200 Jahre Euler'sche Knickformel

Autor(en): **Stüssi, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **123/124 (1944)**

Heft 1

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-53864

INHALT: 200 Jahre Euler'sche Knickformel. — Untersuchung einer nach Euler'schen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine. — Die Schulhausanlage Kornhausbrücke in Zürich. — Tendenzen der Automobilkonstruktion und Entwicklung des Strassenverkehrs. — Ein Vorschlag zur Verbesserung der Wasserverhältnisse in den Seen. — 50 Jahre Akademischer Maschinen-Ingenieur-Verein (AMIV) an der E. T. H. Zürich. — Mitteilungen: Kurortklimaforschung. Neue Flachserntemaschine. Normalisierung von Aluminiumleitern für Hochspannungsapparate und -Installationen. Massenfertigung durch Einzweckmaschinen. Schulhausanlage Kornhausbrücke Zürich. — Nekrologe: Maurice Imer. — Wettbewerbe: Ausbau des Kantonspitals Winterthur. Schulhaus für Schwachbegabte und Kindergarten in Thun. Plastischer Schmuck am Fries des Pavillon Eynard, Genf. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortrags-Kalender.

Band 123 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 1

200 JAHRE EULER'SCHE KNICKFORMEL

Von Prof. Dr. F. STÜSSI, E.T.H., Zürich

1. In einem Anhang «Ueber die elastischen Kurven» zu seinem grundlegenden Werk über Isoperimeterprobleme [1]) hat *Leonhard Euler* vor 200 Jahren erstmals die seinen Namen tragende Knickformel veröffentlicht. Im ungeheuren Lebenswerk Eulers bedeutet die Entdeckung der Knickformel nur eine kleine Episode; für die Entwicklung der Festigkeitslehre und der Baustatik aber ist sie von so grosser Bedeutung, dass sich heute ein kurzer Rückblick auf ihre Entstehung rechtfertigt.

Für Euler ergibt sich die Möglichkeit, die Form der elastischen Kurven mit seiner Methode der Maxima und Minima zu bestimmen durch eine Mitteilung von *Daniel Bernoulli* vom Jahre 1742, wonach bei der Biegung eines ursprünglich geraden Stabes von konstantem Querschnitt die «Potentialkraft» (vis potentialis)

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

ein Minimum sein müsse.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y ist (mit unserer heutigen Schreibweise) die Länge des Kurvenelementes ds

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

und der Krümmungsradius

$$R = -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Damit wird die «Potentialkraft», die zu einem Minimum werden soll

$$\int \frac{ds}{R^2} = \int \frac{y''^2\,dx}{(1 + y'^2)^{5/2}} = \min \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nach der im Hauptwerk entwickelten Methodik wird nun daraus die Differentialgleichung der gesuchten elastischen Kurve bestimmt, die sich in der Form

$$dy = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ergibt.

Um die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der schon früher von *Jakob Bernoulli* gefundenen Gleichung der elastischen Kurve nachzuweisen (und auch, um die Belastung und die Biegungssteifigkeit des Stabes einzuführen) leitet Euler diese Differentialgleichung nun auch noch direkt ab (Abb. 1): im Punkt x, y, des gebogenen Stabes muss Gleichgewicht zwischen der «Elastizität $E k^2 : R$» (vis elastica) und dem Moment $P(e + x)$ der an einem starren Hebel e wirkenden lotrechten Kraft P bestehen:

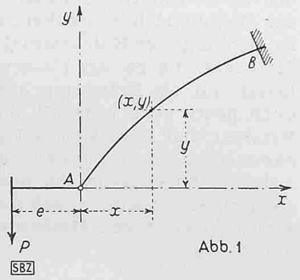

Abb. 1

$$P(e + x) = \frac{E k^2}{R} = -\frac{E k^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$E k^2$ bedeutet die «absolute Elastizität» (elasticitas absoluta) oder, wie wir heute sagen, die Steifigkeit EJ des Stabes. Durch Integration und Auflösung nach dy findet Euler die Gleichung

$$dy = \frac{-P\,dx\,(\frac{1}{2}x^2 + ex + f)}{\sqrt{E^2 k^4 - P^2(\frac{1}{2}x^2 + ex + f)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[1]) *L. Euler:* Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae & Genevae, MDCCXLIV. Additamentum I: De curvis elasticis.

