebungen — und auf solche müssen wir uns ja schon deshalb beschränken, weil sonst die Beanspruchungen von der Deformation abhängig würden —

[6]) Vgl. etwa *S. Timoshenko*, a.a.O. S. 22 u. 23.

Tabelle 1. Schema der Spannungskomponenten

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\underset{-1}{\sigma'_x} & \underset{0}{\tau'_{xz}} & \underset{1}{\sigma'_z} \\
\underset{0}{\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x'}} \quad \underset{-1}{\frac{\partial \sigma'_x}{\partial z'}} & \underset{1}{\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x'}} \quad \underset{0}{\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z'}} & \underset{2}{\frac{\partial \sigma'_z}{\partial x'}} \quad \underset{1}{\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z'}} \\
\underset{1}{\frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial x'^2}} \quad \underset{0}{\frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial x' \partial z'}} \quad \underset{1}{\frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial z'^2}} & \underset{2}{\frac{\partial^2 \tau'_{xz}}{\partial x'^2}} \quad \underset{1}{\frac{\partial^2 \tau'_{xz}}{\partial x' \partial z'}} \quad \underset{0}{\frac{\partial^2 \tau'_{xz}}{\partial z'^2}} & \underset{3}{\frac{\partial^2 \sigma'_z}{\partial x'^2}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^2 \sigma'_z}{\partial x' \partial z}} \quad \underset{1}{\frac{\partial^2 \sigma'_z}{\partial z'^2}} \\
\underset{2}{\frac{\partial^3 \sigma'_x}{\partial x'^3}} \quad \underset{1}{\frac{\partial^3 \sigma'_x}{\partial x'^2 \partial z'}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^3 \sigma'_x}{\partial x' \sigma z'^2}} \quad \underset{1}{\frac{\partial^3 \sigma'_x}{\partial z'^3}} & \underset{3}{\frac{\partial^3 \tau'_{xz}}{\partial x'^3}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^3 \tau'_{xz}}{\partial x'^2 \partial z'}} \quad \underset{1}{\frac{\partial^3 \tau'_{xz}}{\partial x' \partial z'^2}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^3 \tau'_{xz}}{\partial z'^3}} & \underset{4}{\frac{\partial^3 \sigma'_x}{\partial x'^3}} \quad \underset{3}{\frac{\partial^3 \sigma'_z}{\partial x'^2 \partial z'}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^3 \sigma'_z}{\partial x' \partial z'^2}} \quad \underset{1}{\frac{\partial^3 \sigma'_x}{\partial z'^3}} \\
\underset{3}{\frac{\partial^4 \sigma'_x}{\partial x'^4}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^4 \sigma'_x}{\partial x'^3 \partial z'}} \quad \underset{3}{\frac{\partial^4 \sigma'_x}{\partial x'^2 \partial z'^2}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^4 \sigma'_x}{\partial x' \partial z'^3}} \quad \underset{3}{\frac{\partial^4 \sigma'_x}{\partial z'^4}} & \underset{4}{\frac{\partial^4 \tau'_{xz}}{\partial x'^4}} \quad \underset{3}{\frac{\partial^4 \tau'_{xz}}{\partial x'^3 \partial z'}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^4 \tau'_{xz}}{\partial x'^2 \partial z'^2}} \quad \underset{3}{\frac{\partial^4 \tau'_{xz}}{\partial x' \partial z'^3}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^4 \tau'_{xz}}{\partial z'^4}} & \underset{5}{\frac{\partial^4 \sigma'_z}{\partial x'^4}} \quad \underset{4}{\frac{\partial^4 \sigma'_z}{\partial x'^3 \partial z'}} \quad \underset{3}{\frac{\partial^4 \sigma_z'}{\partial x'^2 \partial z'^2}} \quad \underset{2}{\frac{\partial^4 \sigma_z'}{\partial x' \partial z'^3}} \quad \underset{3}{\frac{\partial^4 \sigma'_z}{\partial z'^4}}
\end{array}\right.$$

$$\frac{\partial w'}{\partial x'}\ (x', o)$$

den Neigungsfaktor der elastischen Linie dar; ihre dimensionslose Krümmung

$$(24)\quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{B}{\varrho}$$

ist mithin durch

$$(25)\quad \frac{1}{\varrho'} = -\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\ (x', o) = -\frac{1}{G'}\underset{1}{\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x'}}\ (x', o) + \frac{1}{E'}\left[\underset{-1}{\frac{\partial \sigma'_x}{\partial z'}}\ (x', o) - \frac{1}{m}\underset{1}{\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z'}}\ (x', o)\right]$$

gegeben.

