Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 125/126 (1945)
Heft: 14

Inhaltsverzeichnis

Band 125 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 14

Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken

Von Ing. Dr. A. MANGER, in Firma Ed. Züblin & Cie., A.-G., Zürich

Schluss von Seite 140

6. Balken auf Stützen mit verschiedenem elastischem Senkmass

a) Diese Systeme können, wenn sie sonst normal sind, mit den Diagrammen verhältnismässig rasch untersucht werden.

Wir bezeichnen das wirkliche System mit «W. S.», das zugehörige Normal-System dagegen als «G. S.» (Grundsystem), die beliebigen *anormalen* Stützen mit A, B, ... und ihr elastisches Senkmass mit e_a, e_b .... $\neq e$. Alle Grössen des G. S. werden mit C, M, c, μ usw. bezeichnet, diejenigen des W. S. dagegen mit C', M', c', μ' usw. (Die c', μ' sind dann nicht zu verwechseln mit c', μ' in Gl. (4) (5) und in den Diagrammen).

Betrachtet man eine normale Stütze als eine Gruppe von Federn, so lässt sie sich, durch Wegnehmen einer Feder oder Hinzufügen einer Zusatzfeder in eine *anormale* Stütze mit gegebenem e_a verwandeln. *Man kann also das W. S. durch das G. S. ersetzen, wenn man das letzte, ausser mit den gegebenen Lasten, mit den Kräften X_a, X_b ... belastet, die die Zusatzfedern erzeugen, d. h. die zur Umwandlung des Verhaltens der Normalstützen A, B, ... in dasjenige der anormalen Stützen A, B, ... notwendig sind.*

b) Die Kräfte X_a, X_b, ... sind proportional zu den *dann* im G. S. entstehenden Stützendrücken C^*_a, C^*_b, ... der Anormalstützen A, B, .. und es wird z. B. X_a *positiv*, d. h. *nach unten auf den Balken wirkend*, wenn $e_a > e$ ist.

Jeder Kraft X am Balken entspricht eine, *am Stützenfuss wirkende, entgegengesetzte Kraft* $-X$. Der wirkliche Druck einer anormalen Stütze A wird also

$$C'_a = C^*_a - X_a \quad \dots\dots\dots \quad (18)$$

Setzt man die Senkung einer anormalen Stütze A im G. S. derjenigen im W. S. gleich, so folgt $e\,C^*_a = e_a C'$, d. h. mit

$$C^*_a = C_a + X_a \,.\; c_{aa} + X_b c_{ab} + \dots\dots$$

und unter Beachtung von Gl. (18):

$$e\,[C_a + X_a c_{aa} + X_b c_{ab} + \dots] = \\ = e_a\,[C_a + X_a\,(c_{aa} - 1) + X_b c_{ab} + \dots] \quad (19)$$

und daraus leicht, mit

$$c^*_{aa} = c_{aa} + \frac{e_a}{e - e_a} \quad \dots\dots \quad (20)$$

$$\underline{X_a c^*_{aa} + X_b c_{ab} + \dots\dots = -C_a} \quad \dots \quad (21)$$

Für jede Unbekannte kann man eine solche Gleichung aufstellen und somit X_a, X_b, .. aus den Auflagerdrücken C_a, C_b, ... des G. S. berechnen.

c) *Wenn nur zwei anormale Stützen A, B vorhanden sind* (die natürlich z. B. auch C und E sein können) ergibt sich folgender Vorgang:

Mit den Senkmassen e, e_a, e_b der normalen und anormalen Stützen und den, aus dem Diagramm des G. S. entnommenen Werten c_{aa}, c_{bb}, c_{ab} berechnet man die Festwerte

$$c^*_{aa} = c_{aa} + \frac{e_a}{e - e_a}\,, \quad c^*_{bb} = c_{bb} + \frac{e_b}{e - e_b} \quad \dots \quad (22)$$

$$v = c^*_{aa} c^*_{bb} - c_{ab}^2 \quad \dots\dots \quad (23)$$

$$\underline{v_a = c^*_{aa}/v}\,, \quad \underline{v_b = c^*_{bb}/v}\,, \quad \underline{v' = c_{ab}/v} \quad \dots \quad (24)$$

