

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 125/126 (1945)  
**Heft:** 14

## **Inhaltsverzeichnis**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Inhalt: Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken. — Rückblick auf die Jubiläums-Generalversammlung 1944 der G. E. P. — Probleme der Energieverteilung in der Schweiz. — Der Schweiz. Energie-Konsumenten-Verband zur schweizerischen Energiepolitik. — Metall-Trockengleichrichter. — Mitteilungen: Das neue Forschungslaboratorium von Gebrüder Sulzer. Normung auf dem

Gebiete des Schweissens. Pfeilerstellungen bei einem gemauerten Viadukt. Stand der Baukosten. Die Betonstrassen in der Schweiz. Der Schweiz. Autostrassen-Verein. Die neue Maschinenanlage des M. S. «Santis». Eidg. Technische Hochschule. — Nekrologe: Werner Lang. Felix Weber. Jakob Buchli. — Wettbewerbe. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 125

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich  
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 14

## Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken

Von Ing. Dr. A. MANGER, in Firma Ed. Züblin & Cie., A.-G., Zürich

Schluss von Seite 140

### 6. Balken auf Stützen mit verschiedenem elastischem Senkmasse

a) Diese Systeme können, wenn sie sonst normal sind, mit den Diagrammen verhältnismässig rasch untersucht werden.

Wir bezeichnen das wirkliche System mit «W. S.», das zugehörige Normal-System dagegen als «G. S.» (Grundsystem), die beliebigen anormalen Stützen mit  $A, B, \dots$  und ihr elastisches Senkmasse mit  $e_a, e_b, \dots \pm e$ . Alle Grössen des G. S. werden mit  $C, M, c, \mu$  usw. bezeichnet, diejenigen des W. S. dagegen mit  $C', M', c', \mu'$  usw. (Die  $c', \mu'$  sind dann nicht zu verwechseln mit  $c', \mu'$  in Gl. (4) (5) und in den Diagrammen).

Betrachtet man eine normale Stütze als eine Gruppe von Federn, so lässt sie sich, durch Wegnehmen einer Feder oder Hinzufügen einer Zusatzfeder in eine anormale Stütze mit gegebenem  $e_a$  verwandeln. Man kann also das W. S. durch das G. S. ersetzen, wenn man das letzte, ausser mit den gegebenen Lasten, mit den Kräften  $X_a, X_b, \dots$  belastet, die die Zusatzfedern erzeugen, d. h. die zur Umwandlung des Verhaltens der Normalstützen  $A, B, \dots$  in dasjenige der anormalen Stützen  $A, B, \dots$  notwendig sind.

b) Die Kräfte  $X_a, X_b, \dots$  sind proportional zu den dann im G. S. entstehenden Stützendrücken  $C^*_a, C^*_b, \dots$  der Anormalstützen  $A, B, \dots$  und es wird z. B.  $X_a$  positiv, d. h. nach unten auf den Balken wirkend, wenn  $e_a > e$  ist.

Jeder Kraft  $X$  am Balken entspricht eine, am Stützenfuss wirkende, entgegengesetzte Kraft  $-X$ . Der wirkliche Druck einer anormalen Stütze  $A$  wird also

$$C'_a = C^*_a - X_a \quad (18)$$

Setzt man die Senkung einer anormalen Stütze  $A$  im G. S. derjenigen im W. S. gleich, so folgt  $eC^*_a = e_aC'_a$ , d. h. mit

$$C^*_a = C_a + X_a \cdot c_{aa} + X_b c_{ab} + \dots$$

und unter Beachtung von Gl. (18):

$$e[C_a + X_a c_{aa} + X_b c_{ab} + \dots] = e_a[C_a + X_a(c_{aa} - 1) + X_b c_{ab} + \dots] \quad (19)$$

und daraus leicht, mit

$$c^*_{aa} = c_{aa} + \frac{e_a}{e - e_a} \quad (20)$$

$$X_a c^*_{aa} + X_b c_{ab} + \dots = -C_a \quad (21)$$

Für jede Unbekannte kann man eine solche Gleichung aufstellen und somit  $X_a, X_b, \dots$  aus den Auflagerdrücken  $C_a, C_b, \dots$  des G. S. berechnen.

