Die Verallgemeinerung in der Mathematik

Autor(en): **Bäbler, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **123/124 (1944)**

Heft 17

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-54037

Band 124 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 17

Die Verallgemeinerung in der Mathematik

Von P.-D. Dr. F. BÄBLER, E. T. H.[1]), Zürich

Unter dem Wort Verallgemeinerung sollen hier gewisse Erscheinungen zusammengefasst werden, die die Entwicklung der Mathematik teils ununterbrochen begleiten, teils gleichzeitig als treibende und leitende Kräfte fundamentalen Anteil an Entstehung und Wachstum grosser Epochen haben. Der äussere Habitus dieser Erscheinungen ist flüchtig betrachtet bisweilen recht verschieden. Bei genauem Zusehen tritt jedoch unmittelbar ein charakteristischer gemeinsamer Kern hervor, durch den sie in ihrem Wesen bestimmt sind. Dieser gemeinsame Kern ist nichts anderes als die Sehnsucht nach dem Universellen und Endgültigen im Geistigen. Mein Ziel bei diesem Vortrag ist es, der Entwicklung der Mathematik folgend, die erwähnten Erscheinungen und ihre Wirkungen aufzuspüren und sie durch Beispiele sinnenfällig zu machen.

Die speziellste Form, die dieser Trieb nach dem Universellen annehmen kann, stellt sich als Verallgemeinerung eines mathematischen Theorems dar. Irgendeine Beziehung mathematischer Natur ist unter gewissen, vielleicht sehr einengenden Voraussetzungen sichergestellt worden. Zufällig verwendete, ungeeignete Beweismethoden oder die untergeordnete Bedeutung der Beziehung im vorliegenden Zusammenhang oder noch andere Ursachen mögen diese Einschränkungen veranlasst haben. Irgendein Späterer aber erkennt hier vielleicht einen vielversprechenden Ansatzpunkt im Zusammenhang mit eigenen Untersuchungen und dringt darum auf andern Wegen tiefer in das Gewebe der Beziehungen ein, oder er bemerkt einen weitgehenden Parallelismus mit Theoremen anderer Natur und wird auf diese Weise zu Einsichten von viel grösserer Allgemeinheit geführt, oder auch er merkt ganz einfach, dass die Voraussetzungen teilweise überflüssig sind und dehnt den Gültigkeitsbereich aus, unbekümmert darum, ob damit für den Moment etwas Wünschenswertes getan sei oder nicht.

Obschon diese Erscheinungen bereits einem ziemlich vorgerückten Stadium der Wissenschaft angehören, wird man das genaue Analogon doch bereits bei den ersten Betätigungen des menschlichen Geistes wirksam finden, denen man die Bezeichnung mathematisch geben könnte. Von jeher und bis auf den heutigen Tag stellt z. B. die Entdeckung und Fundierung zahlreicher geometrischer Beziehungen einen Verallgemeinerungsprozess der eben beschriebenen Art dar. Am Anfang steht das Aperçu, oder das Ergebnis bewusster Betrachtung, meist noch mit speziellen und zufälligen Erscheinungen verknüpft. Und daran schliesst sich die mathematische Tätigkeit par excellence, das Sichten, Scheiden und Ausschliessen, der Uebergang vom Individuellen zum Typischen, zur Klasse, die Formulierung und der Beweis des Theorems. Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenmassen, die den Bedingungen des pythagoräischen Satzes genügten, waren den Babyloniern und Aegyptern schon längst vor Pythagoras bekannt und von ihnen zu praktisch wichtigen Zwecken benützt worden. Aber sie waren weiter nichts als bestenfalls nützliche oder amüsante Kuriositäten. Die Zufälligkeiten dieser Spezialfälle als unwesentlich und das wahre allgemeine Sachverhältnis erkannt und erwiesen zu haben, ist die grosse Tat des Pythagoras.

Wenden wir uns weiterhin einem Gegenstand zu, den heute fast jedermann mit der grössten Selbstverständlichkeit handhabt, bedingt durch die beispiellose Vollendung, die er erreicht hat. Diese letzte ist so gross und, wie uns scheint, selbstverständlich, dass sie Gedanken und Fragen nach den Schwierigkeiten auf dem Weg der Entwicklung fast müssig erscheinen lässt. Ich meine das Reich der rationalen Zahlen. Die gewaltige verallgemeinernde Leistung, die im Begriff der ganzen Zahl und dem Prozess des Zählens sich bereits manifestiert, sei nur beiläufig erwähnt. Dagegen möchte ich umso nachdrücklicher auf diejenigen grossen Verallgemeinerungen hinweisen, durch die man in der Menge der natürlichen ganzen Zahlen diejenige Gliederung und Uebersicht schuf, die die erste und unerlässliche Voraussetzung für ihre geschmeidige Handhabung darstellt. Das ist ihre konsequente Einteilung nach Potenzen irgendeiner Zahl, ihre systematische Anordnung in Dezimal-, Duodezimal- oder andern Systemen. Längst vorher hatte man gewisse Zahlen, die im Alltag von grosser Bedeutung waren, ausgezeichnet und besonders bezeichnet, auch wohl andere Zahlen zu ihnen in ordnende Beziehung gesetzt. Doch erst in der konsequenten Verallgemeinerung und Durchführung solcher Prinzipien lag die Leistung allergrösster Tragweite, auf die es ankommt! Aber so gross diese Leistung auch war, so genügte sie doch nicht, um der Handhabung der Zahlen diejenige Geschmeidigkeit zu verleihen, an die wir heute gewöhnt sind, ehe ein adäquater Ausdruck in Symbolen gefunden war. Wer sich einmal die Mühe nimmt, die Durchführung einer Division zweier grösserer Zahlen bei den alten Griechen zu verfolgen, wird überrascht sein über die Mühseligkeiten, denen sie sich dabei unterziehen mußten. Und das, obschon sie bereits ein allerdings sehr unvollkommenes Modell derjenigen Schöpfung besassen, die hier den Ausschlag gab, unseres heutigen Stellenwertsymbolismus. Auch hier war eine bewusste und konsequente Verallgemeinerung schliesslich das Entscheidende.