5. Erste Näherung. Bei Beschränkung auf Glieder der Grössenordnung $1/\varepsilon$ geht (22) in den linearen Ansatz

$$\sigma'_x = \underset{-1}{a_0} + \underset{-1}{a_1}\, z'$$

über, während gemäss (7) und (20) gleichzeitig $\tau'_{xz} = \sigma'_z = 0$ zu setzen ist. Ferner reduzieren sich die Bestimmungsgleichungen (15) bis (18) für die Spannungskomponenten auf die beiden Forderungen

$$\int_{F'} \sigma'_x z'\, dF' = M', \quad \int_{F'} \sigma'_x\, dF' = 0\,,$$

die zur Ermittlung der Beiwerte a_0 und a_1 ausreichen. Sie führen nämlich auf

$$(26)\quad a_0 = 0\,, \qquad a_1 = \frac{M'}{J'} \backsim \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

so dass man

$$(27)\quad \sigma'_x = \frac{M'}{J'}\, z'$$

um nach Umformung vermittelst (2), (3) und (6) endgültig

$$(28)\quad \sigma_x = \frac{M}{J}\, z = \frac{12\, M}{b\, h^3}\, z\,, \quad \tau_{xz} = 0\,, \quad \sigma_x = 0$$

erhält. Schliesslich geht (25) in dieser Näherung in

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{E'}\,\frac{\partial \sigma'_x}{\partial z'}\ (x', 0)$$

über und liefert unter Verwendung von (3), (6), (23), (24) und (27)

$$(29)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\, J}\,.$$

Die klassischen Beziehungen für die axiale Normalspannung und die Krümmung der elastischen Linie stellen sich damit als Ergebnis eines ersten Näherungsprozesses im Sinne der exakten Elastizitätstheorie dar, die auch für den Stab mit leicht veränderlicher Höhe und schief gestellten Lasten gültig bleiben, sofern die Lastrichtungen nicht allzu schwach gegen die Stabaxe geneigt sind. Insbesondere sind in dieser Näherung die von der Zugkraft Z herrührende axiale Normalspannung, überdies aber auch die Spannungskomponenten τ_{xz} und σ_z zu vernachlässigen.

6. Zweite Näherung. Bei Hinzunahme der Glieder der Grössenordnung 1 bleibt der Ansatz

$$(30)\quad \sigma'_x = \underset{0}{a_0} + \underset{-1}{a_1}\, z'$$

bestehen, wobei aber mit Rücksicht auf das Ergebnis von Ziff. 5 der Beiwert a_0 höchstens von der Grössenordnung 1 sein kann; ferner ist σ'_z im Gegensatz zu τ'_{xz} nach wie vor zu vernachlässigen. Die Forderungen (18) sind jetzt in ihrer ursprünglichen Gestalt

$$(31)\quad \int_{F'} \sigma'_x z'\, dF' = M', \quad \int_{F'} \sigma'_x\, dF' = Z', \quad \int_{F'} \tau'_{xz}\, dF' = -Q'$$

zu berücksichtigen und gemäss (15) bis (17) durch die Differentialgleichung

$$(32)\quad \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z'} = 0$$

sowie die für beide Ränder gültige Bedingung

$$(33)\quad \sigma'_x \varphi - \tau'_{xz} = 0$$

zu ergänzen, und für die Krümmung der elastischen Linie ergibt sich wieder

$$(34)\quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{E'}\,\frac{\partial \sigma'_x}{\partial z'}\ (x', 0)\,.$$

