

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	125/126 (1945)
Heft:	12
Artikel:	Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken
Autor:	Manger, A.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-83622

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Inhalt: Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken. — Spalschieber-Regelung bei Kreiselpumpen. — Eidg. Anstalt für Wasserversorgung, Abwasserreinigung und Gewässerschutz. — Zwei Projekte des Fryburger Architekten Denis Honegger. — Mitteilungen: Geschichtliche Entwicklung der Schweissverfahren. Die neue Maschinenanlage des M. S. «Säntis». Individual-Heizung. Ufersicher-

ung an der Seestrasse Goldbach-Küschnacht (Zürich). Von der Entwicklung der Grossgasturbine. Der Schweiz. Verband für die Materialprüfungen der Technik (SVMT). Persönliches. Der Schweiz. Energiekonsumentenverband. Der Verband Schweiz. Maschinen- und Werkzeughändler. Technikum Winterthur. — Necrologie: Karl Imhof. — Wettbewerbe. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 125

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 12

Diagramme und Verfahren zur Berechnung beliebig belasteter, elastisch gestützter Balken

Von Ing. Dr. A. MANGER, in Firma Ed. Züblin & Cie., A.-G., Zürich

4. Querkräfte, Momente in Zwischenschnitten, Tangenten der μ -Linien

Für die Querkraft in einem Schnitt S eines Balkenfeldes $L - R$ setzen wir analog Gl. (2):

$$Q_S = \eta_s P \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

Für die Einfluss-Ordinate η_s folgt, laut Definition der Querkraft:

$$\eta_s = c_a + c_b + \dots + c_l - (1) = \sum_a^l c_n - (1) \quad \dots \quad (7)$$

Das eingeklammerte Glied (1) fällt für die Ordinaten rechts des Schnittes S weg⁴⁾.

Die Einflusslinie der Querkraft Q_S ist also identisch mit der Summenlinie der c -ordinaten der Stützendrücke links des Schnittes S , die aber links von S um -1 , d. h. um 1 nach oben zu verschieben ist. Abb. 3 zeigt z. B. wie die Q_S -Linie im zweiten Balkenfeld aus der Summe der $c_a + c_b$ -Linien entsteht.

Für das Moment M_s in Schnitt S eines Feldes $n = L - R$ (Abb. 4a) setzen wir, analog Gl. (3):

$$M_s = \mu_s P \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

Nach Abb. 4a wird $M_s = M'_s + M_{os}$, also

$$\mu_s = \mu'_s + \mu_{os} \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

Da nun M'_s auf der Geraden $M_l - M_n$ liegt, unterteilt die Ordinate μ'_s die Differenz der Ordinaten μ_l und μ_n linear, d. h. im Verhältnis der Abstände d, d' von S zu L bzw. zur Feldmitte n . Die Ordinate μ_{os} ist ferner die Einflussordinate des Momentes M_{os} im einfachen Balken $L - n = l/2$, die durch das Dreieck Abb. 4b dargestellt ist. Es wird, wenn P über S steht:

$$M_{os \max} = \frac{d d'}{d + d'} P = \frac{2 d d'}{l} P$$

Somit

$$\mu_{os \max} = \frac{M_{os \max}}{P l} = \frac{2 d d'}{l^2} \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

Steht dagegen P in Abb. 4a außerhalb $L - n$, so fällt in Gl. (9) das Glied μ_{os} weg. Hieraus folgt (Abb. 4c): Die Einflusslinie μ_s liegt beidseits von $L - n$ überall zwischen der μ_l - und der μ_n -Linie und unterteilt ihre Abstände im Verhältnis d/d' .

Es ist also in Abb. 4c an beliebiger Stelle links von L oder rechts von n :

$$\frac{a'}{a} = \frac{d'}{d}$$

und es liegt die μ_s -Linie näher an μ_n , wenn $d' < d$.

Zwischen L und n gilt dieses Verhältnis ebenso für die gestrichelte μ'_s -Linie, zu der endlich die Ordinaten des Einfluss-Dreiecks Abb. 4b zu addieren sind, mit dem Maximalwert $\mu_{os \max}$ nach Gl. (10).