Was für eine grosse Verallgemeinerung über die natürlichen Zahlen hinaus die Erfassung der Brüche und der negativen Grössen, wie wir heute sagen, als Zahlen darstellt, d. h. als Elemente, die durch den selben operativen Formalismus unter sich und mit den natürlichen Zahlen verknüpft werden können, braucht kaum betont zu werden. Ausdrücklich soll jedoch auf die folgenschwere, in gewissem Sinne epochemachende Verallgemeinerung hingewiesen werden, die in der Loslösung des rechnerischen Formalismus (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) von den in Ziffern ausgedrückten Zahlen und seine Verwendung zur Verknüpfung beliebiger Symbole darstellt, denen man nur noch die Bedingung auferlegt, dass sie diese Operationen gestatten, d. h. den Uebergang zu dem, was wir Algebra nennen. Die gleichzeitige Erweiterung, d. h. Verallgemeinerung des Symbolismus durch das Potenzieren und besonders dessen Inverses, das Radizieren, waren desgleichen von einschneidender Bedeutung, indem sie schliesslich zu einer ungeheuren Erweiterung des Reiches der Zahlen zwangen, die allerdings erst nach langer Zeit gegen den heftigsten Widerstand und die schärfsten Anfeindungen sich durchsetzte. Der stärkste Bundesgenosse der Neuerer bei der Eroberung dieses Reiches war selbst wieder der fundamentale Trieb nach dem Universellen, Allgemeingültigen, hier speziell hinsichtlich der Existenz der Wurzeln von algebraischen Gleichungen. Und es zeigt sich gerade hier mit grösster Deutlichkeit der eigentliche Kern und die wahre Bedeutung jeder wirklich guten Verallgemeinerung. Sie wirft ein helles Licht auf das längst Bekannte; unter ihrer Kraft verknüpfen sich Dinge, die bis dahin getrennt erschienen, und verschmelzen zu einer organischen Einheit. Sie löst mächtige Impulse zu neuer Forschung aus und ist Quell neuer Entdeckungen.

Man könnte nun, die Entwicklung der Theorie der Zahlen verfolgend, weiterhin Glied an Glied schliessend, eine fast endlose Kette von Verallgemeinerungen teilweise von grösster Tragweite erkennen. Ich begnüge mich damit, einige wenige zu nennen: die Primzahl, die ganze algebraische Zahl, die hyperkomplexen Zahlen (als einfachste die Quaternionen), die transfiniten Zahlen, die Zahlkörper, die Ideale usw. Fast keine unter ihnen stellt sich als willkürliches Spiel des freien Geistes dar; viele dagegen haben für uns Heutige den Charakter des organisch Zwangläufigen, ja man könnte beinah sagen, des Selbstverständlichen, welch letztes freilich eine ungeheure Täuschung ist. Bloss die erstaunliche Einfachheit und Zweckmässigkeit dieser Schöpfungen, die ihrerseits wieder die wahre Ursache ihrer grossen klärenden und eindringlichen Wirkung ist, kann uns über das grosse Mass an Gedankenarbeit, sicherem Instinkt und Genialität hinwegtäuschen, die bei ihrem Entstehen am Werke waren.

So verschiedenartig die bis jetzt betrachteten Verallgemeinerungen auch scheinen, haben sie doch alle einen charakteristischen gemeinsamen Zug, der in der materiellen Ausweitung von Begriffen, Begriffsystemen und von Beziehungen in ihnen besteht. Wir sind bei ihrer Betrachtung bis in die neueste Zeit