Dann ermittelt man die im betreffenden Lastfall entstehenden Stützdrücke C_a und C_b des G. S. und berechnet

$$\left.\begin{array}{l} \underline{X_a = -C_a v_b + C_b v'} \\ \underline{X_b = -C_b v_a + C_a v'} \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (25)$$

Diese Kräfte lässt man nun als *zusätzliche Lasten* (positiv nach unten) auf den Balken des G. S. wirken und erhält Zusatz-Stützendrücke $\varDelta C$ und -Momente $\varDelta M$. Die endgültigen Stützen-Drücke C' und Momente M' werden dann, unter Beachtung von Gl. (18):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{bei normalen Stützen:} & C' = C + \varDelta C \\ \text{bei } \textit{anormalen} \text{ Stützen:} & C' = C + \varDelta C - X \\ \text{Momente:} & M' = M + \varDelta M \end{array}\right\} \quad (26)$$

d) Ist eine anormale Stütze, z. B. A starr ($e_a = 0$) so wird in Gl. (22) $c^*_{aa} = c_{aa}$. Setzt man anderseits $e_a = \infty$, so wird $c^*_{aa} = c_{aa} - 1$. Die Stütze A des G. S. fällt dann im W. S. ganz weg. *Man kann also auch Systeme untersuchen, bei denen gewisse Spannweiten doppelt so gross wie die anderen sind.*

e) Aus c) ergibt sich folgender Vorgang für die *Umwandlung der Einflusslinien des G. S. in diejenigen des W. S. mit zwei anormalen Stützen A, B, .:*

Für die *Auflagerkraft $C'_z = c'_z P$ bei irgend einer Stütze Z* wird die Einflussordinate c'_{zx} an der Stelle x

$$c'_{zx} = c_{zx} + \varDelta c_{zx} \quad \dots\dots\dots \quad (27)$$

worin

$$\underline{\varDelta c_{zx} = c_{ax} \lambda_{za} + c_{bx} \lambda_{zb}} \quad \dots\dots \quad (28)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{za} = v' c_{zb} - v_b c_{za} \\ \lambda_{zb} = v' c_{za} - v_a c_{zb} \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (29)$$

Die Gl. (27 bis 29) gelten für alle Stützen $Z\,(= A, B, C, \dots)$ mit folgender, der Gl. (18) entsprechender *Einschränkung:*

Bei den anormalen Stützen A bzw. B, also wenn $z = a$ oder $z = b$, d. h. wenn $c_{za} = c_{aa}$ bzw. $c_{zb} = c_{bb}$, *ist in den Gl. (29) c_{aa} durch $c_{aa} - 1$ bzw. c_{bb} durch $c_{bb} - 1$ zu ersetzen.* (29a)

Die Zusatz-Ordinaten $\varDelta c_{zx}$ (Gl. 27) lassen sich damit tabellarisch sehr einfach ermitteln. Man berechnet zuerst für alle Stützen $Z\,(= A, B, C, \dots)$ d. h. für $z = a, b, c, \dots,$ die λ_{za}, λ_{zb} mit Gl. (29, 29a), in denen v', v_a, v_b, die Festwerte aus Gl. (22 bis 24) und die c_{za}, c_{zb} den c_z-Linien des G. S. bei A bzw. B (anormale Stützen) entnommen werden. Dann folgen die $\varDelta c_{zx}$ für alle Stützen Z aus Gl. (28). Darin sind c_{ax}, c_{bx} die Ordinaten der c_a- bzw. c_b-Linien des G. S. bei x, d. h. bei den Laststellungen $x = A, 1, B, 2, C, 3, \dots,$ und $\varDelta c_{zx}$ nach Gl. (27) die *Zusatzordinaten zu c_{zx}*, ebenfalls bei $A, 1, B, 2, C, \dots$