⁴⁾ l ist hier als Abkürzung für «links» nicht mit der Spannweite l zu verwechseln.

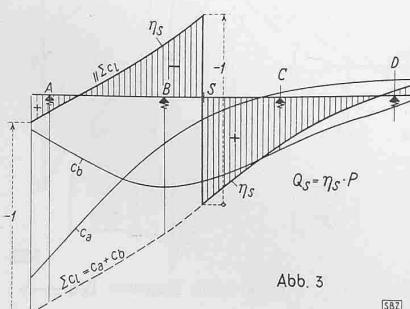


Abb. 3

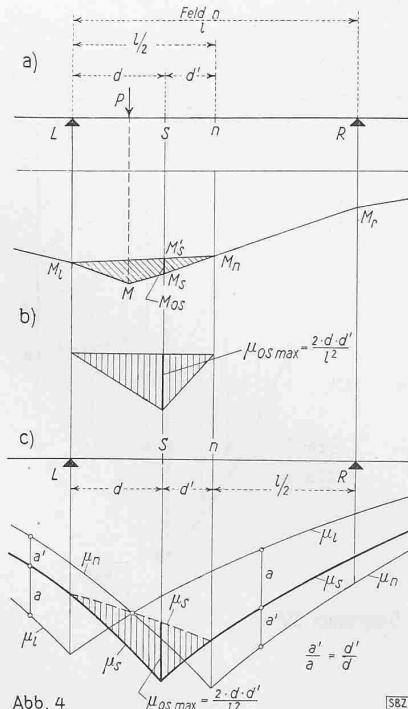


Abb. 4

Fortsetzung von Seite 128
Zur schärferen Zeichnung der μ -Einflusslinien können noch gewisse Tangenten wie folgt bestimmt werden:

Für M_s in irgend einem Schnitt S wird, wie aus Abb. 5a leicht folgt, die Einfluss-Ordinate μ_{sx} an der Stelle x :

$$\mu_{sx} = c_a \left(2 + \frac{d}{l} \right) + c_b \left(1 + \frac{d}{l} \right) + c_c \left(0 + \frac{d}{l} \right) - (1) \left(2 + \frac{d}{l} - \frac{x}{l} \right) \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

Das Einklammern des Wertes (1) im letzten Glied deutet wieder an, dass es wegfällt, wenn P rechts von S steht. Aus Gl. (11) folgt für den Neigungswinkel α der Tangente t an der μ_s -Linie bei x :

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{d c_a}{d x} \left(2 + \frac{d}{l} \right) + \frac{d c_b}{d x} \left(1 + \frac{d}{l} \right) + \frac{d c_c}{d x} \left(0 + \frac{d}{l} \right) + (1) \frac{1}{l}$$

Nennt man allgemein

$$\frac{d c_a}{d x} = \operatorname{tg} a, \frac{d c_b}{d x} = \operatorname{tg} b, \text{ usw.},$$

und multipliziert beidseits mit l , so folgt mit den weiteren Bezeichnungen

$$T = \operatorname{tg} \alpha \frac{l}{2} \quad \dots \dots \dots \quad (12a)$$

$$T_a = \operatorname{tg} a \left(2 + \frac{d}{l} \right) l, T_b = \operatorname{tg} b \left(1 + \frac{d}{l} \right) l$$

$$T_c = \operatorname{tg} c \left(0 + \frac{d}{l} \right) l \quad \dots \dots \dots \quad (12b)$$

endlich:

$$T = \frac{T_a + T_b + T_c + (1)}{2} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

Die Längen T_a, T_b, \dots Gl. (12b) erhält man nach Abb. 5b einfach, indem bei x die Tangenten t_a, t_b, t_c an den c_a, c_b, c_c -Linien gelegt und Parallelen dazu durch die Auflager A, B, C , gezogen werden. Die Abschnitte dieser letzten auf der Senkrechten durch S ergeben T_a, T_b, T_c (positiv nach unten). Man greift diese Werte am einfachsten einzeln ab, berechnet dann T nach Gl. (13) und trägt es (gemäß Gl. (12a)) im Maßstab der μ in Abb. 5a im Abstand $l/2$ rechts von x auf, womit die gesuchte Tangente an der μ_s -Linie bestimmt ist.