[1]) Antrittsvorlesung (gekürzt), gehalten am 17. Juni 1944

vorgestossen, kehren jedoch jetzt, um Verallgemeinerungen in einem ganz andern Sinn zu studieren, nochmals zu den Griechen zurück. Schon ganz am Anfang habe ich im Zusammenhang mit dem Pythagoräischen Lehrsatz das Wort Beweis gebraucht. Für uns Heutige ist es Ausdruck eines sehr präzis definierten Prozesses. In den Zeiten, da man die ersten zaghaften Schritte unternahm, unsere Wissenschaften zu entwickeln, konnte sein Sinn nicht anders als ungewiss und schillernd sein. Man mag sich damit begnügt haben, eine neu entdeckte Beziehung mit solchen zu verknüpfen, bei denen man das Gefühl grösserer Gewissheit hatte, vielleicht bloss, weil man an sie gewöhnt war. Doch setzte bereits dieses blosse Verknüpfen die Existenz einer der gewaltigsten Verallgemeinerungen voraus, die der menschliche Geist je hervorgebracht hat. Sie besteht darin, gewisse Spielregeln des Setzens und Schliessens, des menschlichen Denkens überhaupt als allgemein verbindlich und ausschliesslich zu statuieren, mit einem Wort, sie setzt das voraus, was man als Logik bezeichnet. Sicher handelt es sich dabei nicht um eine Geistestat, die die Mathematik für sich beanspruchen kann; aber die geistige Haltung, deren Ausdruck sie darstellt, ist so innig mit derjenigen verknüpft, die für die Mathematik charakteristisch geworden ist, dass man gar nicht vermeiden kann, sie hier zu nennen. Stellt sie doch das Prinzip dar, das mächtig genug war, in gleicher Weise die innere Struktur, wie auch das äussere Gepräge unserer Wissenschaft vollends zu bestimmen. Mächtige Impulse, die sich in den tiefgründigsten Untersuchungen und grossartigsten Gestaltungen bis in die neueste Zeit hinein auswirkten, gingen und gehen noch von ihm aus. Eine von ihnen wurde bereits von den Griechen vollbracht, und zwar mit einer solchen Vollendung, dass sie durch mehr als zwei Jahrtausende hindurch Vorbild und Prüfstein geblieben ist. Ich meine die axiomatische Grundlegung und darauffolgende deduktive Entwicklung der Geometrie durch Euklid. Hier wird nicht bloss die eben erwähnte Ausschliesslichkeit im Lauf der Entwicklung mit äusserster Konsequenz verfolgt, sondern darüber hinaus eine neue Verallgemeinerung vorgenommen, indem deren Ausgangspunkt in Form eines Systems von Definitionen, Postulaten und Axiomen als ausschliesslich und allgemein verbindlich festgelegt wird. Wir befinden uns hier einer Verallgemeinerung allergrössten Stils im Gebiet des Methodischen gegenüber. Diesem letzten wird das meiste dessen angehören, dem wir von jetzt ab unsere Aufmerksamkeit schenken.

Die nächste grosse Verallgemeinerung, der wir uns jetzt zuwenden, ist mit dem Namen Descartes verknüpft. Längst vor Descartes hat man in Einzelfällen zur Darstellung bestimmter funktionaler Zusammenhänge, wie wir heute sagen, Koordinatensysteme verwendet. Aber man darf wohl den Wert dieser Verfahren vor Descartes hauptsächlich darin erblicken, dass sie Abstraktes in Sinnenfälliges verwandelten, wobei ich mich allerdings beeile, hinzuzufügen, dass gleichzeitig bereits bedeutende Ansätze in entgegengesetzter Richtung, im Sinne einer Algebraisierung der Geometrie, geschaffen worden waren. Und gerade auf diese kommt es hier an. Die grosse Leistung von Descartes besteht nämlich darin, mittels dessen, was man Koordinatensysteme nennt, die Beziehungen innerhalb geometrischer Gebilde und die Konstruktionen, die dazu dienen, jene in Evidenz zu setzen, in algebraische Relationen umzuwandeln, hernach diese Relationen untereinander und mit schon bekannten den Regeln der Algebra gemäss zu verknüpfen und die daraus sich ergebenden neuen Beziehungen ins Geometrische zurück zu übersetzen. Diese Tat war im höchsten Grade revolutionär und epochemachend. Worin bestand das Revolutionäre? Die Geometrie, die dank der Leistung Euklids mehr als zweitausend Jahre die unbestrittene Königin des mathematischen Reiches gewesen war, wurde gestürzt und musste die Herrschaft der Algebra überlassen. Die neue Methode führte sehr rasch zu erstaunlichen Resultaten, sodass der Anspruch auf unbedingte Superiorität, den sie von Anfang an erhob, bald ohne Widerspruch anerkannt wurde. Man gab sich den kühnsten Hoffnungen hin. Jede geometrische Beziehung, die überhaupt Anspruch auf Beachtung erheben konnte, so sagte man, sollte auf diese Weise — die nötige Geschicklichkeit in der Handhabung des algebraischen Apparates vorausgesetzt — den künftigen Mathematikern ohne Zwang zu genialen Einfällen sozusagen als normaler wohlverdienter Lohn für ihre handwerkliche Geschicklichkeit zufallen. Wer über genügend Talent und Energie verfügte, um die nötige Gewandtheit in der Beherrschung des Formalismus zu erlangen, musste fast zwangläufig zum Entdecker werden. Eine grandiose und gleichzeitig lähmende Perspektive. Die mathematische Wissenschaft schien im Begriff zu sein, sich zu industrialisieren. Die Mathematiker erschienen künftig als bestenfalls hochqualifizierte Arbeiter an einer ungeheuren erdrückenden Maschinerie. Die erreichte Universalität drohte durch ihre trostlose Monotonie jede Individualität zu ersticken und das Leben auszulöschen.