Das Eulerbildnis nach dem Stich von Mechel in der «Lobrede auf Herrn Leonhard Euler» von N. Fuss, Basel 1786.

die in der Form mit Gleichung (2) übereinstimmt. Aus dem Vergleich der Gleichungen (2) und (4) ergibt sich nun die Grösse der angreifenden Last P zu

$$P = -\frac{2 E k^2 \gamma}{a^2} \quad . \quad (5)$$

während sich für den Hebelarm e und die Integrationskonstante f die Werte

$$e = \frac{\beta}{2\gamma} \quad \text{und} \quad f = \frac{\alpha}{2\gamma}$$

ergeben.

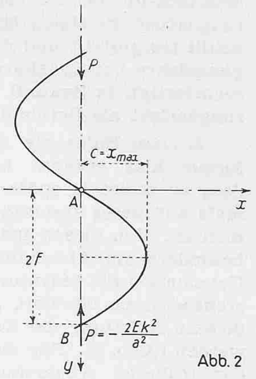

Abb. 2

Für $e = 0$ (Last im Koordinatenursprung) und $\gamma = 1$ und mit der Abkürzung $c^2 = a^2 - \alpha$ findet Euler für die Kurve der Abb. 2 die vereinfachte Gleichung

$$dy = \frac{(a^2 - c^2 + x^2)\,dx}{\sqrt{(c^2 - x^2)(2a^2 - c^2 + x^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nach der Diskussion der sich aus Gleichung (6) ergebenden Eigenschaften der elastischen Kurven geht Euler dazu über, die verschiedenen möglichen Kurvenformen aufzuzählen. Als erste dieser Formen ergibt sich für $a = \infty$ oder $P = 0$ die vom Koordinatenursprung (oder Wendepunkt) A aus sich nach beiden Seiten in Richtung der y-Axe ins Unendliche erstreckende Gerade, für die $x_{\max} = c = 0$ ist; diese Gerade stellt den natürlichen Zustand des elastischen Stabes dar.

Zu dieser ersten Art von elastischen Kurven sollen nun aber auch jene Fälle gerechnet werden, bei denen die grösste Ausbiegung $c = x_{\max}$ und damit auch x gegen a vernachlässigbar klein angenommen werden kann; für diesen Fall geht Gleichung (6) über in

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2(c^2 - x^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und ihre Lösung lautet

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Dies ist die Gleichung für die (beidseitig ins Unendliche verlängerte) Trochoide, die wir heute Sinuskurve nennen. Für $y = f$ wird $\frac{x}{c} = 1$ und $\arcsin \frac{x}{c} = \frac{\pi}{2}$, woraus

$$f = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2 f \sqrt{2}}{\pi}$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (5) (mit $\gamma = 1$) ein, so erhalten wir

$$P_{\text{kr.}} = \frac{2 E k^2}{a^2} = \frac{\pi^2 E k^2}{4 f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

d. h. diejenige Kraft, die erforderlich ist, um einen ursprünglich geraden (und beidseitig gelenkig gelagerten) Stab unendlich wenig auszubiegen; sie ist von endlicher Grösse.

Damit ist die Eulersche Knicklast gefunden. Euler selbst weist darauf hin, dass seine Formel dazu dienen könne, die Tragkraft von Säulen zu bestimmen. Er gibt anschliessend auch die Anleitung, die Steifigkeit $E k^2 = EJ$ durch Durchbiegungsmessungen zu ermitteln.

Wohl hatte der Holländer Musschenbroek schon 15 Jahre vorher auf Grund von Versuchen festgestellt, dass bei sonst gleichen Grössen die Tragfähigkeit gedrückter Stäbe umgekehrt proportional zum Quadrat ihrer Länge sei, aber diese Angabe allein löst das Problem nicht. Erst Euler hat uns den vollständigen Zusammenhang zwischen kritischer Belastung P, Stablänge $2f$ und Steifigkeit $EJ = E k^2$ gegeben.

2. An dieser ersten theoretischen Untersuchung eines Stabilitätsproblems ist für uns besonders bemerkenswert, dass sie auf dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit aufge-

baut ist. Für Stäbe veränderlichen Querschnitts erweitert Euler den Ausdruck der «Potentialkraft» zu

$$\int \frac{E\,k^2\,d\,s}{R^2}$$

Beachten wir, dass nach Gleichung (3) $M = \dfrac{E\,k^2}{R}$ ist, so wird

$$\int \frac{E\,k^2\,d\,s}{R^2} = \int \frac{M^2\,d\,s}{E\,k^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Die «vis potentialis» ist tatsächlich (bis auf den Zahlenfaktor $^1/_2$) identisch mit der Formänderungsarbeit. Dass diese Formänderungsarbeit zu einem Minimum werden müsse, hat Daniel Bernoulli festgestellt und die Anwendung dieses Satzes in der Biegungslehre hat Leonhard Euler gezeigt; es scheint damit gerechtfertigt, in Zukunft den Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit als Bernoulli-Eulerschen Satz zu bezeichnen.

