Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 125/126 (1945)
Heft: 4

Artikel: Ein Schwingungsproblem aus dem Flugzeugbau: Ruderfrequenz und Flatterfrequenz

Autor: Grossmann, K.H. / Bader, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83704

Blattes Amsteg, der das vom Maderanertal abzweigende «*Etzli*»-Tal darstellt, macht eine weitere Diskussion über die Sprach- und Schreibfrage überflüssig, denn es verwirklicht eben, was die Zürcher Flurnamenkommission mit ihrem Vorstoss erstrebte. Ein Blick auf das kleine Namengut des Urner Tales und ein Vergleich mit dem Topogr. Atlass (TA.) (Tafel 2, Karte rechts oben) und den oben besprochenen neuen Blättern lässt leicht die neue Einstellung erkennen. Kartenredaktor Cueni schreibt unbeschwert schweizerisch Spillaui (TA. Spiel-). Er wird also auf den kommenden Blättern konsequenterweise auch Wis, Risi, Nider, Frid usw. schreiben und im Gomser Namen Hahnenspil nicht nur das Dehnungs-e sondern auch das Dehnungs-h überflüssig finden. Schweizerdeutsch sind Witenalp (TA. Weiten-), Chli, Spicher (Speicher), Schijen (Schien), Uf den Bächen (Auf), Uf em Steinbach, Sunnig Wichel (Sonnig), Selegg (Seel-). Das ü, das in der Urner, wie in der Gomser Mundart zu i wird, bewahrt Cueni in den landläufigen Wörtern: Chrüzli (TA. Krüzli), Chrüzsteinrüti (Kreuzstein-), Rüteli, Porthüsli (Porthüslen); das mundartliche Miller erscheint als Müller, Lick(en) als Lücke (ohne das übliche -n der weiblichen Wörter). Ebenso sind die mundartlichen Extremformen Steckli, Bertli, Biel(en) (TA. Bühl) gemeinschweizerisch als Stöckli, Börtli, Büel(en) gefasst. Das verdunkelte Wort Bristen, das die reine Mundartform von Brüsten, Mehrzahl zu Brust (Ableitung zu bresten, bersten), Erdbruch, darstellt, blieb naturgemäss unberührt. Da auch der Name Chliser dunkel ist, hätte er wohl nicht zu Chlüser, das nicht mehr sagt, geändert werden müssen (TA. Klüser). Das extrem mundartliche Läucher- des TA. ist zu Laucher normalisiert. Ebenso sind die die Kürzung des langen ü andeutenden Rütti, Rütteli des TA. zu Rüti, Rüteli ausgeglichen. Das alte verderbte Culma ist zu Gulmen verbessert, ebenso das ungeschickte Fellmer zu Felmis (aus Feld-mos, also eigentlich Fälmis, weil verdunkelt). Dass das Urner Wort Fire(n) für Gletscher als Firn gefasst ist, wie Hore(n) als Horn, wird jedermann begreifen. Eine unnötige Ungleichheit besteht zwischen Porthüsli und Börtlilücke, denn es handelt sich wohl um ein und das selbe Bestimmungswort (Bort, Bord, schmaler Abhang). Anstatt der vom Kartographen gebildeten alten Talbezeichnung Etzli-Thal setzt der neue Kartenredaktor die rein volkstümliche Etzli.

Wenn dieses für die Landeskarte 1:50000 ausgewählte Namengut auch nicht gross ist, so zeugt es doch für eine von bestimmten Grundsätzen gestützte, wohlüberlegte, schweizerische Haltung. Neben diesem endgültigen Namenbild bietet Cueni auf einem weitern Kärtchen das selbe Tal im Masstab 1:25000 mit viel mehr Flurnamen in rein mundartlicher Schreibung (Tafel 2, Karte links). Das beweist, dass man sich heute des bodenständigen Sprachgutes mit liebevoller Sorgfalt annimmt, dass es mit der oberflächlichen Schriftdeutschelei vorbei ist. Wenn die Landes-Topographie bei ihren künftigen Aufnahmen fortfährt, dermassen sprachreinigend zu wirken, so schafft sie ein Kartenwerk, das vor dem Volk wie vor der Wissenschaft als würdiges Denkmal schweizerdeutscher Sprachpflege bestehen wird.

Ein Schwingungsproblem aus dem Flugzeugbau: Ruderfrequenz und Flatterfrequenz

Von K. H. GROSSMANN und E. BADER, Dornier-Werke A.-G., Altenrhein

Einleitung

So speziell die im Titel angedeutete Frage erscheint, so häufig stellt sie sich in anderer Verkleidung, nämlich dann, wenn ein schwingungsfähiges System — es braucht nicht gerade ein Flugzeug zu sein — zur praktischen Behandlung als ein solches von weniger Freiheitsgraden aufgefasst wird, als es tatsächlich hat. Die sogenannten Konstanten des so schematisierten Systems (hier die «Eigenfrequenz» des Ruders) hängen dann in Wirklichkeit von der Frequenz ω der betrachteten Schwingung (hier der Flatterfrequenz) ab [1]). Einer ersten Schätzung $\omega = \omega_1$ entspricht ein erster Satz von «Konstanten», der, in die Schwingungsgleichungen eingesetzt, eine Frequenz ω_2 liefert. Dieser entspricht ein zweiter Konstantensatz, diesem eine dritte Frequenz usw. Die Rechnung wird solange wiederholt, bis zwischen angenommener und gefolgerter Frequenz hinreichende Uebereinstimmung erzielt ist.