Die weitgespannten Hoffnungen der Carthesianer erwiesen sich bald als trügerisch. Man musste einsehen, dass eine Anzahl von Problemen und unter ihnen sehr naheliegende, wie z. B. die Konstruktion der Tangente, der Lösung durch die neue Methode oft unüberwindlichen Widerstand entgegensetzten. Eine Krise ergriff als Folge der Enttäuschung dieser überspannten Hoffnungen die ganze abendländische Mathematikerwelt. Ihre Lösung trat in einer Weise ein, die für eine derartige Situation fast typisch zu sein scheint. An zwei auseinanderliegenden Stellen unseres Kontinents drangen unabhängig voneinander zwei geniale Mathematiker zu derjenigen Erweiterung des algebraischen Formalismus vor, durch die die Krise mit einem Schlag überwunden und darüber hinaus eine neue Perspektive von ungeahnter Weite eröffnet wurde. Die Differentiation und Integration (Operation und Inverses!), durch die Newton und Leibniz den algebraischen Formalismus erweiterten, also verallgemeinerten, führten in kürzester Zeit zu Einsichten und Entwicklungen, die selbst die kühnsten Hoffnungen beschämten. Und kaum auf diese neue Stufe des Universellen emporgestiegen, machte man unverzüglich die Ansprüche der Carthesianer zu seinen eigenen. Zwar fehlte es diesmal an energischem Widerstand nicht. Man warf den Neuerern alles Denkbare vor, vom Mangel an Respekt vor den Gesetzen der Logik bis zur bewußten Charlatanerie. Und hinsichtlich des ersten Punktes befanden sich die Konservativen tatsächlich im Recht. Dadurch, dass man sich «unendlicher Prozesse» zur Definition der neuen Operationen bediente, hatte man den Rahmen der hergebrachten aristotelischen Logik allerdings gesprengt, und zwar auf irreparable Weise. Alle seitherigen Versuche, den entstandenen Schaden zu heilen, haben sich zuletzt als Streckungen, d. h. als Verallgemeinerungen der überlieferten Logik erwiesen. Die schaffenden Mathematiker der damaligen Zeit focht das wenig an. Berauscht und vielleicht auch geblendet von den Erfolgen der neuen universalen Methode, überliessen sie sich völlig dem gewaltigen Impuls, der von ihr ausging. Neue glänzende Entdeckungen folgten sich überstürzt, und vieles von dem, was man seit langem kannte, erschien in neuem hellem Licht. Der Glaube an die schrankenlose durchdringende Macht der neuen Methode, der sich kein noch so verstecktes Geheimnis auf die Dauer sollte entziehen können, wuchs bei Vielen ins Unbeschränkte. Ohne diesen Glauben, der ihrem Geiste mächtige unermüdliche Schwingen verlieh, könnte man sich die rastlose Tätigkeit jener genialen Mathematiker, die im 18. Jahrhundert unsere moderne Mathematik fast in allen Disziplinen begründeten und zum Teil bereits zu grosser Vollendung entwickelten, kaum denken. Den prägnantesten Ausdruck für das Vertrauen in die Kraft der neuen Methode prägte wohl Euler, indem er sagte, die Feder sei oft klüger als der Mathematiker.

Lassen wir darüber auch noch einen Augenblick einen der berufensten französischen Zeugen jener Epoche, Laplace, zu Worte kommen. Er sagt: «Wenn man sich der algebraischen Analysis überlässt, gelangt man durch die Allgemeinheit dieser Methode und dadurch, dass sie den unschätzbaren Vorteil gewährt, Schlussfolgerungen in mechanische Operationen umzuwandeln, oft zu Resultaten, die der geometrischen Synthese überhaupt nicht zugänglich sind. Die Fruchtbarkeit der algebraischen Methode ist so gross, dass man ganz spezielle Tatsachen nur in ihre universelle Sprache zu übersetzen braucht, um aus ihrer blossen Ausdrucksform eine Fülle von neuen, unerwarteten Tatsachen herauswachsen zu sehen. Keine Sprache ist einer derartigen Eleganz fähig...» und weiter: «Die Mathematiker dieses Jahrhunderts sind von ihrer (der Methode) Ueberlegenheit überzeugt und deshalb rastlos bemüht, die Herrschaft der analytischen Methode auszudehnen und beengende Schranken niederzureissen.»