Die beiden ersten Integrale (31) führen mit dem Ansatz (30) auf die Beiwerte

$$a_0 = \frac{Z'}{F'} \backsim 1\,, \quad a_1 = \frac{M'}{J'} \backsim \frac{1}{\varepsilon}$$

und damit auf die axiale Normalspannung

$$(35)\quad \sigma'_x = \frac{M'}{J'}\, z' + \frac{Z'}{F'}\,.$$

Sodann erhält man aus (32) und (35) bei Beschränkung auf Glieder der Grössenordnung 1 für die Schubspannung die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z'} = -\frac{d}{dx'}\left(\frac{M'}{J'}\right) z'$$

mit dem allgemeinen Integral

$$\tau'_{xz} = -\frac{d}{dx'}\left(\frac{M'}{J'}\right)\frac{z'^2}{z} + f\,(x)\,,$$

und dieses geht — da die Bedingung (33) in der beobachteten Näherung für beide Ränder die Gestalt

$$-\frac{d}{dx'}\left(\frac{M'}{J'}\right)\frac{h'^2}{8} + f = \frac{M'}{J'}\,\frac{h'}{2}\,\varphi$$

annimmt — in

$$(36)\quad \tau'_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{h'^2}{4} - z'^2\right)\frac{d}{dx'}\left(\frac{M'}{J'}\right) + \frac{h'}{2}\,\frac{M'}{J'}\,\varphi$$

über. Ferner führt das dritte Integral (31) auf

$$b' \int_{-h'/2}^{h'/2} \tau'_{xz}\, dz' = \frac{b' h'^3}{12}\,\frac{d}{dx'}\left(\frac{M'}{J'}\right) + \frac{b' h'^2}{2}\,\frac{M'}{J'}\,\varphi = -Q'\,,$$

und hieraus folgt, sofern noch die Identitäten

$$(37)\quad \frac{1}{2}\,\frac{dh'}{dx'} = \varphi\,, \quad J' = \frac{b' h'^3}{12}\,, \quad \frac{dJ'}{dx'} = \frac{b' h'^2}{2}\,\varphi$$

verwendet werden, die bekannte Beziehung

$$(38)\quad \frac{dM'}{dx'} = -Q'$$

für das Momentengleichgewicht an einem — durch zwei benachbarte Querschnitte begrenzten — Stabelement. Schliesslich folgt aus (34) und (35) wieder

$$(39)\quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{M'}{E' J'}\,.$$

Unter Verwendung von (37) und (38) lässt sich der durch (35) und (36) gegebene Spannungszustand endgültig auf die Gestalt

$$(40)\quad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{12\, M}{b\, h^3}\, z + \dfrac{Z}{b\, h}\,, \quad \tau_{xz} = -\dfrac{3}{2\, b\, h}\left[\left(1 - 4\,\dfrac{z^2}{h^2}\right) Q + \right. \\ \left. + 2\left(1 - 12\,\dfrac{z^2}{h^2}\right)\dfrac{\varphi}{h}\, M\right], \quad \sigma_z = 0\,, \end{cases}$$

die Krümmung der elastischen Linie auf die Form

$$(41)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{12\, M}{E\, b\, h^3}$$

bringen, wobei vermittelst (2), (3), (6), (23) und (29) auch schon der Uebergang zu den unbezogenen Grössen durchgeführt ist.

Die axiale Normalspannung und die Krümmung der elastischen Linie sind demnach noch immer durch die klassischen Beziehungen gegeben, wobei aber im Gegensatz zur ersten Näherung für die Ermittlung von σ_x der Einfluss der Zugkraft Z mitzuberücksichtigen ist. Die andere Normalspannung ist noch zu vernachlässigen; die Schubspannung endlich folgt einem Gesetz, das — allerdings unter Verwendung einer Hilfsannahme und in dieser Gestalt nur für die reine Biegung — erstmals von *F. Stüssi*[7]) aufgestellt worden ist. Sie weist einen parabolischen Verlauf auf, verschwindet indessen nur dann am ganzen Rande, wenn der Stab ohne Anzug ist; andernfalls kann sie unter Umständen gerade hier ihre Höchstwerte annehmen.