Das «Flattern» von Flugzeugen ist eine gefürchtete Begleiterscheinung der heute, namentlich im Sturzflug, erreichten hohen Fluggeschwindigkeiten. Bei Ueberschreitung einer gewissen kritischen Geschwindigkeit schlägt die Arbeit der durch eine spontane Schwingung von Flugzeugteilen geweckten Luftkräfte unversehens aus einer vorher dämpfenden in eine heftig anfachende um: so heftig, dass schon manchem Piloten die Zeit gefehlt hat, das immer wilder flatternde Flugzeug vor der Zerstörung und sich vor dem Tod zu bewahren. Die kritische Geschwindigkeit durch bauliche Vorkehren über die vorgesehene Höchstgeschwindigkeit zu heben, ist darum zu einer Hauptsorge der Flugzeugbauer geworden. Zu den zum Flattern neigenden Flugzeugteilen gehören die Ruder: Quer-, Seiten-, Höhenruder. Die Eigenfrequenz eines Ruders (Ruderfrequenz) kann die kritische Geschwindigkeit entscheidend beeinflussen.

Die Ruderfrequenz? Wir werden zeigen, dass hierunter verschiedene Frequenzen verstanden werden können. Sie auseinanderzuhalten und jene, ω^*, zu bestimmen, die in die Flatterrechnung eingeht, ist zur Vermeidung gefährlicher Konfusionen wichtig und das Ziel der nachfolgenden Untersuchung.

[1]) Wir sagen «Frequenz» und meinen die «Kreisfrequenz»: Schwingungszahl in 2π sec.

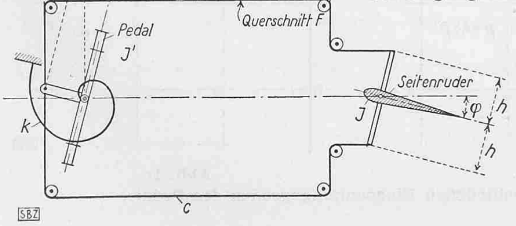

Abb. 1. Schema des Seitensteuers

Das Seitensteuer

Wir beschränken uns auf das in Abb. 1 skizzierte Beispiel des Seitenruders, es dem Leser überlassend, unsere Betrachtung auf Höhen- und Querruder auszudehnen.

Pilotenbeine figurieren unter den gebräuchlichen Maschinen-Elementen nicht, doch sind wir genötigt, sie als solche auszugeben, am einfachsten, indem wir die Masse der auf das Pedal gesetzten Füsse durch einen Zuschlag zu dessen Trägheitsmoment berücksichtigen und den Widerstand der Beinmuskeln durch ein «federndes», d. h. dem Pedalausschlag proportionales Rückkehrmoment schematisieren.

Jedes der beiden vorgespannten Steuerseile habe den Querschnitt F, die Länge L und den Elastizitätsmodul E, also die Steifigkeit

$$c = EF/L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese Steife erteilen wir den beiden Federn, als die wir die Seile, ihre Massen vernachlässigend, zunächst auffassen. Im letzten Abschnitt überprüfen wir die Zulässigkeit dieser Stilisierung durch Vergleich mit dem Ergebnis einer Analyse der zugrundeliegenden Längsschwingung der Seile.

Der vorerst betrachtete vereinfachte Schwingverband besteht also aus zwei durch zwei Federn der Steife c (Kraft/Länge) verbundene Schwungmassen von den Trägheitsmomenten I (Ruder) und I' (Pedal mit Füssen), diese zudem einer Rückstellfeder der Steife k (Moment/radians) ausgesetzt, jene einem äusseren Moment M (der Luftkräfte und allfälliger, etwa durch eine Rumpfschwingung hervorgerufener Trägheitskräfte).