Und wieviele und was für gewaltige Schranken sind damals niedergerissen worden! Ich erinnere ausdrücklich nur an diejenige, die teilweise auf philosophischem Fundament gegründet die Mathematik von der Physik trennte, und an sie vor allem aus zwei Gründen. Ihre Beseitigung hat eine ungeahnte Erweiterung des mathematischen Tätigkeitsfeldes bewirkt, gewaltige Impulse sind von den Fragen und Rätseln ausgegangen, die diese andere Welt den Mathematikern stellte. Und dann sind, freilich erst viel später, gerade in dieser neuen Welt gewisse Schranken der analytischen Gewalt und damit vielleicht auch unserer deduktiv konstruktiven Fähigkeiten am sinnenfälligsten geworden. Analoge Erscheinungen zeigten sich übrigens im 19. Jahrhundert mit grösster Deutlichkeit auch auf dem ureigensten Gebiet der Mathematik selbst. Da und dort und je länger desto nachdrücklicher wurden deswegen Stimmen laut, die gegen die Diktatur der algebraischen Analysis nachdrücklich Protest erhoben und dies mit einem Argument, das diese sozusagen in ihrem Lebensnerv traf, indem man sich mit Entschiedenheit gegen einen wesentlichen Anspruch dieser Analysis wandte, nämlich gegen die von Laplace so hoch gepriesene Superiorität in jeder Hinsicht. Man warf ihr im Gegensatz dazu Schwerfälligkeit und Dunkelheit vor. Kaum 30 Jahre nachdem Laplace den eben zitierten Hymnus geschrieben hatte, trat im selben Frankreich Poncelet auf und forderte für die Geometrie sachgemässere Methoden. Diese Forderung unterstützte er nachhaltig durch die Aufstellung von zwei Prinzipien, man könnte sagen arteigener Natur, die ihrerseits selbst grosse Verallgemeinerungen darstellen, nämlich dasjenige der Kontinuität und das der Dualität. Sie gestatteten die Herleitung einer grossen Zahl von geometrischen Einsichten mit einer Eleganz und Kürze, deren die analytische Methode zunächst nicht fähig schien. Noch viel einschneidender als das eben erwähnte erwies sich jedoch das offenbare Ungenügen der Analysis in der hergebrachten Form vielen Problemen gegenüber, die aus ihr selbst herausgewachsen waren, sowie das Hervortreten gewisser Unstimmigkeiten als Folgen eines allzu blinden Glaubens und Vertrauens in ihre unbeschränkte Macht und Gutartigkeit.

Im Laufe der über hundert Jahre dauernden rapiden Entwicklung hatten sich teilweise fast unvermerkt wesentliche Begriffe beträchtlich erweitert. Ihr präziser Sinn war ehemals denjenigen Mathematikern, die sie geprägt hatten, aus dem Zusammenhang, aus dem sie hervorgingen, so unmittelbar evident gewesen, dass ihnen eine ausdrückliche Definition als blosse Pedanterie hätte vorkommen müssen. Indem man nun Beziehungen, deren Richtigkeit innerhalb der ursprünglichen engern Begriffswelt ausser Zweifel stand, oft unbesehen auf die neue erweiterte übertrug, musste es fast mit Notwendigkeit zu Irrtümern kommen. Ihr Hervortreten warf dann plötzlich ein scharfes Schlaglicht auf das, was in den neuen Zuständen unbestimmt und zweifelhaft war und erweckte unmittelbar das kräftige Bedürfnis nach Klärung und Stabilisierung, also eine Tendenz, die man als axiomatisch bezeichnen könnte. Sie führte zur Aufstellung von zahlreichen sehr präzisen Definitionen, wobei man sich zwar der hergebrachten Terminologie bediente, inhaltlich jedoch teilweise sehr grosse Verallgemeinerungen schuf. Es sei in diesem Zusammenhang an die Namen Cauchy, Dirichlet, Riemann erinnert, denen wir z. B. die Klärung des Begriffs Funktion und im Zusammenhang damit die Präzisierung der ganzen Begriffswelt verdanken, die sich in der Analysis um diesen gruppiert. Als weitere Aeusserung der selben allgemeinen Tendenz in der Richtung nach dem axiomatischen hin ist die Forderung der Methodenreinheit innerhalb der einzelnen mathematischen Disziplin zu werten. Beispielhaft wirkte in diesem Sinne der geschlossene Aufbau der Funktionentheorie mittels Potenzreihen durch Weierstrass. Beide Tendenzen, diejenige nach dem möglichst Universellen hinsichtlich der Weite der Begriffsbildung und auch jene hinsichtlich des Axiomatischen, waren gleichzeitig bei den grossen Erweiterungen der Geometrie im 19. Jahrhundert am Werk.

Im Zusammenhang mit dieser Krise der klassischen Analysis setzte sich dann während der letzten hundert Jahre eine Umgestaltung und Erweiterung der Mathematik von grossem Ausmass durch. Neue Begriffswelten von grosser Allgemeinheit wurden geschaffen. Ich erinnere z. B. an die Mengentheorie und die Topologie. Zugleich erfuhren viele von den hergebrachten fundamentalen Begriffen Verallgemeinerungen grössten Umfanges. Das bewusste Streben nach weitester Allgemeinheit entwickelte sich zur machtvoll treibenden Kraft. Allenthalben wurden die herkömmlichen Schranken gesprengt. Gleichzeitig erstarkten glücklicherweise auch Tendenzen, die kräftig genug wurden, um die Gefahr einer chaotischen Entwicklung mächtig einzudämmen. Dies gilt in erster Linie von der Tendenz in Richtung des Axiomatischen und der gewaltigen ordnenden Kraft, die ihr innewohnt. Und endlich werden viele von den neuen Zweigen unserer Wissenschaft untereinander und mit dem klassischen Bestand durch ein sehr allgemeines und weitgespanntes Begriffssystem organisch verknüpft, dasjenige der Gruppen.