7. Diskussion. Die Ergebnisse von Ziff. 6 lassen sich dahin interpretieren, dass es — im Sinne einer zweiten Näherung und unter Ausschluss der Umgebungen von Einzelkraftangriffspunkten — erlaubt ist,

1. den Verlauf der axialen Normalspannung linear anzunehmen und mittels der Forderung seiner Aequivalenz mit dem Biegemoment und der Zugkraft zu bestimmen,

2. die Schubspannung aus der Komponentenbedingung für die axiale Richtung und der entsprechenden Randbedingung herzuleiten und dabei den durch die Zugkraft hervorgerufenen Anteil der Normalspannung sowie das Eigengewicht und die Randspannungen (die in den Komponenten M, Z und Q der Beanspruchung schon berücksichtigt sind) zu unterdrücken,

3. die zur Stabaxe senkrechte Normalspannung zu vernachlässigen,

4. die Krümmung der elastischen Linie als Quotienten aus dem Biegemoment und der Biegesteifigkeit zu bestimmen.

Diese Vorschriften entsprechen zum grösseren Teil der in der technischen Festigkeitslehre üblichen Praxis, geben indessen zu folgenden Bemerkungen Anlass:

a) Um den Spannungsverlauf um einen Näherungsschritt genauer als durch (28) zu beschreiben, muss neben der Zugkraft auch die Querkraft berücksichtigt werden, deren Einfluss von der gleichen Grössenordnung ist. Für die blosse Dimensionierung dagegen ist dies nicht notwendig, denn in den Vergleichsspannungen, die nach der einen oder andern Hypothese für den Bruch verantwortlich gemacht werden, bedeutet eine kleine Korrektur

[7]) *F. Stüssi*, Baustatik, Bd. I, Basel 1946, S. 282.

von σ_x eine Aenderung von gleicher, die Hinzunahme von τ_{xz} dagegen eine solche nächst höherer Ordnung.

b) Die Krümmung der elastischen Linie hängt in dieser Näherung weder von der Zug- noch von der Querkraft ab.

c) Der Anzug des Stabes wirkt sich auf den Spannungszustand und die elastische Linie indirekt insofern aus, als im Gegensatz zum prismatischen Stabe hier h von x abhängt. Einen direkten — auch im unendlich kurzen Stabelement wahrnehmbaren — Einfluss hat er nur auf die Schubspannungsverteilung, und zwar wird diese gemäss (40) durch den Winkel φ entscheidend mitbestimmt. Diese letzte Tatsache, auf die schon *H. Lorenz*[8]) hingewiesen hat, die durch photoelastische Untersuchungen[9]) bestätigt wird und übrigens auch elementar[10]) folgt, wenn man bei der üblichen Herleitung der Schubspannungsformel den Anzug mitberücksichtigt, wird in der technischen Festigkeitslehre meist übersehen. Nur so ist z. B. die Bemerkung von *S. Timoshenko* anlässlich der Behandlung des keilförmigen Balkens[11]) zu verstehen, dass die grössten Schubspannungen am Rande auftreten und doppelt so gross seien wie diejenigen, die von der elementaren Theorie für den Schwerpunkt des rechteckigen Balkenquerschnittes geliefert werden.

8. Verallgemeinerung. Die in Ziff. 1 unter Voraussetzung *4* zusammengestellten Forderungen gewährleisten in Wirklichkeit die Ausbildung eines exakt ebenen Spannungszustandes nicht, denn dieser stellt bekanntlich einen praktisch meist unerreichbaren Grenzfall dar. Umgekehrt ist aber klar, dass der Spannungszustand auch dann noch wenigstens in guter Näherung eben sein kann, wenn die genannten Forderungen nur näherungsweise erfüllt sind, d. h. bei Stäben mit nur schwach vom schmalen Rechteck abweichender Querschnittsform sowie geringem Anzug auch im Grundriss.

Die Ergebnisse von Ziff. 6 lassen sich am einfachsten mit den in Ziff. 7 formulierten Vorschriften auf diesen Fall übertragen, von denen die erste, dritte und vierte ohne weiteres auf

$$(42)\quad \sigma_x = \frac{M}{J}\,z + \frac{Z}{F}\,, \qquad \sigma_z = 0\,, \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}$$

führen. Betrachtet man, um auch die zweite auszuwerten, das in Bild 3 schraffierte Stabelement mit der Stirnfläche $F^*(x, z)$, deren statisches Moment bezüglich der y-Axe mit

$$\int_{F^*} z\,dF = S(x, z)$$

bezeichnet sei, so erhält man als Resultierende der vom Biegemoment herrührenden Normalkraftverteilung über F^*