Die Bewegungsgleichungen

Bei Wahl der (im selben Sinne positiv gerechneten) Dreh-Winkel φ, φ' der beiden Schwungmassen als Lagekoordinaten ist

$$T = \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{I'}{2}\dot{\varphi}'^2$$

die kinetische Energie unseres Verbandes. Bei festem φ' entspricht der Variation $\delta\varphi$ die Arbeit $Q_1\,\delta\varphi$; Q_1 setzt sich offenbar aus dem äusseren Moment M um die Ruderdrehachse und dem durch die «Seilfedern» ausgeübten Kräftepaar $-2hc\,(h\varphi - h'\varphi')$ zusammen. Einer Variation $\delta\varphi'$ entspricht die Arbeit $Q_2\,\delta\varphi'$, wo Q_2 ausser dem Seilmoment $-2h'c\,(h'\varphi' - h\varphi)$ das «Einspannmoment» $-k\varphi'$ umfasst. Die beiden Lagrange'schen Bewegungs-Gleichungen lauten daher [2]):

$$I\ddot{\varphi} = -2ch^2\varphi + 2chh'\varphi' + M$$

$$I'\ddot{\varphi}' = -(2ch'^2 + k)\varphi' + 2chh'\varphi$$

Uns interessieren harmonische Schwingungen:

$$\varphi = A\,e^{i\omega t} \qquad \varphi' = A'\,e^{i\omega t} \qquad M = M_1\,e^{i\omega t}$$

Deren komplexe Amplituden A, A', M_1 sind mithin durch folgende Bedingungen verknüpft:

[2]) Natürlich führt der Drallsatz, auf die beiden Schwungmassen angewendet, zu den selben Gleichungen.

Elementare Schwingungsverbände

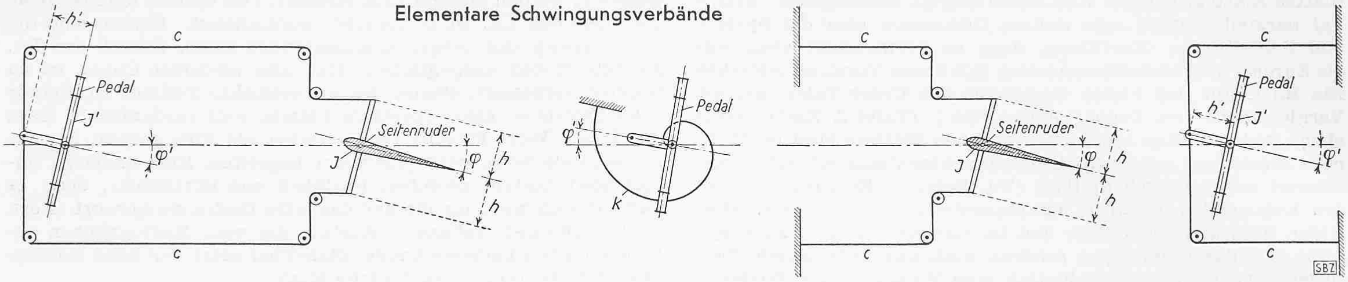

Abb. 3a. Eigenfrequenz $\bar\omega = \sqrt{\bar p}$ Abb. 3b. Eigenfrequenz $\check\omega = \sqrt{\check p}$ Abb. 3c. Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{p_0}$ Abb. 3d. Eigenfrequenz $\omega' = \sqrt{p'}$

$$\left.\begin{aligned}(-Ip+2ch^2)\,A - 2chh'\,A' &= M_1\\ -2chh'\,A + (-I'p+2ch'^2+k)\,A' &= 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

p bezeichnet das Frequenzquadrat:

$$p = \omega^2$$

Es folgt:

$$\frac{D\,(p)}{-I'p+2ch'^2+k}\,A = M_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Hierin ist $D\,(p)$ die Determinante des Gleichungssystems (2):

$$D\,(p) = \begin{vmatrix} -Ip+2ch^2, & -2chh'\\ -2chh', & -I'p+2ch'^2+k\end{vmatrix} = (-I'p+2ch'^2+k)\,(-Ip+C) \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

mit

$$C = 2ch^2\left(1 - \frac{2ch'^2}{-I'p+2ch'^2+k}\right) \quad . \; . \quad (5)$$

Mit Rücksicht auf (4) kann man (3) in folgender Form schreiben:

$$-IpA + CA = M_1 \qquad \text{oder} \qquad I\ddot\varphi + C\varphi = M \quad . \quad (6)$$

Es sieht also aus, als ob das Ruder ausser M einer Rückstellfeder von der Steifigkeit C (Moment/radians) ausgesetzt wäre. In der Tat pflegt man bei Flatterrechnungen den wirklichen Schwingverband (Abb. 1) einfach durch ein so gefedertes Ruder (Abb. 2, unten) zu ersetzen. Dessen Eigenfrequenz ist

$$\omega^* = \sqrt{p^*} \qquad p^* = C/I \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Dreierlei ist zu beachten: Erstens ist C kein Festwert, sondern die durch (5) gegebene Funktion von p. Zweitens wird C für einen gewissen p-Bereich negativ. Die einer «Feder» von negativer Steife ausgesetzte Schwungmasse ist aber offenbar keiner harmonischen Eigenschwingung fähig; die durch (7) definierte (imaginäre) «Ruderfrequenz» verliert mit dem Vorzeichenwechsel ihren physikalischen Sinn. Drittens ist die Amplitude M_1 des äusseren Momentes, immer unter Voraussetzung einer harmonischen, das Seitensteuer miterfassenden Flatter-Schwingung, keine Konstante, sondern, wie hier nicht zu begründen, proportional zu A:

$$M_1 = f\,(p,\; V)\,A$$

Bei gegebener Flughöhe hängt der komplexe Proportionalitäts-Faktor f, wie angedeutet, ausser von p, von der Fluggeschwindigkeit V ab. Nach (6) folgt somit aus $A \neq 0$ die komplexe Bestimmungsgleichung

$$Ip + C\,(p) = f\,(p,\; V) \quad . \quad (8)$$

für das Wertepaar p, V.