c) Wenn nur zwei anormale Stützen  $A, B$  vorhanden sind (die natürlich z. B. auch  $C$  und  $E$  sein können) ergibt sich folgender Vorgang:

Mit den Senkmassen  $e, e_a, e_b$  der normalen und anormalen Stützen und den, aus dem Diagramm des G. S. entnommenen Werten  $c_{aa}, c_{bb}, c_{ab}$  berechnet man die Festwerte

$$c^*_{aa} = c_{aa} + \frac{e_a}{e - e_a}, \quad c^*_{bb} = c_{bb} + \frac{e_b}{e - e_b} \quad (22)$$

$$v = c^*_{aa} c^*_{bb} - c_{ab}^2 \quad (23)$$

$$v_a = c^*_{aa}/v, \quad v_b = c^*_{bb}/v, \quad v' = c_{ab}/v \quad (24)$$

Dann ermittelt man die im betreffenden Lastfall entstehenden Stützdrücke  $C_a$  und  $C_b$  des G. S. und berechnet

$$\left. \begin{aligned} X_a &= -C_a v_b + C_b v' \\ X_b &= -C_b v_a + C_a v' \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Diese Kräfte lässt man nun als zusätzliche Lasten (positiv nach unten) auf den Balken des G. S. wirken und erhält Zusatz-Stützdrücke  $\Delta C$  und -Momente  $\Delta M$ . Die endgültigen Stützdrücke  $C'$  und Momente  $M'$  werden dann, unter Beachtung von Gl. (18):

$$\left. \begin{aligned} \text{bei normalen Stützen: } C' &= C + \Delta C \\ \text{bei anormalen Stützen: } C' &= C + \Delta C - X \\ \text{Momente: } M' &= M + \Delta M \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

d) Ist eine anormale Stütze, z. B.  $A$  starr ( $e_a = 0$ ) so wird in Gl. (22)  $c^*_{aa} = c_{aa}$ . Setzt man andererseits  $e_a = \infty$ , so wird  $c^*_{aa} = c_{aa} - 1$ . Die Stütze  $A$  des G. S. fällt dann im W. S. ganz weg. Man kann also auch Systeme untersuchen, bei denen gewisse Spannweiten doppelt so gross wie die anderen sind.

e) Aus c) ergibt sich folgender Vorgang für die Umwandlung der Einflusslinien des G. S. in diejenigen des W. S. mit zwei anormalen Stützen  $A, B, \dots$ :

Für die Auflagerkraft  $C'_z = c'_z P$  bei irgend einer Stütze  $Z$  wird die Einflussordinate  $c'_{zx}$  an der Stelle  $x$

$$c'_{zx} = c_{zx} + \Delta c_{zx} \quad (27)$$

worin

$$\Delta c_{zx} = c_{ax} \lambda_{za} + c_{bx} \lambda_{zb} \quad (28)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{za} &= v' c_{zb} - v_b c_{za} \\ \lambda_{zb} &= v' c_{za} - v_a c_{zb} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Gl. (27 bis 29) gelten für alle Stützen  $Z (= A, B, C, \dots)$  mit folgender, der Gl. (18) entsprechender Einschränkung:

Bei den anormalen Stützen  $A$  bzw.  $B$ , also wenn  $z = a$  oder  $z = b$ , d. h. wenn  $c_{za} = c_{aa}$  bzw.  $c_{zb} = c_{bb}$ , ist in den Gl. (29)  $c_{aa}$  durch  $c_{aa} - 1$  bzw.  $c_{bb}$  durch  $c_{bb} - 1$  zu ersetzen.

Die Zusatz-Ordinaten  $\Delta c_{zx}$  (Gl. 27) lassen sich damit tabellarisch sehr einfach ermitteln. Man berechnet zuerst für alle Stützen  $Z (= A, B, C, \dots)$  d. h. für  $z = a, b, c, \dots$ , die  $\lambda_{za}, \lambda_{zb}$  mit Gl. (29, 29a), in denen  $v', v_a, v_b$ , die Festwerte aus Gl. (22 bis 24) und die  $c_{za}, c_{zb}$  den  $c_z$ -Linien des G. S. bei  $A$  bzw.  $B$  (anormale Stützen) entnommen werden. Dann folgen die  $\Delta c_{zx}$  für alle Stützen  $Z$  aus Gl. (28). Darin sind  $c_{ax}, c_{bx}$  die Ordinaten der  $c_a$ - bzw.  $c_b$ -Linien des G. S. bei  $x$ , d. h. bei den Laststellungen  $x = A, 1, B, 2, C, 3, \dots$ , und  $\Delta c_{zx}$  nach Gl. (27) die Zusatzordinaten zu  $c_{zx}$ , ebenfalls bei  $A, 1, B, 2, C, \dots$