Besonders wertvoll und einfach wird diese Konstruktion für die Tangenten im Schnitt S selbst, d. h. beidseits der Spitze der μ_s -Linie: Die Tangenten an den c_a, c_b, c_c -Linien werden dann in S gelegt und daraus T_a, T_b, \dots wie vor bestimmt (Abb. 5c). Nach Gl. (13) folgt nun für die Tangenten t_l, t_r beidseits S (Abb. 5d):

$$T_r = \frac{T_a + T_b + T_c}{2} = \frac{\Sigma T_{a, b, c}}{2} \quad (14)$$

$$T_l = -T_r - 0,5^b) \quad (15)$$

Daraus folgt in Abb. 5d der Mittelwert $T_m = -0,25$

und also für die Konstruktion der Tangenten t_l, t_r :

Nach Berechnung von T_r aus Gl. (14) mit den Werten T_a, T_b, T_c aus Abb. 5c trägt man es auf der Waagrechten durch die μ_s -Spitze im Abstand $l/2$ rechts davon auf (Punkt 2), ferner den Punkt 3 im Abstand $-0,25$ über Punkt 1 und erhält

⁵⁾ Minuszeichen, weil in Abb. 5d T in $l/2$ links der Spitze aufgetragen ist.

Balken auf 6 Stützen

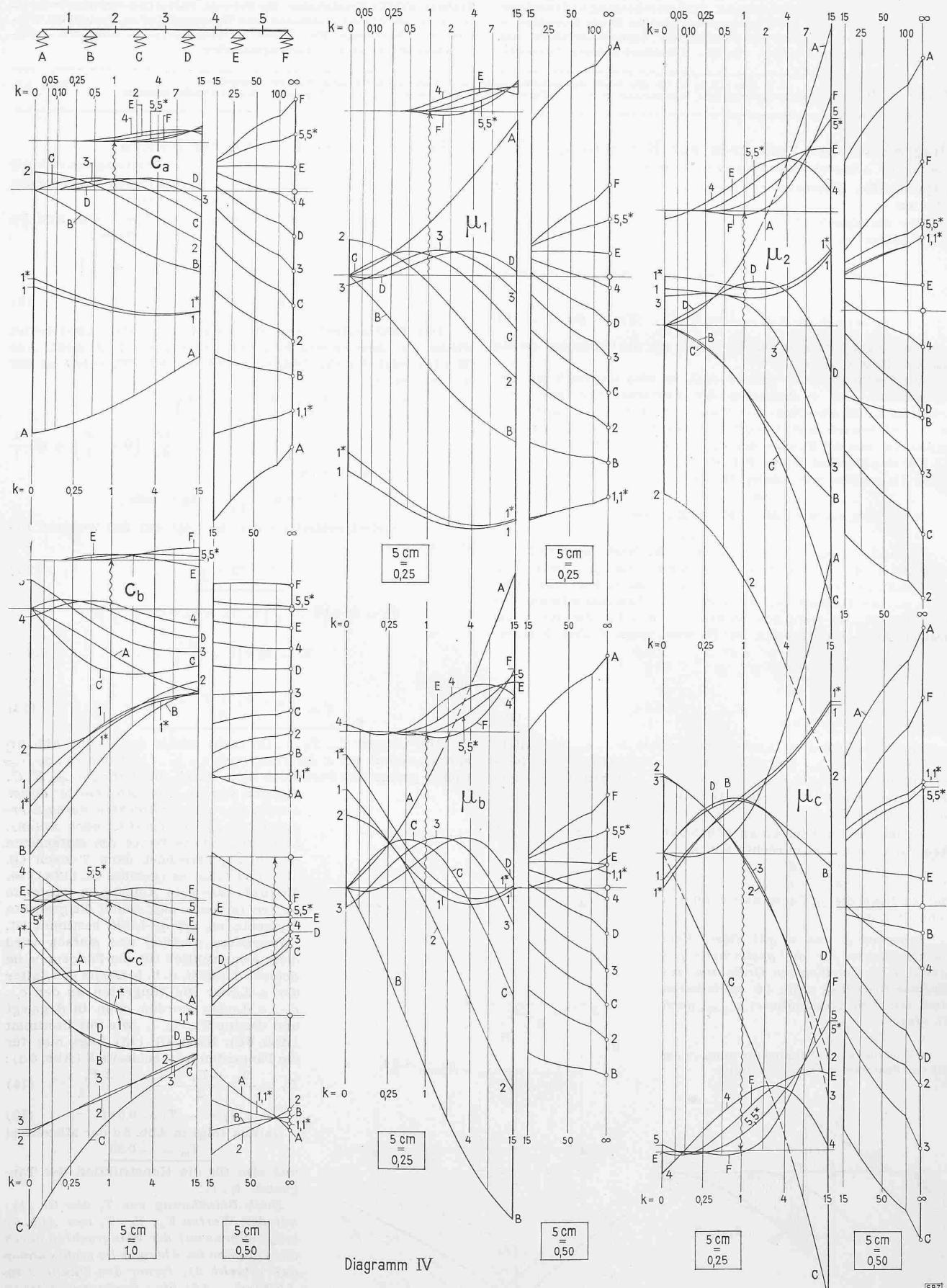
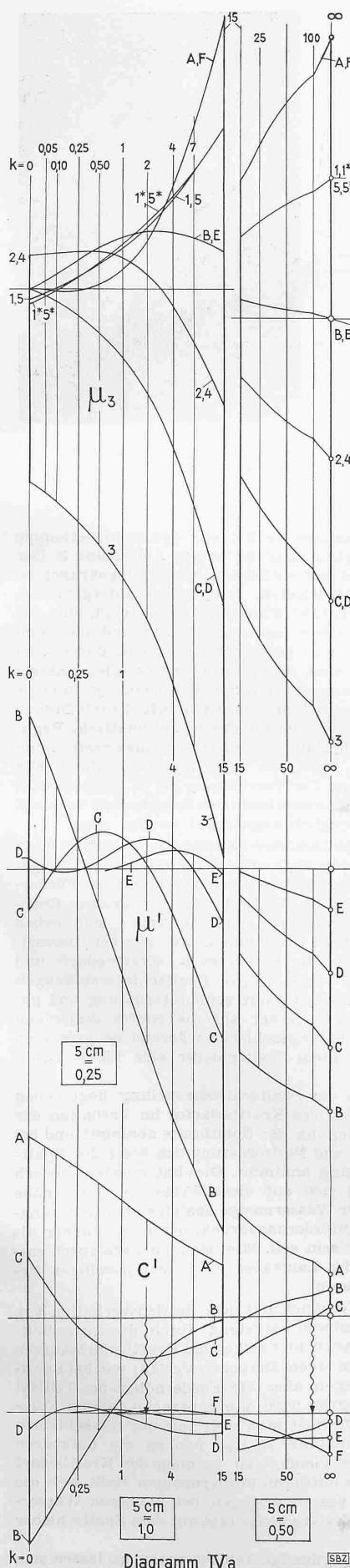


Diagramm IV

Folge siehe Diagramm IVa →



damit Punkt 4 auf der Geraden 2 - 3. Die Geraden 1 - 2 und 1 - 4 sind dann die gesuchten Tangenten t_1 und t_r .

t_1 braucht man also nicht zu berechnen.

Die einfache Konstruktion gilt für jeden beliebigen Schnitt S und kann auch ohne genaue Ermittlung von T_r , d. h. ohne die c -Linien verwendet werden, indem eine der beiden Tangenten einfach schätzungsweise gezeichnet und daraus, mit $T_m = -0,25$ die andere folgt. Diese einfachste gegenseitige Kontrolle der Spitzentangentialen der μ_s -Linien ist stets zu empfehlen (siehe Abb. 1 b).