Die Eigenschwingungen des Schwingverbandes

Bei Eigenschwingungen, die sich spontan, für $M_1 = 0$ einstellen, muss die Determinante $D\,(p)$ des Gleichungssystems (2) verschwinden:

$$D\,(p) = 0 \quad (9)$$

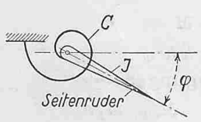

Abb. 2. Ersatz-Seitensteuer Ruderfrequenz $\omega^* = \sqrt{p^*}$

Betrachten wir zunächst statt des unsrigen die vier in Abb. 3 skizzierten einfacheren Verbände a bis d. Die Frage nach den bezüglichen Eigenfrequenzen $\bar\omega$, $\check\omega$, ω_0, ω' führt beim ersten Schwingverband auf die Gleichung

$$D_1\,(p) = 0$$

mit

$$D_1\,(p) = \begin{vmatrix} -Ip+2ch^2, & -2chh'\\ -2chh', & -I'p+2ch'^2\end{vmatrix} = II'p^2 - 2c\,(I'h^2 + Ih'^2)\,p \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Für den ersten Verband gilt demnach:

$$\bar p = \bar\omega^2 = \frac{2ch^2}{I} + \frac{2ch'^2}{I'}, \quad (\bar p_1 = 0) \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Für den zweiten Verband gilt:

$$\check p = \check\omega^2 = \frac{k}{I'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Für den dritten offenbar:

$$p_0 = \omega_0^2 = \frac{2ch^2}{I} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Für den vierten:

$$p' = \omega'^2 = \frac{2ch^2}{I'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Offenbar ist

$$D\,(p) = D_1\,(p) + k\,(-Ip+2ch^2) = II'\,[p^2 - (\bar p + \check p)\,p + p_0\,\check p] \quad . \quad (15)$$

Die beiden Lösungen von (9) sind somit:

$$p_{1,2} = \frac{\bar p + \check p}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(\bar p + \check p)^2 - 4\,p_0\,\check p} \quad . \; . \; . \quad (16)$$

Das Ersatzruder

Man pflegt, wie gesagt, bei Flatterrechnungen das Seitenruder nach Abb. 2 als eine durch eine elastische Feder der Steifigkeit C (Moment/radians) zurückgehaltene Schwungmasse zu schematisieren. Das schadet solange nicht, als man die «Eigen-Frequenz» ω^* des Idealruders nicht mit den tatsächlichen Eigen-Frequenzen $\omega_1 = \sqrt{p_1}$, $\omega_2 = \sqrt{p_2}$ verwechselt. Diese sind zwei durch die mechanischen Parameter gemäss (16) gegebene Festwerte; jene hängt gemäss (7) und (4) oder (5) vom Frequenz-

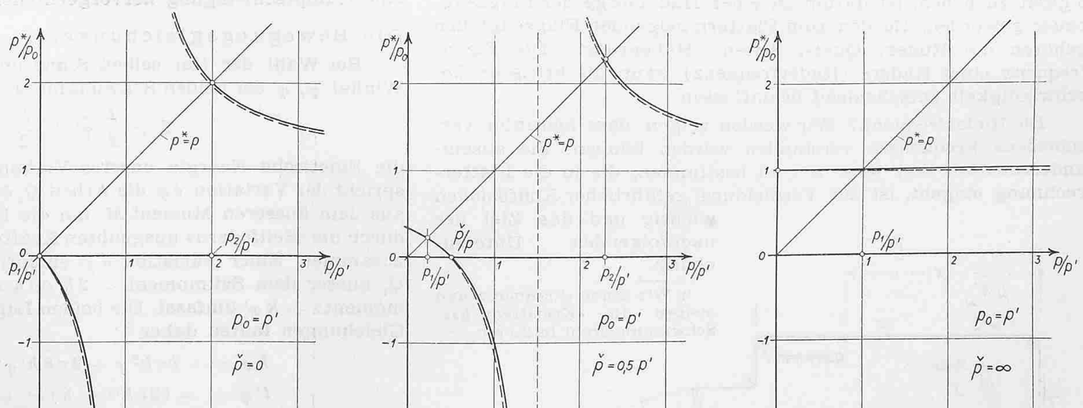

Abb. 4a. Abb. 4b. Abb. 4c.

