

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 125/126 (1945)  
**Heft:** 14

**Artikel:** Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken  
**Autor:** Manger, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83634>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Inhalt: Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken. — Rückblick auf die Jubiläums-Generalversammlung 1944 der G. E. P. — Probleme der Energieverteilung in der Schweiz. — Der Schweiz. Energie-Konsumenten-Verband zur schweizerischen Energiepolitik. — Metall-Trockengleichrichter. — Mitteilungen: Das neue Forschungslaboratorium von Gebrüder Sulzer. Normung auf dem

Gebiete des Schweissens. Pfeilerstellungen bei einem gemauerten Viadukt. Stand der Baukosten. Die Betonstrassen in der Schweiz. Der Schweiz. Autostrassen-Verein. Die neue Maschinenanlage des M. S. «Santis». Eidg. Technische Hochschule. — Nekrologe: Werner Lang. Felix Weber. Jakob Buchli. — Wettbewerbe. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 125 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 14

## Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken

Von Ing. Dr. A. MANGER, in Firma Ed. Züblin & Cie., A.-G., Zürich

Schluss von Seite 140

### 6. Balken auf Stützen mit verschiedenem elastischem Senkmasse

a) Diese Systeme können, wenn sie sonst normal sind, mit den Diagrammen verhältnismässig rasch untersucht werden.

Wir bezeichnen das wirkliche System mit «W. S.», das zugehörige Normal-System dagegen als «G. S.» (Grundsystem), die beliebigen anormalen Stützen mit  $A, B, \dots$  und ihr elastisches Senkmasse mit  $e_a, e_b, \dots \pm e$ . Alle Grössen des G. S. werden mit  $C, M, c, \mu$  usw. bezeichnet, diejenigen des W. S. dagegen mit  $C', M', c', \mu'$  usw. (Die  $c', \mu'$  sind dann nicht zu verwechseln mit  $c', \mu'$  in Gl. (4) (5) und in den Diagrammen).

Betrachtet man eine normale Stütze als eine Gruppe von Federn, so lässt sie sich, durch Wegnehmen einer Feder oder Hinzufügen einer Zusatzfeder in eine anormale Stütze mit gegebenem  $e_a$  verwandeln. Man kann also das W. S. durch das G. S. ersetzen, wenn man das letzte, ausser mit den gegebenen Lasten, mit den Kräften  $X_a, X_b, \dots$  belastet, die die Zusatzfedern erzeugen, d. h. die zur Umwandlung des Verhaltens der Normalstützen  $A, B, \dots$  in dasjenige der anormalen Stützen  $A, B, \dots$  notwendig sind.

b) Die Kräfte  $X_a, X_b, \dots$  sind proportional zu den dann im G. S. entstehenden Stützendrücken  $C^*_a, C^*_b, \dots$  der Anormalstützen  $A, B, \dots$  und es wird z. B.  $X_a$  positiv, d. h. nach unten auf den Balken wirkend, wenn  $e_a > e$  ist.

Jeder Kraft  $X$  am Balken entspricht eine, am Stützenfuss wirkende, entgegengesetzte Kraft  $-X$ . Der wirkliche Druck einer anormalen Stütze  $A$  wird also

$$C'_a = C^*_a - X_a \quad (18)$$

Setzt man die Senkung einer anormalen Stütze  $A$  im G. S. derjenigen im W. S. gleich, so folgt  $eC^*_a = e_aC'_a$ , d. h. mit

$$C^*_a = C_a + X_a \cdot c_{aa} + X_b c_{ab} + \dots$$

und unter Beachtung von Gl. (18):

$$e[C_a + X_a c_{aa} + X_b c_{ab} + \dots] = e_a[C_a + X_a(c_{aa} - 1) + X_b c_{ab} + \dots] \quad (19)$$

und daraus leicht, mit

$$c^*_{aa} = c_{aa} + \frac{e_a}{e - e_a} \quad (20)$$

$$X_a c^*_{aa} + X_b c_{ab} + \dots = -C_a \quad (21)$$

Für jede Unbekannte kann man eine solche Gleichung aufstellen und somit  $X_a, X_b, \dots$  aus den Auflagerdrücken  $C_a, C_b, \dots$  des G. S. berechnen.

c) Wenn nur zwei anormale Stützen  $A, B$  vorhanden sind (die natürlich z. B. auch  $C$  und  $E$  sein können) ergibt sich folgender Vorgang:

Mit den Senkmassen  $e, e_a, e_b$  der normalen und anormalen Stützen und den, aus dem Diagramm des G. S. entnommenen Werten  $c_{aa}, c_{bb}, c_{ab}$  berechnet man die Festwerte

$$c^*_{aa} = c_{aa} + \frac{e_a}{e - e_a}, \quad c^*_{bb} = c_{bb} + \frac{e_b}{e - e_b} \quad (22)$$

$$v = c^*_{aa} c^*_{bb} - c_{ab}^2 \quad (23)$$

$$v_a = c^*_{aa}/v, \quad v_b = c^*_{bb}/v, \quad v' = c_{ab}/v \quad (24)$$

Dann ermittelt man die im betreffenden Lastfall entstehenden Stützdrücke  $C_a$  und  $C_b$  des G. S. und berechnet