5. Anwendungen

a) Die Diagramme zeigen für die massgebenden Größen sofort, wie gross der Einfluss der Stützensenkbarkeit im Vergleich zu Balken auf festen Stützen ($e = k = 0$) wird, womit eine leichtere Beurteilung der Vorschrift Art. 99₁, Norm 112 S. I. A. (1935) erreicht wird. Auch bei nicht normalen Systemen wird ein wenigstens angenäherter Vergleich möglich.

b) Die Diagramme zeigen auch, ob ein System gegenüber gewissen, möglichen Schwankungen der Kennziffer k empfindlich ist, was z. B. bei Brücken-Querträgern mit schwer erfassbarem wirksamem Trägheitsmoment von Interesse ist.

c) Von gewissen Werten k an sind die Ordinaten der verschiedenen Kurvengruppen nicht mehr viel von denjenigen bei $k = \infty$ verschieden, was bedeutet, dass man den Träger näherungsweise als starren Balken betrachten kann. So folgt z. B. aus Diagramm I und II, dass der Balken auf drei Stützen schon bei $k \approx 10$ und der Balken auf vier Stützen bei $k \approx 25$ praktisch als starr wirken.

d) Der Vergleich der Diagramme für drei, vier, fünf, sechs

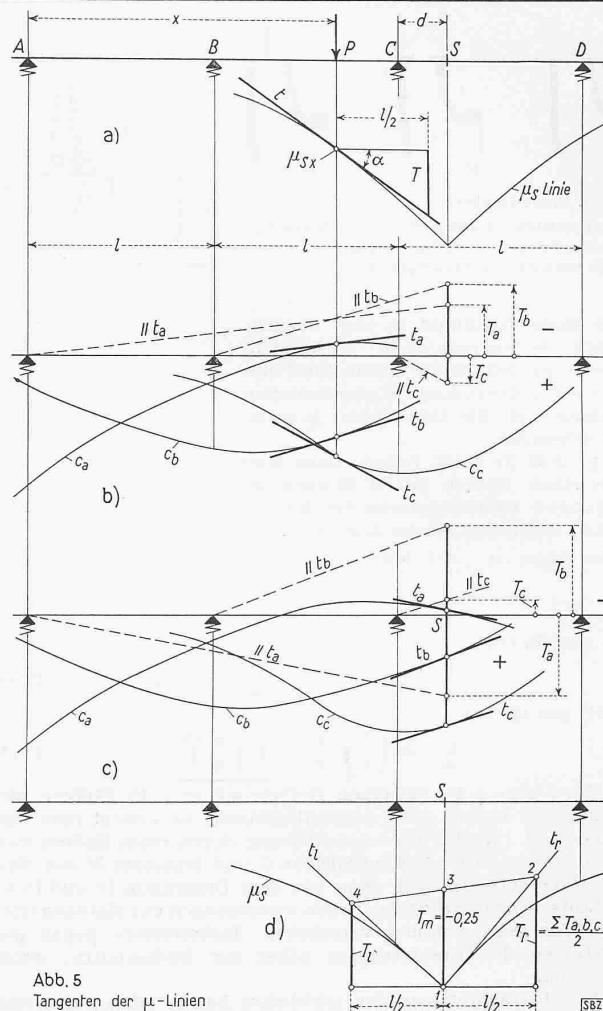


Abb. 5
Tangenten der μ -Linien

Stützen zeigt, dass die massgebenden Größen c_{aa} , c_{bb} , μ_{11} , μ_{bb} für das erste Feld, bei kleinen k von Diagramm zu Diagramm wenig ändern und dass die Differenzen von drei zu vier Stützen, bzw. von vier zu fünf, bzw. von fünf zu sechs Stützen immer mehr verschwinden. Beim Vergleich von fünf zu sechs Stützen sind sie bis $k \approx 4$ praktisch Null und betragen bei $k \approx 15$ nur rd. 3 %.