$$X(x, z) = \frac{M}{J}\int_{F^*} z\,dF = \frac{M(x)}{J(x)}\,S(x, z)\,,$$

ferner für die gegenüberliegende Stirnfläche

$$X + \frac{\partial X}{\partial x}\,dx$$

und als einzige weitere axiale Kraft die von der Schubkraftverteilung längs der unteren Begrenzung herrührende Resultierende

$$\tau_{xz}(x, z)\,b(x, z)\,dx\,.$$

Die Komponentenbedingung für die x-Axe lautet

$$\frac{\partial X}{\partial x}\,dx - b\,\tau_{xz}\,dx = 0$$

und führt auf die Schubspannung

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M}{J}\,S\right),$$

die schliesslich auch in der Form

$$(43)\quad \tau_{xz} = -\frac{Q}{b}\,\frac{S}{J} + \frac{M}{b}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{J}\right)$$

angeschrieben werden kann.

Das Ergebnis dieser Gleichgewichtsbetrachtung, die sich eng an die übliche Herleitung der Schubspannungsverteilung anschliesst, aber auf die Veränderlichkeit von J, F^* und S mit x Rücksicht nimmt, zerfällt gemäss (43) in den bekannten, bei prismatischen Stäben allein auftretenden Ausdruck und ein zweites Glied, das von gleicher Grössenordnung ist und den Einfluss der Querschnittsänderung ausdrückt. Es ist in etwas anderer Form schon von *H. Lorenz*[12]) für den Fall der reinen Biegung verwendet worden.

Uebrigens lässt sich leicht nachweisen, dass die durch das erste Glied in (43) dargestellte Schubkraftverteilung bei der

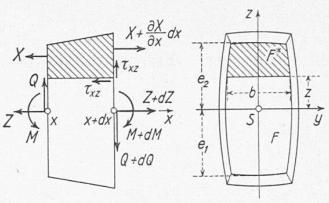

Bild 3.

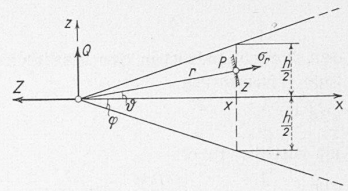

Bild 4.

Reduktion auf den Schwerpunkt des Schnittes die Querkraft ergibt, während das zweite Glied einer im Gleichgewicht befindlichen Verteilung entspricht. Für das mit den Bezeichnungen von Bild 3 gebildete Integral

$$\int_F \tau\,dF = \int_{-e_1}^{e_2} \tau\,b\,dz = -Q\int_{-e_1}^{e_2}\frac{S}{J}\,dz + M\int_{-e_1}^{e_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{J}\right)dz$$

kann nämlich mit Rücksicht darauf, dass S an beiden Grenzen verschwindet, auch

$$\int_F \tau\,dF = -Q\int_{-e_1}^{e_2}\frac{S}{J}\,dz + M\,\frac{\partial}{\partial x}\int_{-e_1}^{e_2}\frac{S}{J}\,dz$$

gesetzt werden. Nun ist aber

$$J = \int_F z^2\,dF = \int_{-e_1}^{e_2} z\,.\,z\,b\,dz\,,$$

und da man den zweiten Faktor im Integral als Abnahme von S beim Fortschreiten um dz deuten kann, erhält man durch partielle Integration

$$J = -\int_{-e_1}^{e_2} z\,dS = -\,[z\,S]_{-e_1}^{e_2} + \int_{-e_1}^{e_2} S\,dz$$

und hieraus mit Rücksicht auf das Verschwinden von S an beiden Grenzen

$$\int_{-e_1}^{e_2}\frac{S}{J}\,dz = 1 \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial}{\partial x}\int_{-e_1}^{e_2}\frac{S}{J}\,dz = 0\,.$$

Schliesslich gehen die Beziehungen (42) und (43), die unter Voraussetzungen *1* bis *3* von Ziff. 1 sowie der erweiterten Voraussetzung *4* den Spannungszustand und die Krümmung der elastischen Linie in zweiter Näherung beschreiben, bei Beschränkung auf Rechteckquerschnitte wieder in die Formeln (40), (41) über, und zwar auch dann, wenn ein geringer Anzug im Grundriss zugelassen wird.