$$\left. \begin{aligned} X_a &= -C_a v_b + C_b v' \\ X_b &= -C_b v_a + C_a v' \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Diese Kräfte lässt man nun als zusätzliche Lasten (positiv nach unten) auf den Balken des G. S. wirken und erhält Zusatz-Stützdrücke  $\Delta C$  und -Momente  $\Delta M$ . Die endgültigen Stützdrücke  $C'$  und Momente  $M'$  werden dann, unter Beachtung von Gl. (18):

$$\left. \begin{aligned} \text{bei normalen Stützen: } C' &= C + \Delta C \\ \text{bei anormalen Stützen: } C' &= C + \Delta C - X \\ \text{Momente: } M' &= M + \Delta M \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

d) Ist eine anormale Stütze, z. B.  $A$  starr ( $e_a = 0$ ) so wird in Gl. (22)  $c^*_{aa} = c_{aa}$ . Setzt man andererseits  $e_a = \infty$ , so wird  $c^*_{aa} = c_{aa} - 1$ . Die Stütze  $A$  des G. S. fällt dann im W. S. ganz weg. Man kann also auch Systeme untersuchen, bei denen gewisse Spannweiten doppelt so gross wie die anderen sind.

e) Aus c) ergibt sich folgender Vorgang für die Umwandlung der Einflusslinien des G. S. in diejenigen des W. S. mit zwei anormalen Stützen  $A, B, \dots$ :

Für die Auflagerkraft  $C'_z = c'_z P$  bei irgend einer Stütze  $Z$  wird die Einflussordinate  $c'_{zx}$  an der Stelle  $x$

$$c'_{zx} = c_{zx} + \Delta c_{zx} \quad (27)$$

worin

$$\Delta c_{zx} = c_{ax} \lambda_{za} + c_{bx} \lambda_{zb} \quad (28)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{za} &= v' c_{zb} - v_b c_{za} \\ \lambda_{zb} &= v' c_{za} - v_a c_{zb} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Gl. (27 bis 29) gelten für alle Stützen  $Z (= A, B, C, \dots)$  mit folgender, der Gl. (18) entsprechender Einschränkung:

Bei den anormalen Stützen  $A$  bzw.  $B$ , also wenn  $z = a$  oder  $z = b$ , d. h. wenn  $c_{za} = c_{aa}$  bzw.  $c_{zb} = c_{bb}$ , ist in den Gl. (29)  $c_{aa}$  durch  $c_{aa} - 1$  bzw.  $c_{bb}$  durch  $c_{bb} - 1$  zu ersetzen.

Die Zusatz-Ordinaten  $\Delta c_{zx}$  (Gl. 27) lassen sich damit tabellarisch sehr einfach ermitteln. Man berechnet zuerst für alle Stützen  $Z (= A, B, C, \dots)$  d. h. für  $z = a, b, c, \dots$ , die  $\lambda_{za}, \lambda_{zb}$  mit Gl. (29, 29a), in denen  $v', v_a, v_b$ , die Festwerte aus Gl. (22 bis 24) und die  $c_{za}, c_{zb}$  den  $c_z$ -Linien des G. S. bei  $A$  bzw.  $B$  (anormale Stützen) entnommen werden. Dann folgen die  $\Delta c_{zx}$  für alle Stützen  $Z$  aus Gl. (28). Darin sind  $c_{ax}, c_{bx}$  die Ordinaten der  $c_a$ - bzw.  $c_b$ -Linien des G. S. bei  $x$ , d. h. bei den Laststellungen  $x = A, 1, B, 2, C, 3, \dots$ , und  $\Delta c_{zx}$  nach Gl. (27) die Zusatzordinaten zu  $c_{zx}$ , ebenfalls bei  $A, 1, B, 2, C, \dots$ .

Im Laufe der Rechnung ergeben sich folgende wertvolle Kontrollmöglichkeiten:

1. Es ist  $\Sigma c_{za} = \Sigma c_{zb} = 1$ , ( $z = a, b, c, d, \dots$ )
2. Es ist  $c_{ba} = c_{ab}$  nach Maxwell, weil im G. S.  $e_a = e_b = e$  ist.
3. Es ist  $\Sigma \lambda_{za} = \Sigma \lambda_{zb} = 0$ , ( $z = a, b, c, d, \dots$ )
4. Es ist  $\Sigma \Delta c_{zx} = 0$  ( $z = a, b, c, d, \dots$ ) bei jeder Lastlage  $x$ .

Aus den  $c_z$ -Einflusslinien des G. S. folgen endlich die gesuchten  $c'_z$ -Linien des W. S. durch Addieren der  $\Delta c_z$ .

Abb. 6a zeigt z. B. das Ergebnis für einen Balken  $ABCD$  mit  $k = 2$ , bei dem das elastische Senkmasse bei der Stütze  $A$  doppelt so gross und bei der Stütze  $C$  halb so gross wie dasjenige der Normalstützen  $B$  und  $D$  angenommen wurde. Die gestrichelten Kurven gelten für das zugehörige normale System.