Daraus folgt, dass bis $k \approx 15$ die c_{aa} , c_{bb} , μ_{11} , μ_{bb} auch bei viel grösserer Stützanzahl praktisch auf wenige Prozente gleich bleiben. Solange $k \leq \approx 15$ können somit auch bei Balken auf vielen Stützen die Endfelder nach Diagramm IV und IVa für sechs Stützen behandelt werden.

e) Für Systeme, bei denen das elastische Senkmaß der Stützen von der ersten bis zur letzten Stütze stetig ändert, können, da der Einfluss abnormaler Stützen auf weit entfernte Trägerstellen abklingt, die Diagramme mit guter Annäherung benutzt werden. Man führt dann die linksseitige bzw. rechtsseitige Zahl k für die Felder links bzw. rechts ein und verwendet also das selbe Diagramm zweimal mit verschiedenem k . Für die Mittelfelder gelten dann ungefähr die Mittelwerte beider Untersuchungen.

f) Man kann auch, wie in § 9 der in Fußnote 3 genannten Schrift erläutert, Balken auf stetiger, elastischer Unterlage näherungsweise durch Balken auf einzelnen Stützen ersetzen und also mit den Diagrammen untersuchen. Der Balken liege auf einer Länge L auf der elastischen Bettung auf. Die Aufliegebreite sei b und die Bodenkonstante B (t/m^3 oder kg/cm^3).

Man teilt dann L z. B. in vier gleiche Teile l . Die vier Stützen des Ersatzbalkens liegen dann in der Mitte dieser Teilstücke und ihr elastisches Senkmaß wird

$$e = \frac{1}{lbB} \dots \quad (16)$$

Die Genauigkeit wird noch erhöht, wenn man L in sechs kürzere Strecken unterteilt, also mit einem Ersatzbalken auf sechs Stützen rechnet.

Die Stützendrücke des Ersatzbalkens werden zuletzt gleichmäßig auf die Strecken l verteilt und die so erhaltene, gestaffelte

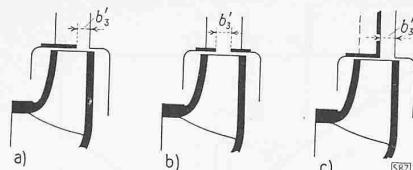


Abb. 1. Spaltschieber

- a) mit seitlicher Laufradaustrittsöffnung b'_3
 b) mit mittlerer Austrittsöffnung
 c) mit seitlicher Diffusorplatte

felte Bodendrucklinie in eine ausgleichende *Bodendruckkurve* verwandelt. Ebenso werden in die Momenten-Polygone stetig gekrümmte Momentenlinien eingezeichnet, die ihre Seiten je zweimal schneiden.

g) Aus f) folgt ferner, dass man auch einen Balken mit n' -Stützen im Abstande l' näherungsweise durch einen Balken mit n -Stützen im Abstande l ersetzen kann ($n \geq n'$). Man setzt dann für den letztgenannten:

$$l = l' \frac{n'}{n} \quad \dots \quad (17a)$$

und aus Gl. (16):

$$e = e' \frac{l}{l'} = e' \frac{n}{n'} \quad \dots \quad (17b)$$

somit, aus Gl. (1):

$$k = k' \left(\frac{l}{l'} \right)^3 \frac{e}{e'} = k' \left(\frac{n}{n'} \right)^4 \quad \dots \quad (17c)$$

Wird also z. B. für einen Balken mit $n' = 10$ Stützen die M' -Linie für irgend einen Lastfall gesucht, so ersetzt man ihn nach den Gl. (17a bis 17c) zweckmäßig durch einen Balken mit $n = 6$ Stützen. Die Auflagerdrücke C und Momente M des Ersatzbalkens ergeben sich dann aus dem Diagramm IV und IV a. Die Stützen beider Systeme liegen symmetrisch zur Balkenmitte, sind aber gegeneinander verschoben. Insbesondere liegen die Endstützen des Ersatzträgers näher zur Balkenmitte, wenn $n' > n$ ist.

Nun betrachtet man den *wirklichen Balken* näherungsweise als *starr gelagert* und belastet ihn mit den C des Ersatzbalkens. Daraus folgen auf bekannte Art die wirklichen Stützdrücke C' und eine Zusatz-Momentenlinie die, den M überlagert, die M' -Linie mit Polygonecken bei den wirklichen Stützen ergibt.