9. Anwendung. Für den in Bild 4 wiedergegebenen keilförmigen Balken, der die konstante Dicke b besitzt und am freien Ende durch die Kräfte Z und Q belastet ist, ergeben die Beziehungen (42) und (43) bzw. (40) in zweiter Näherung mit Rücksicht auf

$$M = -\,Q\,x \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{h}{2\,x} = \text{konst.}$$

den Spannungszustand

$$(44)\quad \sigma_x = -\frac{12\,Q\,x\,z}{b\,h^3} + \frac{Z}{b\,h}\,, \quad \tau_{xz} = -\frac{12\,Q\,z^2}{b\,h^3}\,, \quad \sigma_z = 0\,.$$

Die exakte Lösung, die in diesem Falle bekannt ist[13]), lässt sich in Polarkoordinaten durch die Spannungskomponenten

$$\sigma_r = \frac{Z\cos\vartheta}{b\,r\,(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)} - \frac{Q\sin\vartheta}{b\,r\,(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)}\,,$$

$$\tau_{r\vartheta} = 0\,, \quad \sigma_\vartheta = 0$$

beschreiben und führt — in rechtwinklige Koordinaten umgesetzt — auf

$$(45)\quad \sigma_x = \frac{x^2}{b\,r^4}\left(\frac{Z\,x}{\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi} - \frac{Q\,z}{\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi}\right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{z}{x}\,\sigma_x\,, \quad \sigma_z = \frac{z^2}{x^2}\,\sigma_x\,.$$

Damit bestätigt sich zunächst, dass τ_{xz} im Vergleich zu σ_x von erster, σ_z dagegen von zweiter Ordnung klein ist. Ferner gehen die Beziehungen (45) bei Entwicklung nach Potenzen von z/x bzw. $h/2x$ unter Vernachlässigung von Gliedern erster und höherer Ordnung in die Gleichungen (44) über, und damit ist an einem einfachen Beispiel gezeigt, dass die elementaren Formeln in dieser Näherung die wahre Spannungsverteilung richtig wiedergeben.

Dass dies auch im belasteten Ende noch der Fall ist, hängt mit der speziellen Wahl des Beispiels zusammen; es darf hie-

[8]) *H. Lorenz*, Lehrbuch der Techn. Physik, Bd. IV, München und Berlin 1913, S. 217 ff.

[9]) Vgl. etwa *R. Bereuter*, Experimentelle Untersuchungen der Spannungsverteilung in freiaufliegenden Balken. Publ. du Labor. de photoélasticité de la Chaire de Méch. en langue française de l'E. P. F., Zürich 1946.

[10]) Vgl. Ziff. 8.

[11]) *S. Timoshenko*, a. a. O., S. 95.

[12]) *H. Lorenz*, a. a. O., S. 219.

[13]) Vgl. *S. Timoshenko*, a. a. O., S. 94.

raus — wie schon eine Bemerkung gegen Ende von Ziff. 2 zeigt — nicht allgemein auf die Uebertragbarkeit der gewonnenen Ergebnisse auf die Umgebungen von Einzelkraftangriffspunkten geschlossen werden. Auch in der Nähe der in Wirklichkeit stets vorhandenen Einspannstelle verliert mit (45) auch die Näherung (44) ihre Gültigkeit, da hier der Winkel φ nicht mehr mit ε vergleichbar ist.

Erweiterung des Dampfkraftwerkes Malmö

Südschweden wird aus drei Quellen mit elektrischer Energie versorgt: aus nahe gelegenen Flusskraftwerken, die trotz den vorhandenen Seen grosse Schwankungen in der Wasserführung aufweisen; aus Wasserkraftwerken in Nordschweden, die wegen den hohen Uebertragungskosten über rd. 1000 km Entfernung möglichst voll belastet werden sollten, also die Grundlast zu übernehmen haben, und aus einem Dampfkraftwerk in Malmö, das die Lücken im Belastungsdiagramm auszufüllen hat. Das bestehende Dampfkraftwerk wurde im Jahre 1915 errichtet und mehrfach erweitert. Es umfasste schliesslich zwei Kesseleinheiten und einen Ljungström-Turbogenerator von 30 000 kW.