Zusammenhang zwischen Flatter- und Ruderfrequenz bei verschiedenen Einspannungsgraden des Pedals. Gestrichelte Kurven: Verlauf nach der genaueren Theorie

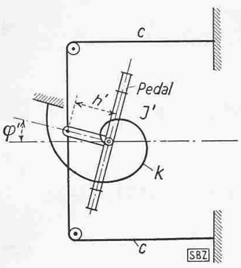

Abb. 5. Elementarer Schwingverband, Eigenfrequenz $\sqrt{\check{p} + p'}$

Quadrat $p = \omega^2$ des (beim Grenzübergang zur Eigenschwingung verschwindenden) äusseren Momentes ab:

$$p^* = \frac{C}{I} =$$

$$p + \frac{D(p)}{I(-I'p + 2ch'^2 + k)} =$$

$$= p_0\left(1 - \frac{p'}{-p + p' + \check{p}}\right)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = 1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\check{p} - p}{p'}} \qquad (17)$$

Diskussion

Bei der Untersuchung eines bestimmten Flatterfalles, an dem ausser dem Seitensteuer sich etwa noch der Flugzeugrumpf mit einer Biege- oder Drehschwingung beteiligt, ist neben der kritischen Geschwindigkeit V, die diese gemeinsame Flatter-Schwingung ermöglicht, deren Frequenzquadrat p die zweite Unbekannte; p ist auch das Frequenzquadrat des oben eingeführten äusseren Momentes M. Eine komplexe (zwei reellen äquivalente) Bestimmungsgleichung wie (8) für V und die Flatterfrequenz $\omega = \sqrt{p}$ ergibt sich aus der Berechnung sämtlicher mitwirkender aerodynamischen, elastischen und Trägheitskräfte; in dieser Berechnung bildet der hier erörterte Zusammenhang zwischen ω und der sogenannten Ruderfrequenz $\omega^* = \sqrt{p^*}$ ein wesentliches Glied. Diesen durch (17) gelieferten Zusammenhang veranschaulicht Abb. 4a für $\check{p} = 0$ (freies Pedal), Abb. 4b für $\check{p} = 0{,}5\,p'$, Abb. 4c für $\check{p} = \infty$ (festes Pedal).

Vergleichen wir, um diese Hyperbeln besser zu verstehen, die komplexen Schwingungsamplituden hA und $h'A'$ der Enden eines Seils! Nach (2), (12) und (14) ist

$$\frac{hA}{h'A'} = \frac{p' + \check{p} - p}{p'} = 1 + \frac{\check{p} - p}{p'} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

Demnach sind drei p-Bereiche zu unterscheiden: Es ist

$$\frac{hA}{h'A'} < 0 \qquad \text{für } \check{p} + p' < p$$

$$0 < \frac{hA}{h'A'} < 1 \qquad \text{für } \check{p} < p < \check{p} + p'$$

$$1 < \frac{hA}{h'A'} \qquad \text{für } 0 < p < \check{p}$$

Im Bereich

$$\check{p} + p' < p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

schwingen Ruder und Pedal in entgegengesetzter, im Bereich

$$0 < p < \check{p} + p' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

in gleicher Phase. Im Bereich (a), wie auch im Teilbereich

$$0 < p < \check{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b_1)$$

des Bereiches (b) trifft die Schematisierung der Abb. 2 zu: Die Seile wirken hemmend, dem Ruderausschlag entgegen, auf das Ruder. Anders für

$$\check{p} < p < \check{p} + p' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b_2)$$

In diesem zweiten Teilbereich von (b) versagt die durch Abb. 2 angedeutete Vorstellung: Die Seile wirken antreibend, im Sinne seines Ausschlags, auf das Ruder; C und damit p^* ist negativ.

Bei fest eingespanntem Pedal ist, unabhängig von der Flatterfrequenz, $p^* = p_0$. Auch bei federnder, ja bei fehlender Einspannung kommt p^* diesem Grenzwert beliebig nahe, sofern die Flatterfrequenz nur hoch genug ist: Ein genügend hoch frequentes Seilmoment vermag an dem Pedal nicht mehr merklich zu rütteln. In der Tat ist nach (18)

$$\lim_{p \to \infty} \frac{h'A'}{hA} = 0$$

Denkt man sich die Flatterschwingung dagegen immer mehr verlangsamt, so zügelt das in entgegengesetzter Phase schwingende Pedal mittels der Seile das Ruder immer stärker, bis zum Stillstand bei Annäherung von $\sqrt{p}$ an die Resonanzfrequenz $\sqrt{\check{p} + p'}$ des in Abb. 5 skizzierten Schwingverbandes:

$$\lim_{p \to \check{p} + p'} \frac{hA}{h'A'} = 0$$

Es ist, als ob die Ersatzfeder der Abb. 2 sich grenzenlos versteife. In $p = \check{p} + p'$ schlägt ihre «Steifigkeit» C ins negativ Unendliche um, steigt alsdann, bei weiter abnehmendem p, erneut an, von $p = \check{p}$ an wiederum positiv, bei verschwindendem p dem Grenzwert $p_0 \Big/ \left(1 + \dfrac{p'}{\check{p}}\right)$ zustrebend.