Für ein Moment  $M'_s = \mu'_s P$  im W. S. folgt analog an der Stelle  $x$

$$\mu'_{sx} = \mu_{sx} + \Delta \mu_{sx} \quad (31)$$

Aus Gl. (11) ergibt sich nun, dass  $\Delta \mu_{sx}$  linear von den  $\Delta c_{zx}$  abhängt. Wir betrachten ein beliebiges Feld  $n$ , dessen linkes Auflager mit  $L$  und rechtes Auflager mit  $R$  bezeichnet wird. Für  $L, R$  und für die Feldmitte  $n$  heissen dann in Gl. (31):

$$\begin{aligned} \text{die } \mu_{sx} \text{ des G. S.: } & \mu_{lx}, \mu_{rx}, \mu_{nx} \\ \text{die } \Delta \mu_{sx} \text{ des G. S.: } & \Delta \mu_{lx}, \Delta \mu_{rx}, \Delta \mu_{nx} \end{aligned}$$

Für die letzten ergibt die Entwicklung aus Gl. (11) die Formeln:

$$\Delta \mu_{rx} = \Delta \mu_{lx} + \sum_{z=a}^z \Delta c_{zx} \quad (32)$$

$$\Delta \mu_{nx} = \frac{\Delta \mu_{lx} + \Delta \mu_{rx}}{2} \quad (33)$$

Mit Gl. (32) folgen also die Zusatz-Ordinaten für jedes Auflagermoment  $M'_r$  aus denjenigen des links vorgehenden  $M'_l$ , wobei die  $\Delta c_{zx}$  bereits aus Gl. (28) bekannt sind. Nach Gl. (33) sind ferner die Zusatzordinaten für  $M'_n$  die Mittelwerte derjenigen für  $M'_l$  und  $M'_r$ . Die tabellarische Auswertung der Gl. (32, 33) für die verschiedenen Lastlagen  $x$ , d. h. bei  $A, 1, B, 2, C, \dots$  ist einfach, da für das erste Auflager  $A$  alle  $\Delta \mu_{ax} = 0$  sind. Daraus folgen die  $\Delta \mu_{bx}$  mit Gl. (32) und die  $\Delta \mu_{lx}$  mit Gl. (33). Aus den  $\Delta \mu_{bx}$  ergeben sich dann analog die  $\Delta \mu_{cx}$  und  $\Delta \mu_{dx}$  usw. Als Schlusskontrolle müssen, wie bei  $A$ ,

<sup>9)</sup> Bezüglich  $l$  vgl. Fussnote 4.

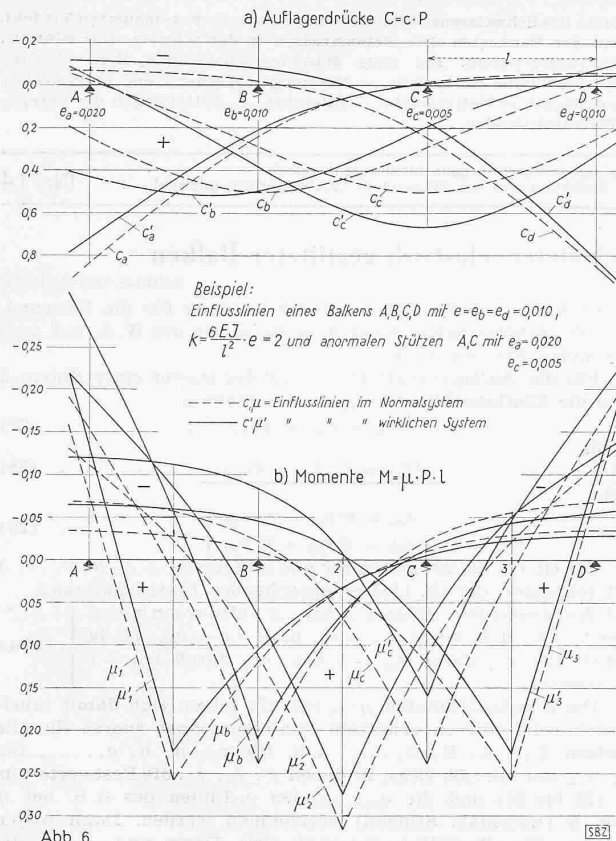


Abb. 6

auch beim letzten Auflager rechts alle  $\Delta\mu = 0$  sein. Kleine Differenzen können sich dabei infolge der wiederholten Verwendung der Gl. (32) mit entsprechender Summation von Teilbeträgen ergeben.

Aus den  $\mu$ -Einflusslinien des G.S. folgen endlich die gesuchten  $\mu'$ -Linien des W.S. durch Addition der  $\Delta\mu$ . Für das oben erwähnte Beispiel ist das Ergebnis in Abb. 6b dargestellt.

Bei symmetrisch liegenden, gleichartig anormalen Stützen genügt es natürlich, die Einflusslinien der linken Trägerhälfte umzuwandeln.

f) Wenn nur eine Stütze, z. B. A anormal ist, setzt man in Gl. (22 bis 24)  $e_b = e$  und erhält  $v_a = v' = 0$  und  $v_b = \frac{1}{c_{aa}^*}$  somit in Gl. (25):  $X_b = 0$  und

$$X_a = -\frac{C_a}{c_{aa}^*} \quad (34)$$

Für die Einflusslinien vereinfachen sich die Gl. (28, 29) auf

$$\Delta c_{zx} = -c_{ax} \left( \frac{c_{za}}{c_{aa}^*} \right) \quad (35)$$

Hierin ist, entsprechend (29a) bei  $z = a$  der Wert  $c_{aa}$  durch  $c_{aa}^* = 1$  zu ersetzen.