Praktisch genügt es meist, nur die Gestalt der Zusatz-Momentenlinie ohne Rechnung zu überlegen und sie der M -Linie so zu überlagern, dass die Polygonecken bei den Stützen n verschwinden und auf die Stützen n' verschoben werden. Dabei wird auch das Moment unter der Last meist etwas abgeändert.

Analog kann man auch *Balken mit ungleichen Spannweiten* zuerst als Normalbalken mit gleichen Stützenabständen untersuchen und *zusätzlich* die erhaltenen Stützdrücke C als Lasten des wirklichen, dann näherungsweise als *starr gelagert* betrachteten Balkens einführen.

(Schluss folgt)

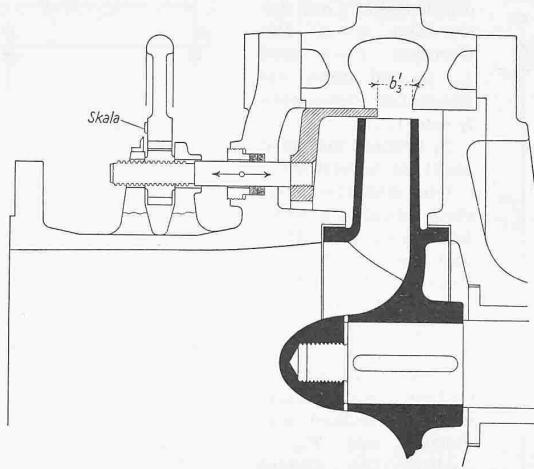


Abb. 2. Schnitt durch einstufige Pumpe mit Spaltschieber

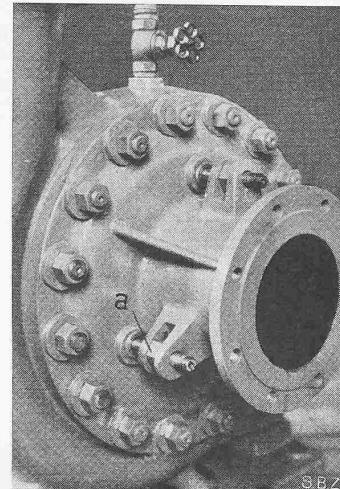


Abb. 3. Versuchsausführung mit Sechskant-Muttern a anstelle von Zahnradmuttern mit Zahnkranz

entwicklung konnte deshalb ohne weiteres auf die einfachste Lösung a gegriffen werden.

Eine auf dieser Grundlage entwickelte Spaltschieberpumpe mit einseitig beaufschlagtem Laufrad zeigen Abb. 2 und 3. Der zylindrische Ringschieber mit seitlichem Verstärkungskragen ist in einem besonders ausgebildetem Saugdeckel untergebracht, der am Umfang eine Anzahl Führungsbolzen trägt, die zur axialen Verschiebung des Spaltschiebers dienen und die beim Austritt aus dem Deckel wie Schieberkeil-Spindeln durch eine Stopfbüchse abgedichtet sind. Damit jede Spindel gleichmäßig verschoben wird, drehen diese an ihrem Gewindeende je in einer Zahnrädermutter, über die ein Zahnräderkranz greift. Durch Drehen des Zahnräderkranzes, von Hand oder durch eine automatische Reguliervorrichtung, werden die Führungsbolzen um einen bestimmten Betrag axial verschoben, wobei an einer Skala die Spaltweite b'_3 abgelesen werden kann. Die Vorrichtung ist so einfach, dass sie sogar lediglich durch Auswechseln des Saugdeckels bei sonst normalen Pumpen nachträglich angebracht werden kann.