Im Laufe der Rechnung ergeben sich folgende wertvolle Kontrollmöglichkeiten:

1. Es ist  $\Sigma c_{za} = \Sigma c_{zb} = 1$ , ( $z = a, b, c, d, \dots$ )
2. Es ist  $c_{ba} = c_{ab}$  nach Maxwell, weil im G. S.  $e_a = e_b = e$  ist.
3. Es ist  $\Sigma \lambda_{za} = \Sigma \lambda_{zb} = 0$ , ( $z = a, b, c, d, \dots$ )
4. Es ist  $\Sigma \Delta c_{zx} = 0$  ( $z = a, b, c, d, \dots$ ) bei jeder Lastlage  $x$ .

Aus den  $c_z$ -Einflusslinien des G. S. folgen endlich die gesuchten  $c'_z$ -Linien des W. S. durch Addieren der  $\Delta c_z$ .

Abb. 6a zeigt z. B. das Ergebnis für einen Balken  $ABCD$  mit  $k = 2$ , bei dem das elastische Senkmasse bei der Stütze  $A$  doppelt so gross und bei der Stütze  $C$  halb so gross wie dasjenige der Normalstützen  $B$  und  $D$  angenommen wurde. Die gestrichelten Kurven gelten für das zugehörige normale System.

Für ein Moment  $M'_s = \mu'_s P$  im W. S. folgt analog an der Stelle  $x$

$$\mu'_{sx} = \mu_{sx} + \Delta \mu_{sx} \quad (31)$$

Aus Gl. (11) ergibt sich nun, dass  $\Delta \mu_{sx}$  linear von den  $\Delta c_{zx}$  abhängt. Wir betrachten ein beliebiges Feld  $n$ , dessen linkes Auflager mit  $L$  und rechtes Auflager mit  $R$  bezeichnet wird. Für  $L, R$  und für die Feldmitte  $n$  heissen dann in Gl. (31):

$$\left. \begin{aligned} \text{die } \mu_{sx} \text{ des G. S.: } \mu_{lx}, \mu_{rx}, \mu_{nx} \\ \text{die } \Delta \mu_{sx} \text{ des G. S.: } \Delta \mu_{lx}, \Delta \mu_{rx}, \Delta \mu_{nx} \end{aligned} \right\}$$

Für die letzten ergibt die Entwicklung aus Gl. (11) die Formeln:

$$\Delta \mu_{rx} = \Delta \mu_{lx} + \sum_{z=a}^z \Delta c_{zx} \quad (32)$$

$$\Delta \mu_{nx} = \frac{\Delta \mu_{lx} + \Delta \mu_{rx}}{2} \quad (33)$$

Mit Gl. (32) folgen also die Zusatz-Ordinaten für jedes Auflagermoment  $M'_r$  aus denjenigen des links vorgehenden  $M'_l$ , wobei die  $\Delta c_{zx}$  bereits aus Gl. (28) bekannt sind. Nach Gl. (33) sind ferner die Zusatzordinaten für  $M'_n$  die Mittelwerte derjenigen für  $M'_l$  und  $M'_r$ . Die tabellarische Auswertung der Gl. (32, 33) für die verschiedenen Lastlagen  $x$ , d. h. bei  $A, 1, B, 2, C, \dots$  ist einfach, da für das erste Auflager  $A$  alle  $\Delta \mu_{ax} = 0$  sind. Daraus folgen die  $\Delta \mu_{bx}$  mit Gl. (32) und die  $\Delta \mu_{lx}$  mit Gl. (33). Aus den  $\Delta \mu_{bx}$  ergeben sich dann analog die  $\Delta \mu_{cx}$  und  $\Delta \mu_{dx}$  usw. Als Schlusskontrolle müssen, wie bei  $A$ ,

\*) Bezüglich  $l$  vgl. Fussnote 4.