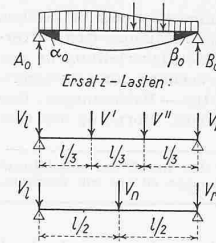
Für die Einflusslinien der Momente bleiben die Gl. (32, 33) gültig.

g) Sind endlich mehr als zwei Stützen, also z. B. vier Stützen anormal, so rechnet man zweckmässig das System zuerst so durch, wie wenn nur zwei dieser Stützen anormal wären. Das so erhaltene System wird darauf wieder als G.S. betrachtet und nach dem gleichen Vorgang, durch Hinzufügen der anderen anormalen Stützen in das W.S. verwandelt.

## 7. Benützung der Einflusslinien zur Berechnung verschiedener Belastungs- und Verformungs-Einflüsse

a) Die, normalerweise für wandernde, senkrechte Einzel-Lasten benützten Einflusslinien, können auch für andere Belastungen und für Verformungen aus Temperatur-Einflüssen usw. verwendet werden.

Betrachtet man ein Feld irgend eines Balken-Systems zunächst als einfachen Balken, so biegt es sich infolge seiner Belastung oder infolge anderer Verformungen (Temperatur, Eigenspannungen, Senkungen usw.). Wenn man vom Einfluss allfälliger Lastkomponenten in der Balkenaxe absieht, entstehen also aus den Lasten senkrechte Auflagerdrücke  $A_o, B_o$  und allgemein Verdrehungen  $\alpha_o, \beta_o$  der Endquerschnitte (Abb. 7, oben).



Ersatz verschiedener Belastungen oder Verformungen einfacher Balken mit konstantem  $EJ$  durch Gruppen von 4 Lasten  $V_l, V', V'', V_r$  oder (bei Symmetrie) von 3 Lasten  $V_l, V', V_r$  welche die gleichen Auflagerdrücke  $A_o, B_o$  und Verdrehungen  $\alpha_o, \beta_o$  der Endquerschnitte ergeben

| Lastfall: | $x/l$ | $V_l$  | $V'$  | $V''$ | $V_r$   |  |
|-----------|-------|--|---|-------|---|--|
| 1)        | 0,1   | 0,5355   | 0,6885  | —     | 0,2835  | 0,0595   |
|           | 0,2   | 0,2240   | 1,0080  | —     | 0,2880  | 0,0560   |
|           | 0,3   | 0,0385   | 1,0395  | —     | 0,0945  | 0,0165   |
|           | 0,4   | 0,0480   | 0,8640  | —     | 0,2160  | 0,0320   |
|           | 0,5   | 0,0625   | 0,5625  | —     | 0,5625  | 0,0625   |
| 2)        | 1/6   | 0,1035   | 0,0926  | —     | 0,0370  | 0,0078   |
|           | 2/6   | 0,1252   | 0,2633  | —     | 0,0688  | 0,0138   |
|           | 3/6   | 0,1173   | 0,3981  | —     | 0,0231  | 0,0077   |
|           | 4/6   | 0,1109   | 0,4452  | —     | 0,1104  | 0,0003   |
|           | 5/6   | 0,1173   | 0,4121  | —     | 0,2825  | 0,0216   |
| 3)        | oder  | 0,1250   | 0,3750  | —     | 0,3750  | 0,1250   |
|           | 1/6   | —  | —   | 2/3   | —   | 1/6  |
| 4)        | 1/6   | 0,0613   | 0,0332  | —     | 0,0141  | 0,0030   |
|           | 2/6   | 0,0898   | 0,1056  | —     | 0,0361  | 0,0074   |
|           | 3/6   | 0,1005   | 0,1830  | —     | 0,0424  | 0,0089   |
|           | 4/6   | 0,1035   | 0,2448  | —     | 0,0225  | 0,0075   |
|           | 5/6   | 0,1056   | 0,2822  | —     | 0,0216  | 0,0073   |
|           | 6/6   | 0,1083   | 0,3000  | —     | 0,0750  | 0,0167   |
| 5)        | 0,0   | 5,5000   | 9,0000  | —     | 4,5000  | 1,0000   |
|           | 0,1   | 3,8350   | 4,9050  | —     | 3,3050  | 0,2350   |
|           | 0,2   | 2,4400   | 1,6200  | —     | 1,0800  | 0,2600   |
|           | 0,3   | 1,3150   | 0,8550  | —     | 2,6550  | 0,4850   |
|           | 0,4   | 0,4600   | 2,5200  | —     | 3,4200  | 0,4400   |
|           | 0,5   | 0,1250   | 3,3750  | —     | 3,3750  | 0,1250   |
| 6)        |       | +4   | —   | -8    | —   | +4   |
|           |       | $K_t = \frac{EJ}{h \cdot l} \cdot \omega \cdot \Delta t$ |   |       |   | $\cdot K_t$  |
| 7)        |       | +27  | -81   | —     | +81   | -27  |
|           |       | $K_\delta = \frac{EJ}{l^3} \cdot \delta$                 |   |       |   | $\cdot K_\delta$   |
| 8)        |       | Einführen eines Gelenkes G                               |   |       |   |  |
|           |       | $\begin{pmatrix} -3 \\ +4,5 \cdot f \end{pmatrix}$       | $\begin{pmatrix} +7,5 \\ -13,5 \cdot f \end{pmatrix}$ | —     | $\begin{pmatrix} -6 \\ +13,5 \cdot f \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} +1,5 \\ -4,5 \cdot f \end{pmatrix} \cdot K_G$ |
|           |       | $K_G = \frac{6EJ}{l^3} \cdot \frac{\delta_G}{f(1-f)}$    |   |       |   |  |

Abb. 7

587

Diese vier Grössen sind 'die Ursache aller weiteren' Kräfte im Gesamtsystem und können meist leicht berechnet werden.