Der Vorteil der Spaltschieber-Regelung gegenüber einer solchen mit Drosselschieber liegt vor allem im wesentlich geringeren Kraftbedarf bei Teillasten, der bei kleinsten Fördermengen sogar noch unter die Werte der komplizierteren Regelung mit drehbaren Leitschaufeln sinkt. In Abb. 4 sind neben den punktiert ausgezogenen Kennlinien, wie sie bei Drosselregelung erhalten werden, die Q/H-Kurven, Kraftbedarf- und Wirkungsgradkurven für verschiedene Spaltschieberstellungen eingezeichnet. Der Kraftbedarf sinkt bei Nullförderung und geschlossenem Spaltschieber ungefähr auf die Hälfte desjenigen bei geschlossenem Druckleitungsschieber, während bei grösseren Wassermengen und verengtem Spaltschieber eine kleine Erhöhung eintritt.

Das Kennzeichnende der Spaltschieberregelung liegt neben dem beschriebenen Verlauf des Kraftbedarfes im Verhalten der Förderhöhe, die bei Verengung der Spaltbreite abnimmt und bei vollständigem Abschluss und Nullförderung den Wert des Spaltdruckes am Laufradumfang annimmt. Dies hat meistens jedoch keinerlei Nachteile, weil sich auf diese Weise die Förderhöhe gut einer mit wachsender Wassermenge ansteigenden Rohrkennlinie anpasst. Dieser Nullförderungsdruck, der nicht kleiner als die statische Förderhöhe sein soll, lässt sich übrigens durch entsprechende Ausbildung des Laufrades leicht den jeweiligen Betriebsverhältnissen anpassen.

Interessant ist ein Vergleich mit dem Betriebsverhalten von Pumpen mit der bekannten Regelung durch drehbare Leitschaufeln nach Abb. 5. Auch hier zeigen die Kraftbedarfskurven bei kleinen Fördermengen einen ähnlichen Verlauf wie bei Spaltschieberdrosselung, wogegen aber die Förderhöhen bei Teillast ansteigen. Der Wirkungsgrad wird damit, bezogen auf die Pumpenförderhöhe, besser. Rechnet man aber mit der tatsächlichen Förderhöhe der Rohrkennlinie H_r , so bleiben die nutzbaren Wirkungsgrade ungefähr gleich, weil ja auch der Kraftbedarf ähnlich ist. Lediglich bei mittleren Fördermengen stellt sich die Leitschaufelregulierung besser, wogegen bei kleineren Wassermengen die niedrigsten Kraftbedarfswerte mit dem Spaltschieber erhalten werden.

Ganz ausserordentlich günstige Teillastergebnisse lassen sich bei der Verwendung des Spaltschiebers bei doppelseitigen Lauf-

Spaltschieber-Regelung bei Kreiselpumpen

Von Ing. K. RÜTSCHI in Firma Müller A.-G., Brugg

Obschon der Spaltschieber für die Regelung bei Turbinen und Kreiselpumpen grundsätzlich bekannt ist, wurde er bis heute so gut wie nicht angewandt, z. T. weil eine einfache konstruktive Lösung fehlte. Siebrecht¹⁾ hatte wohl seinerzeit die Wirkungsweise des Spaltschiebers bei Kreiselpumpen eingehend untersucht, ohne dass hernach aber eine praktische Anwendung desselben Verbreitung gefunden hätte. Abb. 1 zeigt die von ihm untersuchten drei Spaltschieberformen, wobei die Ausführungen a und b mit seitlicher und mittlerer Laufradaustrittsöffnung b'_3 ziemlich übereinstimmende Drosselkurven und Kraftbedarfslinien ergaben. Wider Erwarten zeigte dagegen die verbesserte Ausführung c mit anschliessender Diffusorplatte beim Schliessen des Spaltschiebers eine raschere Senkung der Drosselkurve bei ungefähr gleichem Verlauf des Kraftbedarfs, sodass also hier die Wirkungsgrade entsprechend niedriger wurden. Eigene Versuche mit einer Spaltschieberform, die ausser dem Laufradaustritt gleichzeitig auch noch den Laufradeintritt abschliesst, ergaben auch keine merklichen Verbesserungen. Für die konstruktive Weiter-

¹⁾ Dr. Ing. W. Siebrecht: «Beitrag zur Regelung der Kreiselpumpen». 1929, VDI-Forschungsheft 321.