Bei starker Wasserführung in Südschweden deckt das Dampfkraftwerk nur die Bedarfsspitzen, soweit sie die Leistungsfähigkeit der Wasserkraftwerke überschreiten, sodass es nur im Winter tagsüber eingesetzt werden und dabei den grossen Laständerungen folgen muss. Diese Betriebsweise ist trotz des täglichen Anlassens und Abstellens der Kessel und Turbinen wesentlich wirtschaftlicher als ein Betrieb, bei dem die Lastspitzen den südschwedischen Wasserkraftwerken zur Deckung zugewiesen würden. Die Seen erlauben einen Ausgleich der Lastschwankungen über Tage bis zu einer Woche, sodass es bei geringer Wasserführung im Winter zweckmässig ist, den südschwedischen Werken diese Schwankungen zuzuteilen und das Dampfkraftwerk soweit erforderlich, also hauptsächlich tagsüber, voll zu belasten. Aehnlich wird auch bei geringerem Energiebedarf in den Uebergangsmonaten gefahren, wobei aber die thermische Zentrale nur etwa halb belastet läuft. Neben der Energielieferung fällt dem Kraftwerk Malmö die Aufgabe einer Betriebsreserve zu, die wegen der grossen Entfernung der Grundlastwerke in Nordschweden besonders wichtig ist. Dieses Werk soll also einerseits innerhalb eines grösseren Lastbereiches eine gute Wirtschaftlichkeit aufweisen, und anderseits rasch Vollast übernehmen können. Ueberdies darf das Aufrechterhalten eines hohen Bereitschaftsgrades nicht kostspielig sein.

Um diesen sich teilweise widersprechenden Bedingungen zu genügen, wählte man für die Erweiterung, die in den Jahren 1940 bis 1943 durchgeführt wurde, eine Anlage mit zwei Kesseleinheiten von 110 t/h grösster Dampfproduktion und einem Turbogenerator von 30 000 kW Leistung. Der Kesseldruck wurde zu 52 atü und der Dampfzustand vor der Turbine zu 42 atü, 480 ° C festgesetzt. Das Kühlwasser weist 0 bis 20 ° C auf. Das Speisewasser wird in drei Stufen durch Mischdampf auf 160 ° C vorgewärmt. Auf Zwischenüberhitzung wird im Interesse der Einfachheit verzichtet.