Man kann nun  $\alpha_o, \beta_o, A_o, B_o$  auch mit vier ideellen, senkrechten Ersatzlasten  $V$  erzeugen, deren Lage frei wählbar ist. Sind diese vier Ersatzlasten bekannt, so können aus ihnen alle Stützendrücke und Momente des Gesamtsystems mit den Einflusslinien berechnet werden.

Es muss dann nur noch die ideelle  $M_o$ - oder  $Q_o$ -Fläche des belasteten Feldes durch die wirkliche  $M_o$ -,  $Q_o$ -Fläche ersetzt werden. Die wirkliche  $M_o$ -Fläche wird also einfach von der erhaltenen Feld-Schlusslinie aus eingezeichnet. Wenn das betreffende Feld nicht belastet, sondern nur verformt ist, gilt die Feld-Schlusslinie selbst.

b) Wir wählen folgende Bezeichnung und Lage der  $V$ -Lasten:  $V_l$  auf dem linken,  $V_r$  auf dem rechten Auflager,  $V'$  in  $l/3$  von links,  $V''$  in  $l/3$  von rechts (Abb. 7, oben).

Wenn die Belastung oder Verformung des Feldes beidseits gleiche Drehwinkel erzeugt ( $\alpha_o = \beta_o$ ), also besonders bei feldsymmetrischen Lastfällen, kann man entweder mit diesen vier Lasten oder auch mit nur drei Lasten rechnen, d. h. mit  $V_l, V_r$  und  $V_n$  in Feldmitte.

Die Bedingung, dass die  $V$  die gleichen Werte  $\alpha_o, \beta_o, A_o, B_o$  wie die Feldbelastung oder Verformung erzeugen müssen, führt, wie leicht abzuleiten, zu den Werten

$$\left. \begin{aligned} V' &= \frac{\alpha_o \beta' - \beta_o \alpha'}{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''} & V'' &= \frac{\beta_o \alpha' - \alpha_o \beta'}{\alpha' \beta'' - \beta' \alpha''} \\ V_l &= A_o - \frac{2}{3} V' - \frac{1}{3} V'' & V_r &= B_o - \frac{1}{3} V' - \frac{2}{3} V'' \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

bzw. bei drei  $V$ -Kräften, (wenn  $\alpha_o = \beta_o$ ):

$$V_n = \frac{\alpha_o}{\alpha_n}, \quad V_l = A_o - \frac{1}{2} V_n, \quad V_r = B_o - \frac{1}{2} V_n \quad (36b)$$

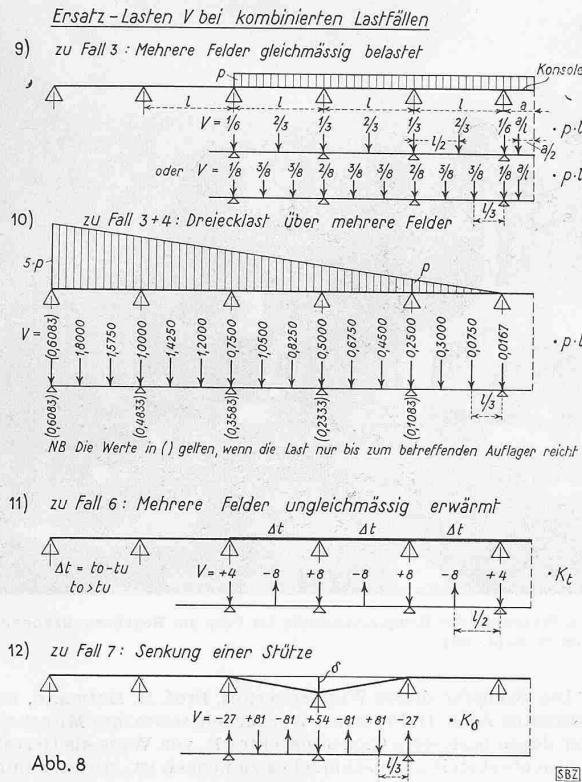


Abb. 8

Hierin sind

$\alpha'$ ,  $\beta'$ , die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  infolge  $V' = 1$

$\alpha''$ ,  $\beta''$ , die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  infolge  $V'' = 1$

$\alpha_n$  der Winkel  $\alpha (= \beta)$  infolge  $V_n = 1$

Bei konstantem  $EJ$  des betrachteten Feldes folgen aus Gl. (36 a, b) leicht

$$\left. \begin{aligned} V_l &= A_0 - 3 \frac{L}{l} + 1,5 \frac{R}{l} & V_r &= B_0 - 3 \frac{R}{l} + 1,5 \frac{L}{l} \\ V' &= 7,5 \frac{L}{l} - 6 \frac{R}{l} & V'' &= 7,5 \frac{R}{l} - 6 \frac{L}{l} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

bzw. wenn  $\alpha_0 = \beta_0$ :

$$V_l = A_0 - \frac{4}{3} \frac{L}{l} \quad V_n = \frac{8}{3} \frac{L}{l} \quad V_r = B_0 - \frac{4}{3} \frac{L}{l} \quad (38)$$

Hierin sind  $L$  bzw.  $R$  die sog. Belastungsglieder und also

$$\frac{L}{l} = \frac{6 EJ}{l^2} \alpha_0 \quad \frac{R}{l} = \frac{6 EJ}{l^2} \beta_0 \quad (39)$$

Die Ersatzlasten  $V$  werden teils positiv, teils negativ, d. h. nach unten bzw. oben auf den Balken wirken. Ihre Summe ist immer gleich der gesamten Feldbelastung.