Wie aus (4) und (7) hervorgeht, ist p dann und nur dann eine Wurzel eines Polynoms $D(p)$, wenn $p = p^*$: Genau dann, wenn die Flatter- mit einer Eigenfrequenz des wirklichen Schwingverbandes (Abb. 1) zusammenfällt, besteht auch Resonanz mit dem fiktiven Schwinger (Abb. 2). Dieser Umstand ist in Abb. 4 (unter der Annahme $p' = p_0$) zur graphischen Bestimmung der Eigenfrequenzquadrate p_1 und p_2 benutzt. Ersichtlich nehmen, im Einklang mit (16), mit stärkerer Pedal-Einspannung (grösserem $\check{p}$) beide Eigenfrequenzen zu: p_1 wächst von 0 (freies Pedal) bis p_0 (festes Pedal), p_2 wächst von $\overline{p} = p_0 + p'$ nach ∞.

Die Eigenfrequenzen sind experimentell leicht zu ermitteln. Ignoriert man bei freiem Pedal (Abb. 4a) die Eigenfrequenz $\omega_1 = 0$, bei festem Pedal die Eigenfrequenz $\omega_2 = \infty$, so wird man überrascht feststellen, dass «die» Eigenfrequenz bei unendlich starker Pedaleinspannung kleiner ist als bei fehlender Einspannung! Es ist eben

$$(0 = p_{1\,\text{frei}} <)\; p_{1\,\text{fest}} < p_{2\,\text{frei}} \;(< p_{2\,\text{fest}} = \infty)$$

Zur bequemeren Einsicht in die Abhängigkeit der Ruder-Frequenz vom «Einspannungsgrad» des Pedals diene Abb. 6, die p^*/p_0 für verschiedene Werte von p/p' in Funktion von $\check{p}/p'$ darstellt. Diese Hyperbeln zeigen, dass bei gegebener Flatterfrequenz die Ruderfrequenz mit stärkerer Einspannung ansteigt. Allerdings springt, sofern $p > p'$, sofern also die Flatter- die Eigenfrequenz des Schwingverbandes der Abb. 3d übertrifft, die Ruderfrequenz bei Ueberschreiten der Stelle $\check{p} = p - p'$, also bei Resonanz zwischen der Flatterschwingung und der Eigenschwingung des Verbandes der Abb. 5, von $+\infty$ auf $-\infty$ über, sodass für $\check{p} > p - p'$ die Ruderfrequenz durchweg kleiner ist als für $\check{p} < p - p'$.

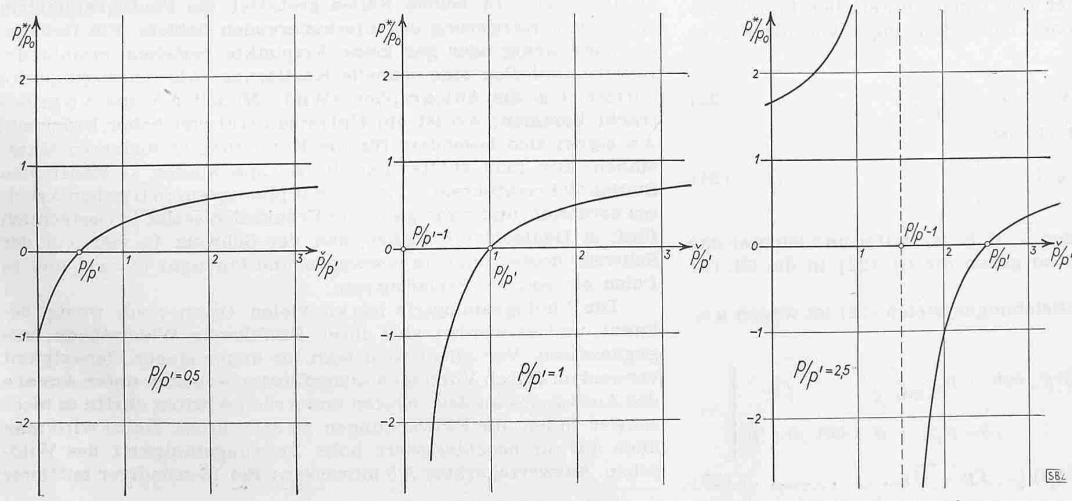

Abb. 6. Abhängigkeit der Ruderfrequenz vom Einspannungsgrad des Pedals bei verschiedenen Flatterfrequenzen