Dieses ist es, das heute in mancher Hinsicht die verbindende Rolle übernommen hat, die ehemals der Analysis allein zukam. Als mathematisches Gebilde stellt der Gruppenbegriff selbst eine Verallgemeinerung von allergrösster Fruchtbarkeit dar. Schon längst ehe er Gegenstand der mathematischen Forschung war, hat er der Sache nach eine ganz fundamentale Rolle bei vielen Untersuchungen gespielt. Es war da eine Kraft sozusagen anonym und halb unbewusst in den Dienst der Erkenntnis gestellt worden. Sobald nun ihr Wesen klar und bewusst erkannt und zweckmässig formuliert worden war, liessen schon die ersten Schritte, die man bei der Durchforschung des neuen Begriffsgebildes tat, in Verbindung mit Gegenständen, bei deren Untersuchung es sozusagen inkognito bereits hervorragend mitgewirkt hatte, seine gewaltige ordnende und gestaltende Kraft im hellsten Lichte erscheinen.

Das hat sich seither nicht gemindert, im Gegenteil. Rasch eroberte es viele mathematische Disziplinen eine nach der andern und heute nimmt es in vielen von ihnen eine dominierende Stellung ein.

Endlich will ich nicht versäumen, auch diejenigen Tendenzen in der Mathematik zu streifen, die den Inbegriff der umfassendsten Verallgemeinerung in dieser Wissenschaft darstellen. Sie äussern sich im Versuch, die Logik selbst, die doch das Fundament der ganzen Wissenschaft darstellt, zu symbolisieren und zu algebraisieren, also eine Art Uebermathematik zu schaffen; Versuche mit einem wahrhaft grandiosen Ziel und schrankenlosen Ansprüchen, eine Konzeption, deren Alter übrigens schier ebenso ehrwürdig ist wie dasjenige der Mathematik selbst. Immer wieder trat sie im Laufe der Entwicklung der Mathematik hervor. Ich erinnere beispielsweise an Leibniz, der den Gedanken wiederholt mit grösster Klarheit formuliert hat. Seit der Jahrhundertwende befindet sich das Unternehmen, teilweise unter leidenschaftlicher Parteinahme der Mathematiker pro und contra, in ständiger Entwicklung. Es wäre vermessen, heute ein abschliessendes Urteil über Erfolg oder Versagen fällen zu wollen. Jedoch wird man, ohne Unrecht zu tun, feststellen dürfen, dass wenigstens die ersten grossen Anläufe, die sich um die Jahrhundertwende herum als Logistik präsentierten, ihr Ziel bei weitem nicht erreichten.

Es ist selbstverständlich, dass so machtvolle Tendenzen wie die eben geschilderten den Habitus einer Wissenschaft weitgehend bestimmen müssen. Das trifft ebensosehr für das Gegenständliche zu, das im Brennpunkt des Interesses steht, wie für die Struktur der verwendeten Methoden. Und ganz besonders drücken sie der äussern Form der Wissenschaft ein sehr charakteristisches Gepräge auf. Fast jedes mathematische Lehrbuch aus den letzten 20 Jahren, das vorwiegend Gegenständen gewidmet ist, die in unserm Jahrhundert erforscht wurden, spiegelt sie mit grosser Deutlichkeit wider. Da äussert sich z. B. die Tendenz zum Axiomatischen unverkennbar in einer typischen Struktur zahlloser Beweise. Für die Gesamtanlage versteht sie sich sozusagen von selbst. Dieses Typische besteht insbesondere darin, dass das axiomatisch deduktive Verfahren innerhalb der Erkenntnis eine Rangordnung statuiert. Eine solche kann aber ihrer Natur nach nicht anders als künstlich sein. Manches, was sich bei diesem Verfahren erst als späte Folge ergibt, erscheint dem unbefangen betrachtenden Intellekt oft viel näherliegend als vieles von dem, wodurch es begründet wird, und umgekehrt. Indem ferner das Verfahren erst einsetzt, wenn bereits eine deutliche und eindringliche Anschauung von dem darzustellenden Gegenstande vorhanden ist, nachdem man oft auf ganz andern Wegen zu denjenigen Einsichten und Begriffen vorgestossen ist, die sich nachträglich als Kern- und Angelpunkte erweisen, vermag es sich von jenen Wegen häufig in hohem Masse zu emanzipieren und kann, indem es diese Kernpunkte in den Vordergrund stellt, zu Darstellungen von erstaunlicher Kürze und Prägnanz führen. Aber indem es jene Geisteskräfte, die bei der Entdeckung eine überragende Rolle spielten, teilweise verschleiert oder gar eliminiert, zerschneidet es oft die meisten lebendigen Fäden, die unsern Geist auf eine unmittelbare Weise mit dem betrachteten Gegenstande verknüpfen, und überliefert uns dann Gebilde, die ihre Vollendung sozusagen mit dem Leben bezahlen mussten.