Bei Balken auf festen Stützen braucht man die Ersatzlasten  $P_l$  und  $P_r$  überhaupt nicht, da sie weder Momente noch Querkräfte erzeugen und die Stützendrücke einfach aus den wirklichen Lasten und der Momentenlinie folgen.

c) In der Tabelle Abb. 7 sind, für oft vorkommende Belastungs- und Verformungsfälle, die nach Gl. (37 bis 39) berechneten Ersatzlasten  $V$  zusammengestellt. Ist z. B. ein Feld dreieckförmig nach Lastfall 4 belastet, wobei  $x = \frac{4}{6} l$  sei, so wird

$$V_l = 0,1035 pl, \quad V' = 0,2448 pl, \quad V'' = -0,0225 pl, \quad V_r = 0,0075 pl$$

Damit kann jede beliebige Einflusslinie ausgewertet werden, indem  $V_l$ ,  $V_r$  auf die beiden Feldauflager und  $V'$ ,  $V''$  auf die Felddrittel gestellt werden.

Die Lastfälle können auch kombiniert und auf verschiedene Felder gleichzeitig ausgedehnt werden. Einige wichtige Fälle dieser Art sind in Abb. 8 dargestellt.

d) Es sei betont, dass die Tabelle Abb. 7 nur ein konstantes  $EJ$  des belasteten oder verformten Feldes voraussetzt. Sie kann also auch für Systeme dienen, die in anderen Feldern ungleiche Spannweiten und verschiedene oder variable  $EJ$  aufweisen, wenn der Einfluss senkrechter Lasten  $V$  in diesen Systemen leicht, mit oder ohne Einflusslinien, berechnet werden kann.

Eine weitere Voraussetzung ist, dass waagrechte Lastkomponenten (in Balkenaxe) keinen Einfluss auf die Momente usw. haben, d. h. dass der Balken hierfür unter Umständen zusätzlich untersucht werden muss.

Abb. 7 wird somit nicht nur für die Normalsysteme der Diagramme nützen, sondern allgemein auch für elastisch und starr gestützte Balken mit beliebigen Spannweiten und verschiedenen, jedoch feldweise konstantem  $EJ$ .

e) Wir besprechen noch einige Lastfälle der Abb. 7 und 8: Lastfall 1. Der scheinbar widersinnige Ersatz einer Last  $P$  durch vier andere Lasten kann in Verbindung mit anderen Fällen zweckmässig sein und ferner zu Kontrollbeziehungen für die Einflusslinien führen. Die wichtigste folgt aus dem Fall P in Feldmitte ( $x/l = 0,5$ ). Bezeichnet man die Ordinaten irgend einer Einflusslinie unter  $V_l$ ,  $V'$ ,  $V''$ ,  $V_r$ ,  $V_n$  allgemein mit  $y_l$ ,  $y'$ ,  $y''$ ,  $y_r$ ,  $y_n$ , so folgt aus der Tabelle

$$-0,0625 P y_l + 0,5625 P y' + 0,5625 P y'' - 0,0625 P y_r = P y_n$$

und daraus leicht

$$y' + y'' = \frac{16}{9} y_n + \frac{1}{9} (y_l + y_r) \quad (40)$$

Diese Beziehung erlaubt, als Kontrolle des Kurvenverlaufes in beliebigen Feldern  $l$  der Einflusslinien für  $C$ ,  $M$ ,  $Q$  die Prüfung der Summe ( $y' + y''$ ) der Felddrittel-Ordinaten aus denjenigen bei den Feldmitten ( $y_n$ ) und Auflager ( $y_l + y_r$ ), vorausgesetzt, dass der betrachtete Kurvenast stetig verläuft und dass  $EJ$  zwischen  $y_l$  und  $y_r$  konstant ist.

Gl. (40) gilt also z. B. für jede Kurve und in jedem Feld  $l$  der Abb. 6a und 6b, mit Ausnahme der unstetigen Aeste bei den Spitzen der  $\mu$ -Kurven, ebenso in Abb. 3 für die Felder A—B, C—D, dagegen nicht für Feld B—C (Unstetigkeit bei S).

Sie lässt sich aber auf diese unstetigen Kurvenstrecken erweitern, da sie z. B. in Abb. 6b für jeden Kurvenast der  $\mu$ -Spitzen gilt, wenn man ihn verlängert.

Man erhält dann, besonders für die  $\mu$ -Linien der Feldmitten die Gleichung:

$$\mu' + \mu'' = \frac{16}{9} \mu_n + \frac{1}{9} (\mu_l + \mu_r) - \frac{1}{9} \quad (40a)$$

mit der die Kontrolle der Felddrittel-Ordinaten beidseits der  $\mu$ -Spitze in Feldmitte möglich wird.

Für die Einflusslinien der Querkräfte genügt es ferner, dort, wo sie unstetig sind, die Gl. (40) einfach auf die stetige  $\Sigma C_l$ -Linie anzuwenden (vgl. Abb. 3, Feld B—C), womit die  $\eta_s$ -Linie indirekt kontrolliert wird.