Anhang: Vergleich mit einer genaueren Theorie

Die bisherige Auffassung der Seile als Federn berücksichtigt einzig ihre Elastizität. Will man die Bewegung der Seilenden genauer bestimmen, so hat man die harmonische Längs-Schwingung zu untersuchen, deren das Seil als nicht bloss elastisches, sondern auch massebehaftetes Gebilde fähig ist. Betrachten wir etwa das obere Seil, Abb. 1. Die Längsverschiebung w eines im Abstand x vom Pedalende des Seiles gelegenen Seilpunktes ist bei einer solchen Schwingung eine harmonische Funktion der Zeit mit einer von x abhängigen (komplexen) Amplitude:

$$w(x, t) = U(x)\, e^{i\omega t} \qquad 0 \leq x \leq L$$

Da w der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\omega^2 w$$

gehorcht (E = Elastizitätsmodul, ϱ = Dichte des Seils), $U(x)$ also der Differentialgleichung

$$U'' + \frac{\varrho}{E}\omega^2 U = 0,$$

ist $U(x)$ gleichfalls harmonisch:

$$U(x) = P \sin\left(\beta \frac{x}{L}\right) + Q \cos\left(\beta \frac{x}{L}\right) \qquad \beta = \sqrt{\frac{\varrho}{E}}\, L\,\omega \quad (19)$$

Drücken wir P und Q durch die Schwingungsamplituden der Winkel φ und φ', Abb. 1, aus! Da

$$w(0, t) = h'\varphi' = h' A' e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad w(L, t) = h\varphi = h A e^{i\omega t} \quad (20)$$

ist

$$U(0) = h' A' \quad \text{und} \quad U(L) = h A$$

somit

$$Q = h' A' \quad \text{und} \quad P = \frac{h A}{\sin \beta} - h' A' \cot \beta \quad . \quad . \quad (21)$$

Die nämliche Ueberlegung gilt offenbar auch für das untere Seil, wenn man auf ihm die Verschiebung im entgegengesetzten Sinn positiv rechnet wie auf dem oberen Seil: ihre Amplitude ist gleichfalls von der Form (19), mit den selben, durch (21) gegebenen Konstanten P und Q. Jeder Punkt des unteren Seils bewegt sich also entgegengesetzt gleich wie der ihm auf dem oberen Seil gegenüberliegende Punkt.

Der Ueberschuss K der in einem Seil übertragenen Kraft über die Vorspannung ist bei geeigneter Vorzeichenkonvention

$$K = EF \frac{\partial w}{\partial x} = EF\, U'(x)\, e^{i\omega t}$$

(F = Seilquerschnitt). Daher sind die von den beiden Seilen auf das Pedal und auf das Ruder ausgeübten Kräftepaare (im Uhrzeigersinn positiv gerechnet) beziehentlich

$$M_0 = 2h' EF\, U'(0)\, e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad M_L = -2hEF\, U'(L)\, e^{i\omega t}$$

Der Drallsatz ergibt:

$$I'\ddot{\varphi}' + k\varphi' = M_0 \qquad I\ddot{\varphi} = M + M_L$$

oder

$$-I' p A' + k A' = 2h' EF\, U'(0), \qquad -I p A = M_1 - 2hEF\, U'(L)$$

also, mit Rücksicht auf (19), (21) und (1):

$$\left.\begin{aligned} &\left(-Ip + 2ch^2 \frac{\beta}{\sin \beta} \cos \beta\right) A - 2chh' \times \frac{\beta}{\sin \beta} A' = M_1 \\ &-2chh' \frac{\beta}{\sin \beta} A + \\ &\qquad + \left(-I' p + 2ch'^2 \frac{\beta}{\sin \beta} \cos \beta + k\right) A' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Man kann sich die Steifigkeit c und die Masse $\varrho L F$ eines Seils getrennt in einer Feder und einem materiellen Punkt verkörpert denken, die zusammen einen Schwinger von der Eigen-Frequenz

$$\bar{\bar{\omega}} = \sqrt{\bar{\bar{p}}} \qquad \bar{\bar{p}} = \frac{c}{\varrho L F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

ausmachen. Nach (19) und (1) ist

$$\beta = \frac{\omega}{\bar{\bar{\omega}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

also umso kleiner, je grösser $\bar{\bar{\omega}}$, d. h. je steifer und leichter das Seil ist. Strebt β nach 0, so gehen die Gl. (22) in die Gl. (2) über.