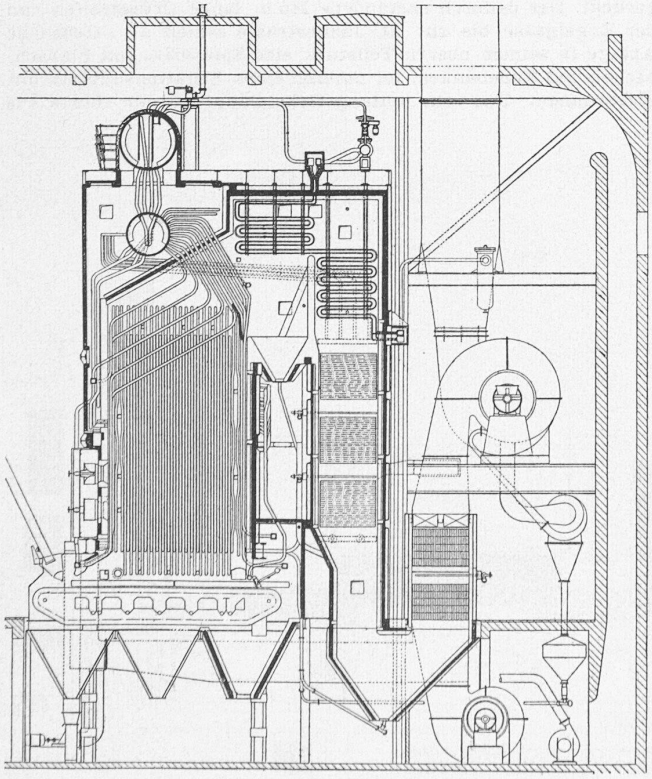

Bild 1. Querschnitt durch einen Hochdruck-Kessel. Masstab 1 : 250

Die Kessel, Bild 1, erhielten eine Zusatz-Oelfeuerung, durch die ihre normale Dampferzeugung von 70 t/h auf maximal 110 t/h erhöht werden kann. Diese kombinierte Feuerung mit Kohle und Oel erlaubt, den Laständerungen rasch und ohne wesentliche Verluste zu folgen; überdies ermöglicht sie eine Anpassung an die jeweilen günstigsten Brennstoffpreise. Der Wasserraum der Kessel wurde grösser als normal ausgeführt, um bei rascher Lastübernahme über eine gewisse Wärmereserve verfügen zu können. Wegen der dabei auftretenden stärkeren Dampfblasenbildung steigt der Wasserstand und es besteht die Gefahr von Flüssigkeitsschlägen auf die Turbine. Um dem entgegenzuwirken, hat man den Dampfdruck verhältnismässig hoch gewählt (was kleine Dampfblasen ergibt), und die Siederohre so angeordnet, dass die Dampfblasen rasch an die Wasseroberfläche gelangen. Hierdurch ergab sich eine Spiegelhebung von nur 15 cm bei einer Laststeigerung von 4 auf 70 t/h.

Der Kessel ist mit einer unteren Trommel von 1,5 m und einer oberen von 2,0 m ⌀ und 12 m Länge ausgerüstet. Bei einem Stückgewicht von 45 t dürften diese Trommeln die grössten ihrer Art sein, die je in Europa ausgeführt worden sind. Beide Trommeln befinden sich über der Verbrennungskammer. In die untere Trommel münden die Siederohre und die Speisewasserleitung. Im normalen Betrieb ist sie fast ganz mit Wasser gefüllt; der Wasserstand schwankt dort nur sehr wenig, während er sich in der oberen Trommel in einem grösseren Bereich verändern kann.

Für jedes Rauchgasgebläse ist ein grosser und ein kleiner Antriebsmotor vorhanden; der grosse Motor dient lediglich zur raschen Steigerung der Dampfproduktion in Notfällen. Der Antrieb der Verbrennungsluftgebläse ist analog durchgebildet. Um den Laständerungen rasch folgen zu können, hat man die Wärmespeicherfähigkeit des Kesselmauerwerks durch wassergekühlte Wände und durch die Wahl leichter Steine möglichst verringert.

Zur Energieerzeugung dient eine Ljungström-Turboeinheit von 35 000 kVA (30 000 kW), 5000 V, 3000 U/min, die durch Kabel mit einem rund 1 km entfernten, im Freien aufgestellten Transformator von 5000/50 000 V verbunden ist. Dort befindet sich auch die Schaltstation mit den Parallelschalteinrichtungen. Entsprechend den besonderen Betriebsverhältnissen sind die Frischdampfzufuhr- und Regelorgane aussergewöhnlich gross gebaut, um die Abgabe der vollen Leistung auch bei auf ⅔ verringertem Druck zu ermöglichen. Eine besondere Vorrichtung am Geschwindigkeitsregler schaltet diesen Regler inner-

Tabelle 1. Hauptdaten einer Kesseleinheit

Höchster Dampfdruck im Kessel		52 atü
Druckverlust im Ueberhitzer bei Vollast		3,5 at
Dampferzeugung bei Kohlenfeuerung		70 t/h
Dampferzeugung bei Oelfeuerung		70 t/h
Dampferzeugung bei kombinierter Feuerung		110 t/h
Heizflächen: Kessel		600 m²
Ueberhitzer		883 m²
Economiser		1750 m²
Luftvorwärmer		900 m²
Rauminhalt der Verbrennungskammer		267 m³
Rostfläche		45,36 m²
Anzahl der Oelbrenner pro Kessel		7
Grösster Oeldurchsatz pro Brenner		850 kg/h
Dampfproduktion	110	70 t/h
Lufttemperatur nach Vorwärmer	110	100 ° C
Rauchgastemperatur nach Luftvorwärmer	165	145 ° C
Speisewassertemperatur vor Economiser	160	150 ° C
Dampftemperatur nach Ueberhitzer	480	480 ° C
Rauchgasventilator: Motor	gross	klein
Rauchgasmenge	4300	2850 m³/min
Rauchgastemperatur vor Ventilator	190	160 ° C
Drucksteigerung (stat.)	200	90 mm W.S.
Motorleistung	410	135 PS
Drehzahl	730	485 U/min
Ventilator für Verbrennungsluft:		
Luftmenge	2500	1850 m³/min
Drucksteigerung (stat.)	220	150 mm W.S.
Motorleistung	225	95 PS
Drehzahl	980	735 U/min