Lastfall 7. Die Schrägstellung eines einzelnen Feldes kommt vor, wenn alle Auflager links des Feldes sich gleich senken. Betrachtet man z. B. die Dauben eines zylindrischen Fasses als elastisch auf den Ringen gelagert, so tritt der Fall 7 auf, wenn es teilweise mit heisser Flüssigkeit gefüllt wird, da die erwärmten Ringe sich alle gleich weit radial ausdehnen. Gleichzeitig wäre dann noch der Fall 10 (Wasserdruck) und Fall 11 (ungleiche Erwärmung der Dauben) zu berücksichtigen.

Lastfall 8 dient zur Berechnung von Balken-Systemen mit einem Gelenk  $G$  in irgendwelchem Feld. Die Grösse des Knickwinkels bei  $G$ , d. h. von  $\delta_G$  und also von  $K_G$  ist meist gleichgültig. Praktisch setzt man einfach  $K_G = 1$  und rechnet also ohne weiteres mit

$$V_l = -3 + 4,5f, \quad V' = +7,5 - 13,5f, \quad V'' = -6 + 13,5f, \\ V_r = +1,5 - 4,5f$$

Diese Werte betrachtet man als Tonnen-Betrag der ideellen Ersatzlasten  $V$  und konstruiert damit die Momenten-Linie  $M_V$  im System ohne Gelenk. Sie stellt ein Polygon mit geraden Seiten von Stütze zu Stütze dar, bei dem besonders das Moment  $M_{VG}$  bei  $G$  und die Nullpunkte (Schnittpunkte der Polygonseiten mit der Balkenaxe) wichtig sind. Um sie genau zu erhalten, kann man die  $V$  auch beliebig vervielfachen.

Wir betrachten nun irgend einen Lastfall (bei dem das Gelenkfeld oder auch nur andere Felder belastet oder verformt werden) und berechnen zuerst die entstehende Momentenlinie  $M$  im System ohne Gelenk. Es sei dann  $M_G$  das Moment bei  $G$ , das im wirklichen System mit Gelenk  $G$  verschwinden muss. Hierzu ist nur nötig, das  $M_V$ -Momenten-Polygon im Verhältnis

$\frac{M_G}{M_{VG}}$  zu vergrössern oder zu verkleinern und es der  $M$ -Linie zu überlagern. Praktisch erfolgt dies sehr einfach ohne Umrechnung, indem in die Momenten-Linie  $M$  ein Zusatz-Polygon derart eingezeichnet wird, dass  $M_G = 0$  wird und dass seine Seiten die Schlusslinie der  $M$ -Linie bei allen Nullpunkten der  $M_V$ -Linie schneiden (d. h. dass bei diesen Nullpunkten kein Zusatz-Moment entsteht).

Aus dem Zusatz-Polygon ergeben sich auch sofort die Zusatz-Stützendrücke und -Querkräfte.

Aus obigem folgt, dass, wenn man z. B. in einem durchlaufenden Balken die Momenten-Linie aus Eigengewicht kennt und ein Gelenk bei einem ihrer Nullpunkte einschaltet, dadurch keine Zusatz-Momente aus Eigengewicht entstehen, weil  $M_G = 0$  ist.



Auch die *Einfluss-Linien des Systems mit einem Gelenk* ergeben sich leicht aus denjenigen des gelenklosen Trägers. Die Zusatz-Ordinaten für irgend eine  $\mu$ -Linie sind z. B. offenbar proportional der  $-\mu_G$ -Linie (Einflusslinie des Momentes bei  $G$  im gelenklosen System, mit umgekehrten Vorzeichen), wobei das Reduktionsmass leicht aus der Betrachtung der  $M_V$ -Linie folgt.

Sind mehrere Felder mit je einem Gelenk vorhanden, so verfährt man analog Abschnitt 6g, d. h. superponiert *successive* die den Gelenken  $G_1, G_2, G_3, \dots$  entsprechenden Zusatz-Polygone. Dabei wird das erste Zusatz-Polygon aus dem gelenklosen System, das zweite aus dem System mit einem Gelenk erhalten, usw.

*Lastfälle 9 bis 12 (Abb. 8).* Die Fälle 9 und 10 setzen bei den belasteten Feldern gleiche Spannweiten und feldweise konstantes, wenn auch unter Umständen verschiedenes  $EJ$  voraus, die Fälle 11 und 12 dagegen, dass auch  $EJ$  bei allen verformten Feldern konstant und gleich ist. Andernfalls müssen die Lastfälle mit Abb. 7 kombiniert werden. Im Lastfall 12 bedeutet  $\delta$  eine gegebene Senkung der Stütze, die im übrigen elastisch gleich nachgiebig bleibt wie die andern.