Die Determinante des Gleichungssystems (22) ist wegen $p = \bar{\bar{p}}\beta^2$:

$$\widetilde{D}(\beta) = I I' \begin{vmatrix} -\bar{\bar{p}}\beta^2 + p_0 \beta\, \beta, \cot & -p_0 \dfrac{\beta}{\sin \beta} \\ -p' \dfrac{\beta}{\sin \beta} & , -\bar{\bar{p}}\beta^2 + p'\beta \cot \beta + \check{p} \end{vmatrix} =$$

$$= I' N(\beta)\,(-Ip + \widetilde{C}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

mit

$$\widetilde{C} = I p_0 \left(\beta \cot \beta - \frac{p' \beta^2}{N(\beta) \sin^2 \beta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und

$$N(\beta) = -\bar{\bar{p}}\beta^2 + p'\beta \cot \beta + \check{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Für eine Eigenschwingung ist

$$\widetilde{D}(\beta) = 0$$

d. h., mit Rücksicht auf die Definitionen (11), (13), (14):

$$\frac{\cot \beta}{\beta} = \frac{\bar{\bar{p}}^2 \beta - (p_0 p' + \bar{\bar{p}}\check{p})/\beta}{\bar{\bar{p}}\,\bar{p}\,\beta - p_0 \check{p}/\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Jeder dieser Gleichung genügende Wert β liefert gemäss (24) eine Eigenfrequenz ω.

Aus (22) folgt mit der Abkürzung (27):

$$\frac{\widetilde{D}(\beta)}{I' N(\beta)} A = M_1$$

oder, wegen (25):

$$(-Ip + \widetilde{C})\, A = M_1$$

Wie oben kann man als «Ruderfrequenz» definieren:

$$\widetilde{p} = \frac{\widetilde{C}}{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

sodass

$$\frac{\widetilde{p}}{p_0} = \beta \cot \beta - f(\beta), \quad f(\beta) =$$

$$= \frac{\beta^2}{\sin^2 \beta} \; \frac{p'}{\check{p} + p'\beta \cot \beta - \bar{\bar{p}}\beta^2} \quad (30)$$

Die Gleichungen (30) und (24) bestimmen, wie $\widetilde{p}$ von p abhängt. Wiederum sind, wegen (29) und (25), genau jene p-Werte, für welche

$$\widetilde{p} = p$$

ist, Eigenfrequenzquadrate.

In der Abb. 4 bezeichnen neben den durchgezogenen Kurven für p^*/p_0 die gestrichelten Kurven die genaueren Werte $\widetilde{p}/p_0$ in Funktion von p/p', dies bei der Annahme $\bar{\bar{p}}/p' = 30$. In dem betrachteten p/p'-Bereich ist unsere Auffassung der vorgespannten Steuerseile als elastischer Federn ersichtlich legitim.

MITTEILUNGEN

Topographische Arbeiten im Dienste des europäischen Wiederaufbaues. Eine der wichtigsten Grundlagen für die Planung des Wiederaufbaues sind zuverlässige Karten und Pläne; man braucht sie in den Masstäben 1 : 500 bis 1 : 5000; Photopläne in solchen von 1 : 2000 bis 1 : 10 000. Dieses Material muss möglichst bald in ausreichender Zahl und zu mässigen Kosten zur Verfügung stehen. Die klassischen topographischen Aufnahmeverfahren taugen hierfür nicht; ausser Zeit und Geldmitteln würde es namentlich für ihre Anwendung an den nötigen Vermessungsfachleuten fehlen. Dagegen ist die *Stereophotogrammetrie* das für diese Verhältnisse am besten geeignete Verfahren[1]).

Bei solchen Arbeiten ist vieles vorzusehen, denn es gibt Zonen, in denen durch die Kriegsereignisse alles zerstört ist: Katasterarchive, Eigentums- und Steuerregister, Pläne, Karten, Fixpunkte usw. In andern Zonen werden einzelne Elemente noch erhalten sein. In beiden Fällen gestattet die Photogrammetrie eine rasche Kartierung der interessierenden Gebiete. Für Gebiete, in denen wenig oder gar keine Fixpunkte bestehen, erlaubt die *Lufttriangulation* eine schnelle Kartierung. Als Auswertegeräte dürften u. a. die Autographen «Wild», Modell A5 und A6 in Betracht kommen; A5 ist ein Universalgerät von hoher Präzision, A6 eignet sich besonders für die Kartierung in kleineren Massstäben. Bis 1939 zählte man in Europa ausser 31 staatlichen Stellen 29 Privatbureaux, die sich mit photogrammetrischen Arbeiten befassten, und zwar gab es in Frankreich sechs, in Oesterreich fünf, in Deutschland, Italien und der Schweiz je vier, (in der Schweiz heute fünf), in Norwegen und Portugal je zwei und in Polen ein solches Privatbureau.

Die Photogrammetrie ist an vielen Orten noch wenig bekannt, und es werden sich ihrer Einführung Widerstände entgegensetzen. Vor allem wird man ihr ungenügende Genauigkeit vorwerfen. Durch Vorzeigen ausgeführter Arbeiten unter Angabe des Aufwandes an Zeit, Kosten und Arbeitskräften dürfte es nicht schwer fallen, die Einwendungen zu entkräften. Dabei wird man auch auf die beachtenswert hohe Leistungsfähigkeit des Wildschen Auswertegerätes A5 hinweisen: Bei 16-stündiger mittlerer

[1]) Vgl. SBZ Bd. 123, S. 80* und S. 253 (1944).