Was nun die Allgemeinheit der Begriffe und Begriffsysteme betrifft, so muss diese bisweilen mit einem nicht minder hohen Preis bezahlt werden. Diejenigen, die es unternehmen, Aussenstehenden Ergebnisse der modernen mathematischen Forschung nahe zu bringen, finden sich fast unüberwindlichen Schwierigkeiten gegenüber. Sie stehen unter dem Zwang zweier, einander diametral entgegengesetzter Forderungen, derjenigen nach grösster Allgemeinheit und weitestgehender Abstraktion, und derjenigen unmittelbaren natürlichen Ansprechens. Indem die allgemeinen Begriffe, die an den Anfang gestellt werden, meist späte Ergebnisse langer und oft komplizierter Entwicklungen sind, gilt hier das selbe wie beim Axiomatischen. Ferner führt das unerhört weite Ausholen häufig zu einer Weitläufigkeit im Prozesse der Entwicklung, die die allergrössten Anforderungen an die Geduld des Lesers stellt, und begünstigt die allerdings sehr irrige Meinung, als ob in der Mathematik keine unbefangene Einfachheit existiere, sondern dort selbst die scheinbar einfachsten Dinge von einer hoffnungslosen Kompliziertheit seien.

Zweitakt-Gleichstrommotoren

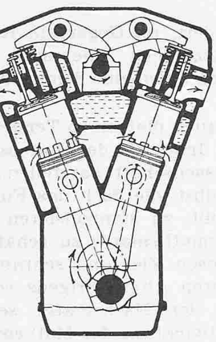

Abb. 1. Zweitaktmotor mit Auslassventilen Krupp Baumuster M 713

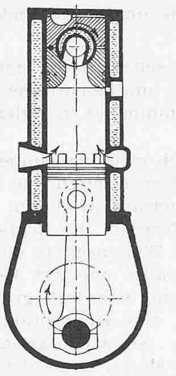

Abb. 2. Zweitakt-Drehschiebermotor Bauart Cross

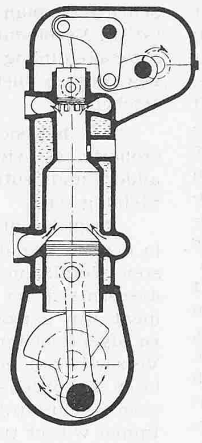

Abb. 3. Zweitakt-motor mit Kolben-ventil Bauart Jameson

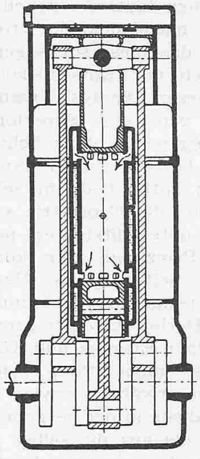

Abb. 4. Gegenkolben-motor mit oberem Quer-haupt, Lizenz Junkers

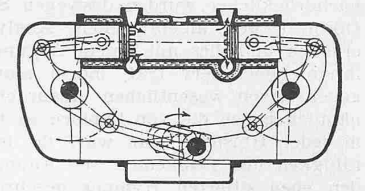

Abb. 5. Gegenkolbenmotor mit seitlichen Schwinghebeln

Man kennt das tiefe Missbehagen, das immer wieder von denen gerade hierüber geäussert wird, die die Mathematik als Hilfswissenschaft brauchen, und man muss leider befürchten, dass gerade hier der schrankenlose Zug nach dem Allgemeinen der Wirksamkeit der Mathematik nicht immer dienlich ist.

Zum Schlusse sei es gestattet, in diesem Zusammenhang noch auf einen Umstand hinzuweisen, der, wie mir scheint, eine sehr ernste Gefahr für unsere Wissenschaft darstellt. Die ungeheure Fülle der neuen Schöpfungen und Ergebnisse zwingt jeden, der sie zusammenfassend erörtern will, zur äussersten Knappheit, selbst in den grossen Zügen. Dadurch werden an jedermann, der mittels einer solchen Darstellung zu einem lebendigen Verhältnis zur Sache durchdringen will, die allergrössten Anforderungen hinsichtlich Konzentration, Ausdauer und mathematischer Fähigkeit gestellt und das Studium wird ein sehr hartes Werk.

Triebwerke für Zweitaktmotoren mit Gleichstromspülung

Nachdem sich das Zweitaktverfahren heute nun bei Motoren aller Leistungsklassen durchgesetzt hat, wird im folgenden (nach einer Arbeit von H. U. Tänzler in der «ATZ» vom 25. Febr. 1944) ein kurzer Ueberblick über die Möglichkeiten gegeben, mit diesen Motoren Höchstleistungen zu erreichen. Gerade die Benzineinspritzung hat dazu geführt, dass nun auch bei Otto-Motoren ohne Verlust mit reiner Luft gespült werden kann, wie dies bis anhin nur bei Dieselmotoren möglich war. Um Höchstleistungen zu erreichen, müssen unter anderm hohe Kolbengeschwindigkeiten gefahren werden, was wiederum bei normalem Spülluftdruck nur mit Gleichstromspülung erreichbar ist. Folgende elf Wege, die bis heute in dieser Richtung eingeschlagen wurden, seien kurz beleuchtet.

1. Köchlin nimmt einen Becherkolben, mit dem er die Auslasschlitze steuert. Der Vorteil liegt im einfachen Triebwerk, der Nachteil im hohen Kolbengewicht, dem symmetrischen Verlauf von Einlass- und Auslasszeiten und der ungünstigen Verbrennungsraumform. Der «Schliha»-Motor ist im Aufbau ähnlich mit allen Nachteilen und Vorteilen des Köchlin-Motors. Beide Bauarten sind verlassen worden.