Im Laufe der Rechnung ergeben sich folgende wertvolle Kontrollmöglichkeiten:

1. Es ist $\Sigma c_{za} = \Sigma c_{zb} = 1$, $(z = a, b, c, d \dots)$
2. Es ist $c_{ba} = c_{ab}$ nach Maxwell, weil im G. S. $e_a = e_b = e$ ist.
3. Es ist $\Sigma \lambda_{za} = \Sigma \lambda_{zb} = 0$, $(z = a, b, c, d, \dots)$
4. Es ist $\Sigma \varDelta c_{zx} = 0\,(z = a, b, c, d, \dots)$ bei jeder Laststellung x.

(30)

Aus den c_z-Einflusslinien des G. S. folgen endlich die gesuchten c'_z-Linien des W. S. durch Addieren der $\varDelta c_z$.

Abb. 6a zeigt z. B. das Ergebnis für einen Balken $ABCD$ mit $k = 2$, bei dem das elastische Senkmass bei der Stütze A doppelt so gross und bei der Stütze C halb so gross wie dasjenige der Normalstützen B und D angenommen wurde. Die gestrichelten Kurven gelten für das zugehörige normale System.

Für ein *Moment* $M'_s = \mu'_s P l$ im W. S. folgt analog an der Stelle x

$$\mu'_{sx} = \mu_{sx} + \varDelta \mu_{sx} \quad \dots\dots\dots \quad (31)$$

Aus Gl. (11) ergibt sich nun, dass $\varDelta \mu_{sx}$ linear von den $\varDelta c_{zx}$ abhängt. Wir betrachten ein beliebiges Feld n, dessen linkes Auflager mit L und rechtes Auflager mit R bezeichnet wird. Für L, R und für die Feldmitte n heissen dann in Gl. (31):

die μ_{sx} des G. S.: μ_{lx}, μ_{rx}, μ_{nx}
die $\varDelta \mu_{sx}$ des G. S.: $\varDelta \mu_{ex}$, $\varDelta \mu_{rx}$, $\varDelta \mu_{nx}$

Für die letzten ergibt die Entwicklung aus Gl. (11) die Formeln:

$$\varDelta \mu_{rx} = \varDelta \mu_{lx} + \sum_{z=a}^{z=l} \varDelta c_{zx} \text{ [6])} \quad \dots\dots \quad (32)$$

$$\underline{\varDelta \mu_{nx} = \frac{\varDelta \mu_{lx} + \varDelta \mu_{rx}}{2}} \quad \dots\dots \quad (33)$$

Mit Gl. (32) folgen also die Zusatz-Ordinaten für jedes Auflagermoment M'_r aus denjenigen des links vorgehenden M'_l, wobei die $\varDelta c_{zx}$ bereits aus Gl. (28) bekannt sind. Nach Gl. (33) sind ferner die Zusatzordinaten für M'_n die Mittelwerte derjenigen für M'_l und M'_r. Die tabellarische Auswertung der Gl. (32, 33) für die verschiedenen Lastlagen x, d. h. bei A, 1, B, 2, C, ... ist einfach, da für das *erste Auflager* A alle $\varDelta \mu_{ax} = 0$ sind. Daraus folgen die $\varDelta \mu_{bx}$ mit Gl. (32) und die $\varDelta \mu_{1x}$ mit Gl. (33). Aus den $\varDelta \mu_{bx}$ ergeben sich dann analog die $\varDelta \mu_{cx}$ und $\varDelta \mu_{2x}$ usw. Als Schlusskontrolle müssen, wie bei A,

[6]) Bezüglich l vgl. Fussnote 4.