3. Dass Euler die Bedeutung seiner Knickformel klar erkannt hat, geht daraus hervor, dass er selbst in späteren Arbeiten noch mehrmals auf dieses Stabilitätsproblem zurückgekommen ist. Von diesen späteren Arbeiten halte ich besonders die Abhandlung «Sur la Force des Colonnes»[2]) für bedeutungsvoll und es soll nachstehend noch die dort gegebene einfachere und direkte Ableitung der Knickformel nachskizziert werden (Abb. 3). Für die Steifigkeit $E\,k^2$, die in der früheren Abhandlung noch als «absolute Elastizität» (elasticitas absoluta) bezeichnet wurde, finden wir hier die uns zutreffender scheinenden Bezeichnungen «moment du ressort» oder auch «moment de roideur».

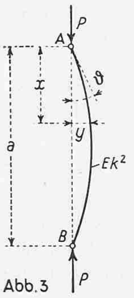

Abb. 3

Euler wählt hier die ursprüngliche Stabaxe als x-Axe und beschränkt sich von vornherein auf kleine Ausbiegungen, für die der Krümmungsradius R sich auf den Wert

$$R = -\frac{d\,x^2}{d^2\,y}$$

vereinfacht. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$P\,y = \frac{E\,k^2}{R} = -\frac{E\,k^2\,d^2\,y}{d\,x^2}$$

folgt die Differentialgleichung

$$\frac{E\,k^2}{P}\,d^2\,y + y\,d\,x^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Durch zweimalige Integration ergibt sich mit $\vartheta = y'_A$ die Lösung

$$\frac{y}{\vartheta}\sqrt{\frac{P}{E\,k^2}} = \sin x\sqrt{\frac{P}{E\,k^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Für $x = a$ muss $y = 0$ sein; damit wird

$$a\sqrt{\frac{P}{E\,k^2}} = \pi$$

oder

$$\underline{P_{\mathrm{kr.}} = \frac{\pi^2\,E\,k^2}{a^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9\,a)$$

Anschliessend untersucht Euler auch Stäbe mit veränderlicher Steifigkeit und den Einfluss des Eigengewichtes und diskutiert Modellregeln für die Bemessung von Säulen.

4. Den paradox erscheinenden Unterschied zwischen der Wirkung einer horizontalen und einer vertikalen Last (Abb. 4), d. h. den Unterschied zwischen den gewöhnlichen Biegungsproblemen erster Ordnung und den Stabilitätsproblemen hat schon Euler grundsätzlich erkannt: während die Ausbiegung y bei der gewöhnlichen Biegung proportional zur Belastung anwächst, erleidet der axial belastete Stab für $P < P_{\mathrm{kr.}}$ überhaupt keine Ausbiegung; bei $P = P_{\mathrm{kr.}}$ biegt er aber plötzlich aus und es ist hier anscheinend das Kontinuitätsprinzip verletzt. Euler hat dieses Phänomen dadurch zu erklären und mit dem Kontinuitätsprinzip in Einklang zu bringen versucht, dass er für $P < P_{\mathrm{kr.}}$ die Ausbiegungen als imaginär ansieht; für $P = P_{\mathrm{kr.}}$ werden sie null und für $P > P_{\mathrm{kr.}}$ reell und wachsen mit wachsender Last.

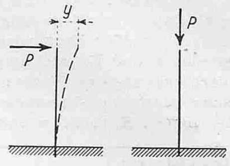

Abb. 4

²) *L. Euler*: Sur la Force des Colonnes. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Berlin. Tom. XIII, 1757.

Wir können heute einfacher zeigen, dass das Knickproblem das Kontinuitätsprinzip nicht verletzt, etwa dadurch, dass wir durch Einführung einer schrägen Belastung einen stetigen Uebergang zwischen den beiden Belastungsfällen der Abb. 4 herstellen, eine Aufgabe, die zuerst Navier gelöst hat, oder auch dadurch, dass wir die Eigenschwingungen eines gedrückten Stabes betrachten. Euler hat in seiner Abhandlung über die elastischen Kurven auch Schwingungsprobleme untersucht. Der innere und damit auch der formale Zusammenhang zwischen den beiden Problemgruppen ist dadurch gegeben, dass bei beiden Gleichgewichtsaufgaben zu lösen sind; bei den Schwingungsproblemen müssen die innern elastischen Kräfte mit den Trägheitskräften, bei den Stabilitätsproblemen mit den durch die Ausbiegung verursachten Ablenkungskräften im Gleichgewicht sein. Schreiben wir die Grundschwingungszahl ν eines elastischen Stabes nach Abb. 3 mit der auf die Längeneinheit bezogenen konstanten Masse q/g an:

$$\nu = \frac{\pi}{2\,a^2}\sqrt{\frac{E\,J\,g}{q}}\sqrt{1 - \frac{P\,a^2}{\pi^2\,E\,J}} = \nu_0\sqrt{1 - \frac{P}{P_{\mathrm{kr.}}}}$$

so stellen wir fest, dass die Frequenzen mit wachsender Last P immer kleiner werden und der Knickvorgang auch als Eigenschwingung von unendlich kleiner Frequenz gedeutet werden kann, bei der der Stab ausschwingt, aber nicht mehr in seine Ruhelage zurückkehrt.

5. Wir wissen heute, wie lange es nach Euler noch gedauert hat, bis sich eine genügend umfassende Erkenntnis des immer wieder reizvollen Problems der elastischen Stabilität allgemein durchgesetzt hat. Sehen wir von den damals wenig beachteten und nachher wieder vergessenen, fast visionär anmutenden Erkenntnissen Naviers ab, so dauerte es rund 150 Jahre, bis L. v. Tetmajer auf experimentell-statistischem Wege und Engesser und Kàrmàn theoretisch die Eulersche Knickformel auf den unelastischen Bereich erweiterten.

Euler war nicht Ingenieur, sondern Mathematiker und Geometer. Probleme der Mechanik beschäftigten ihn in erster Linie als mathematische Aufgaben. Wir erkennen beispielsweise die Grenzen seines Interesses bei einem technischen Problem daran, wie er sich mit dem Begriff der Steifigkeit auseinandersetzt. Es genügt ihm durchaus, den Begriff $E\,k^2$ zu definieren und anzugeben, wie er durch Versuche bestimmt werden könne. Er erklärt auch solche Versuche für wünschenswert, sie aber selbst durchzuführen, kam ihm offenbar nicht in den Sinn; es war ihm gar nicht wichtig zu wissen, wie gross der numerische Wert der Steifigkeit für eine bestimmte Stütze ist.

Gerade mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten aber, die auf der damaligen Unkenntnis von uns heute geläufigen Begriffen der Biegungslehre beruhen, muss die Leistung Eulers bei der Entdeckung der Knickformel umso höher bewertet werden. Seine Methodik, die bei der Ueberwindung mathematischer Schwierigkeiten auf die Erfassung des Wesentlichen ausgeht, ist für uns auch heute noch wertvoll, aufschlussreich und von vorbildlicher Klarheit und Eleganz der Darstellung. Die Herausgabe der gesammelten Werke dieses wohl umfassendsten Geistes, den unser Land je hervorgebracht hat, ist nicht nur eine Dankesschuld, sondern sie bedeutet noch mehr eine Bereicherung unseres Wissens im Gebiet von Mathematik und Mechanik und damit auch der Technik.

Untersuchung einer nach den Euler'schen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine

Von Prof. Dr. J. ACKERET, E. T. H. Zürich

Leonhard Euler hat bekanntlich ausser seinen grandiosen Arbeiten zur reinen Mathematik auch auf dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik grundlegend wichtige Beiträge geliefert. Wo immer er eine Möglichkeit einer rationellen Behandlung sah, griff er zu, und dadurch, dass er sich nicht durch den primitiven Zustand der damaligen Technologie entmutigen liess, fand er ganz neue Zusammenhänge und Beziehungen und kam zu Vorschlägen, die zu seiner Zeit wohl unausführbar waren, im Laufe der nächsten zwei Jahrhunderte aber schliesslich zum Allgemeingut der Technik wurden. Unter den zahlreichen neuen Ideen, die bisher in wenig zugänglichen Akademieberichten vergraben lagen (nunmehr aber dank einer grosszügigen Spende von Industrie, Handel und öffentlichen Werken der Schweiz gesammelt herausgegeben werden können), ragt eine durch ihre besondere Fruchtbarkeit hervor: die Erfindung des *Leitapparates* für Turbinen[1]). Sie ist das Ergebnis einer genauen Analyse der Verluste im sog. Segner'schen Wasserrad. *Andreas Segner*, Professor in Göttingen, gab 1750 in Anlehnung an frühere Vorschläge von *Daniel Bernoulli* (1738) die Konstruktion eines reinen Reaktionsrades an, das seinerzeit mehrfach ausgeführt wurde und später immer wieder auftauchte

¹) Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau. Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 1754 (gelesen 13. Sept. 1753).