2. Krupp (Abb. 1), Alfa Romeo, General Motors und Petters wählen Auslassventile im Zylinderkopf. Bei mehr als 2000 U/min geht der Ventilantrieb nur noch mit Schwierigkeiten, da beim Zweitaktmotor die Ventile bei jedem Hub betätigt werden müssen. Vorteil: Unabhängige Steuerzeiten, Steuerung bekannt vom Viertakt-Motor und durchkonstruiert. Nachteile: Hohe Ventilbeschleunigungen, schlechtere Spülverhältnisse als mit Schlitzen. Grosse Spülluftmengen notwendig zur Kühlung der Auslassventile.

3. Continental (USA) verwendet einen Rohrschieber. Vorteile: günstige Schlitzanordnung, von einander unabhängige Ein- und Auslasszeiten. Nachteile: Schlechte Wärmeabfuhrverhältnisse, grosses oszillierendes Gewicht (wie bei allen Schiebermotoren!).

4. Drehschiebersteuerungen von Cross (Abb. 2), Bair, Bristol, Aspin und Sklenar haben als Vorteil die rotierende Bewegung, der aber sehr grosse Schwierigkeiten bei der Schmierung, Wärmeableitung und Dichtung als Nachteile gegenüberstehen. Aus diesen Gründen wurde bis heute von diesen Lösungen auch noch kein verkaufsreifes Ergebnis herausgebracht.

5. Jameson (Abb. 3) und Burmeister & Wain versuchen die Lösung mittels eines gesteuerten Steuerkolbens. Der Vorteil liegt im günstigen Strömungsverlauf und in der Phasenverschiebung der Ein- und Auslasszeiten, der Nachteil in der starken Drosselung der Spülung bei hohen Drehzahlen und der starken Beanspruchung des Kolbens durch den Gasdruck.

6. Junkers (Abb. 4) erreicht mit dem Gegenkolbenprinzip mit Querhaupt bei niedrigen Drehzahlen gute Leistungen, hat aber die schwerwiegenden Nachteile grosser Baulänge, grosser Höhe und grossen Gewichts in Kauf zu nehmen. Infolge der grossen Massen kommt der Junkers-Gegenkolbenmotor in dieser Ausführung nur für Langsamläufer in Frage. Zoller versucht den Erfolg mit einem doppeltwirkenden Gegenkolbenmotor zu erreichen, scheitert aber wie bei seinem Gebläse an der Kompliziertheit der Herstellung und des Unterhalts.

7. Sulzer und andere Firmen wählen für kleine Motoren mit Gegenkolben (Abb. 5) Schwinghebel für die Kraftübertragung. Neben den bekannten Vorteilen bieten aber die grossen oszillierenden Massen und die grosse Anzahl von Lagerstellen Grenzen, sodass Höchstleistungen in dieser Richtung nicht erwartet werden dürfen.

8. Damit kommt man zu den Lösungen mit U-förmigem Verbrennungsraum. Puch (Abb. 6) hat eine gemeinsame Pleuelstange, DKW lenkt die zweite an, Schauer (Abb. 7) neigt die beiden Zylinder leicht V-förmig und hat einen grösseren Einlass- als Auslasskolben, Garelli verbindet beide Kolben durch einen gemeinsamen Kolbenbolzen mit einem Pleuel und verliert so die Möglichkeit der Phasenverschiebung der Steuerzeiten, Salmson-Szydlowsky (Abb. 8) baut noch zusätzlich ein Fenster zwischen Ein- und Auslasszylinder in seinen Versuchsflugmotor ein. Alle diese Lösungen haben den grossen Nachteil des U-förmigen Verbrennungsraumes

Doppelkolben-Motoren mit U-Zylinder

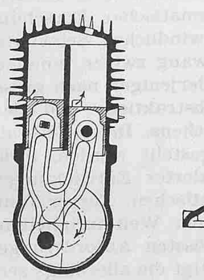

Abb. 6. Bauart Puch

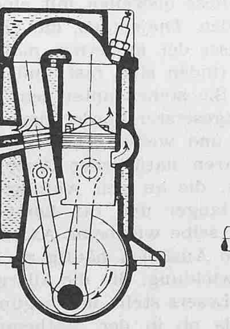

Abb. 7. Bauart Schauer

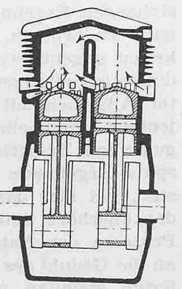

Abb. 8. Bauart Salmson Szydlowski

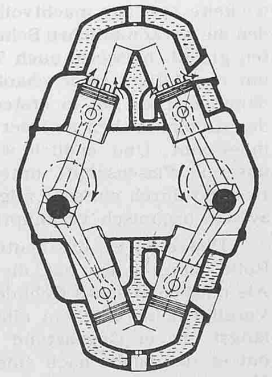

Abb. 9. Doppelkurbelwellen-motor mit abgeknickten Zylindern, Patent Saurer