## Rückblick auf die Jubiläums-Generalversammlung 1944 der G. E. P.

Wie üblich, sollen auch jene Leser der SBZ, die nicht zu den Mitgliedern der G. E. P. gehören, nachstehend kurz orientiert werden über den Verlauf der letzten Generalversammlung. Eine erste Mitteilung darüber findet sich in Bd. 124, S. 186; nun soll aber noch etwas eingehender berichtet werden. Es möge dies anhand des vor kurzem erschienenen 64. Bulletin der G. E. P. geschehen, dem wir nachstehenden Auszug entnehmen. Für den vollen Wortlaut der gehaltenen Reden und viele weitere Einzelheiten, ferner für den der Versammlung vorangegangenen Akademischen Fortbildungskurs, sowie für die Fabrik- und Bauplatzbesichtigungen vom Montag, 25. Sept. sei auf das genannte Bulletin verwiesen, das ausserdem Geschäftsbericht und Rechnung der G. E. P., Nachrufe auf verstorbene Ausschussmitglieder, einen Bericht der Akademischen Studiengruppe (A. St. G.) und das Verzeichnis neu in die G. E. P. eingetretener Mitglieder enthält, deren Zahl vom 1. Juli 1942 bis 31. Dez. 1944 die ansehnliche Grösse von 380 erreicht. Wir möchten wünschen, dass sich ihnen, angeregt auch durch vorliegenden Festbericht, alle jene Ehemaligen anschliessen, die der G. E. P. noch fern stehen, deren Mitarbeit aber die Gesellschaft zu immer besserer Erfüllung ihrer Aufgaben braucht!

### Der Begrüssungsabend am 23. September

Wer nicht schon als Teilnehmer am Akademischen Fortbildungskurs im Laufe der Tage Festkarte und Abzeichen gelöst hatte, fand dazu Gelegenheit im Empfangsbureau der Bahnhofhalle, das den ganzen Samstagmittag hindurch stark besucht war und damit Zeuge wurde mancher fröhlichen Begrüssung ehemaliger Kameraden, die nach Möglichkeit noch an den Besichtigungen der E. T. H.-Institute teilnahmen. Erst recht ging es fröhlich zu und her in den Sälen der Zunfthäuser und anderer Gaststätten, von denen kaum einer nicht durch ein Kurs-Nachtessen belegt war; in der Saffran brachten sie sogar das Kunststück fertig, gleichzeitig fünf solcher Anlässe unterzubringen. Bei strömendem Regen erstieg man nach acht Uhr abends die Polyterrasse und betrat durch den einzig geöffneten Eingang der Rotunde von der Rämistrasse her den alten, vertrauten Bau. Aber welch unerwarteter Empfang: Ganze Bäume und Wälder von Buchen, Erlen, Birken und Ahorn sprosssten und grünten in den Nischen und zwischen den Säulen, Tausende von Kerzenlichtern flackerten auf den rotgedeckten, herbstblumenübersäten Geburtstagstischen der 75-jährigen G. E. P., Scharen von Kellnern manövierten geschmeidig zwischen Tischen und Stühlen hindurch, Sphärenmusik erklang aus der im Dunkel sich verlierenden hohen Mittelhalle, übertönt vom frohen Geplauder allüberall, während von allen Seiten her farbig quellendes Licht die Szenerien übergoss. Meisterhaft war die künstlerische Konzeption, echt das Material, aus dem gestaltet worden war und vollendet die Durcharbeitung — und zwar bis ins Kleinste hinein, bis zur feinen Pointierung architektonischer Profile mit Papierstreifen, und bis zu den Filzpantöffelchen der Landstühle, die auf dem Bodenbelag nicht knirschen durften...



Intime Ecke am Westende der Erdgeschosshalle im Poly am Begrüssungsabend der G. E. P. vom 23. Sept. 1944

Die Schöpfer dieses Wunderwerkes, Prof. H. Hofmann, seine Assistenten Arch. H. Platz und W. Stücheli, sowie ihre Mitarbeiter, unter denen besonders Garteninspektor R. von Wyss als Gestalter des prachtvollen Blumenschmuckes zu nennen ist, ernteten immer wieder das verdiente Lob. Auch der Leistungen des Wirtschaftsbetriebes, den Bahnhofwirt Primus Bon führte, sei gebührend gedacht, hatten doch auch hier die Vorbereitungen Wochen in Anspruch genommen, damit der Apparat ein paar Stunden lang auf voller Tourenzahl laufen konnte. Ganz besonders trifft dies auch zu auf den Einsatz von Hausmeister Custer mit seinen Arbeitsbrigaden!

Die Dekoration im Erdgeschoss war, wie auch unsere Abbildungen zeigen, ganz auf rein künstlerischen, visuellen Elementen aufgebaut. Anders im Keller: da hatten die Professoren Dunkel und Hess die Wirkung mit dem geistigen Inhalt der Darstellungen erzielt und auch damit den Nagel auf den Kopf getroffen: Alle Prominenten aus G. E. P. und E. T. H. prangten — durch Kunstmaler H. Pieper in flotter Schwarzweissmanier auf Karton gemalt — an den Wänden, in mehr oder weniger sinnvolle Tätigkeiten vertieft und so glänzend charakterisiert, dass sie das helle Entzücken der Betrachter bildeten, die nicht säumten, sich in Gruppen zu Füssen der Halbgötter niederzulassen, plaudernd, zechend, singend, begleitet von einer Bauernkapelle aus dem Säulamt, die Freund Bumm mit scharfem Ohr ausgewählt hatte.

Solchermassen war auf schönste Weise allen der gegen 1000 Anwesenden, jedem nach seinem Geschmack, Gelegenheit geboten sich zu begrüßen, auszusprechen und Wiedersehen zu feiern ohne jede Störung durch ein offizielles Programm. Es wurde denn auch froh und reichlich davon Gebrauch gemacht, indem



C. F. Baeschlin

Ph. Etter

C. Jegher

F. Stüssi

K. Kobelt

Nach der Generalversammlung im Poly, 24. Sept. 1944