

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	123/124 (1944)
<b>Heft:</b>	1
<b>Artikel:</b>	Untersuchung einer nach den Euler'schen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine
<b>Autor:</b>	Ackeret, J.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-53865">https://doi.org/10.5169/seals-53865</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

baut ist. Für Stäbe veränderlichen Querschnitts erweitert Euler den Ausdruck der «Potentialkraft» zu

$$\int \frac{E k^2 ds}{R^2}$$

Beachten wir, dass nach Gleichung (3)  $M = \frac{E k^2}{R}$  ist, so wird

$$\int \frac{E k^2 ds}{R^2} = \int \frac{M^2 ds}{E k^2} \quad \dots \dots \quad (10)$$

Die «vis potentialis» ist tatsächlich (bis auf den Zahlenfaktor  $\frac{1}{2}$ ) identisch mit der Formänderungsarbeit. Dass diese Formänderungsarbeit zu einem Minimum werden müsse, hat Daniel Bernoulli festgestellt und die Anwendung dieses Satzes in der Biegsungslehre hat Leonhard Euler gezeigt; es scheint damit geprägt, in Zukunft den Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit als Bernoulli-Eulerschen Satz zu bezeichnen.

3. Dass Euler die Bedeutung seiner Knickformel klar erkannt hat, geht daraus hervor, dass er selbst in späteren Arbeiten noch mehrmals auf dieses Stabilitätsproblem zurückgekommen ist. Von diesen späteren Arbeiten halte ich besonders die Abhandlung «Sur la Force des Colonnes»<sup>2)</sup> für bedeutungsvoll und es soll nachstehend noch die dort gegebene einfache und direkte Ableitung der Knickformel nachskizziert werden (Abb. 3). Für die Steifigkeit  $E k^2$ , die in der früheren Abhandlung noch als «absolute Elastizität» (elasticitas absoluta) bezeichnet wurde, finden wir hier die uns zutreffender scheinenden Bezeichnungen «moment du ressort» oder auch «moment de roideur».

Euler wählt hier die ursprüngliche Stabaxe als  $x$ -Axe und beschränkt sich von vornherein auf kleine Ausbiegungen, für die der Krümmungsradius  $R$  sich auf den Wert

$$R = -\frac{d^2 x}{d^2 y}$$

vereinfacht. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$P y = \frac{E k^2}{R} = -\frac{E k^2 d^2 y}{d x^2}$$

folgt die Differentialgleichung

$$\frac{E k^2}{P} d^2 y + y d^2 x^2 = 0 \quad \dots \dots \quad (11)$$

Durch zweimalige Integration ergibt sich mit  $\vartheta = y'_A$  die Lösung

$$\frac{y}{\vartheta} \sqrt{\frac{P}{E k^2}} = \sin x \sqrt{\frac{P}{E k^2}} \quad \dots \dots \quad (12)$$

Für  $x = a$  muss  $y = 0$  sein; damit wird

$$a \sqrt{\frac{P}{E k^2}} = \pi$$

oder

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E k^2}{a^2} \quad \dots \dots \quad (9a)$$

Anschliessend untersucht Euler auch Stäbe mit veränderlicher Steifigkeit und den Einfluss des Eigengewichtes und diskutiert Modellregeln für die Bemessung von Säulen.

4. Den paradox erscheinenden Unterschied zwischen der Wirkung einer horizontalen und einer vertikalen Last (Abb. 4), d. h. den Unterschied zwischen den gewöhnlichen Biegungsproblemen erster Ordnung und den Stabilitätsproblemen hat schon Euler grundsätzlich erkannt: während die Ausbiegung  $y$  bei der gewöhnlichen Biegung proportional zur Belastung anwächst, erleidet der axial belastete Stab für  $P < P_{kr}$  überhaupt keine Ausbiegung; bei  $P = P_{kr}$  biegt er aber plötzlich aus und es ist

<sup>2)</sup> L. Euler: Sur la Force des Colonnes. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Berlin. Tom. XIII, 1757.

hier anscheinend das Kontinuitätsprinzip verletzt. Euler hat dieses Phänomen dadurch zu erklären und mit dem Kontinuitätsprinzip in Einklang zu bringen versucht, dass er für  $P < P_{kr}$  die Ausbiegungen als imaginär ansieht; für  $P = P_{kr}$  werden sie null und für  $P > P_{kr}$  reell und wachsen mit wachsender Last.

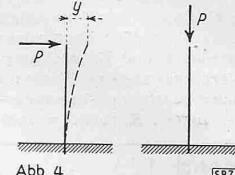


Abb. 4

[SBZ]

Wir können heute einfacher zeigen, dass das Knickproblem das Kontinuitätsprinzip nicht verletzt, etwa dadurch, dass wir durch Einführung einer schrägen Belastung einen stetigen Übergang zwischen den beiden Belastungsfällen der Abb. 4 herstellen, eine Aufgabe, die zuerst Navier gelöst hat, oder auch dadurch, dass wir die Eigenschwingungen eines gedrückten Stabes betrachten. Euler hat in seiner Abhandlung über die elastischen Kurven auch Schwingungsprobleme untersucht. Der innere und damit auch der formale Zusammenhang zwischen den beiden Problemgruppen ist dadurch gegeben, dass bei beiden Gleichgewichtsaufgaben zu lösen sind; bei den Schwingungsproblemen müssen die inneren elastischen Kräfte mit den Trägheitskräften, bei den Stabilitätsproblemen mit den durch die Ausbiegung verursachten Ablenkungskräften im Gleichgewicht sein. Schreiben wir die Grundschwingungszahl  $v$  eines elastischen Stabes nach Abb. 3 mit der auf die Längeneinheit bezogenen konstanten Masse  $q/g$  an:

$$v = \frac{\pi}{2 a^2} \sqrt{\frac{E J g}{q}} \sqrt{1 - \frac{P a^2}{\pi^2 E J}} = v_0 \sqrt{1 - \frac{P}{P_{kr}}}$$

so stellen wir fest, dass die Frequenzen mit wachsender Last  $P$  immer kleiner werden und der Knickvorgang auch als Eigenschwingung von unendlich kleiner Frequenz gedeutet werden kann, bei der der Stab ausschwingt, aber nicht mehr in seine Ruhelage zurückkehrt.

5. Wir wissen heute, wie lange es nach Euler noch gedauert hat, bis sich eine genügend umfassende Erkenntnis des immer wieder reizvollen Problems der elastischen Stabilität allgemein durchgesetzt hat. Sehen wir von den damals wenig beachteten und nachher wieder vergessenen, fast visionär anmutenden Erkenntnissen Naviers ab, so dauerte es rund 150 Jahre, bis L. v. Tetmajer auf experimentell-statistischem Wege und Engesser und Kármán theoretisch die Eulersche Knickformel auf den unelastischen Bereich erweiterten.

Euler war nicht Ingenieur, sondern Mathematiker und Geometer. Probleme der Mechanik beschäftigten ihn in erster Linie als mathematische Aufgaben. Wir erkennen beispielsweise die Grenzen seines Interesses bei einem technischen Problem daran, wie er sich mit dem Begriff der Steifigkeit  $E k^2$  zu definieren und anzugeben, wie er durch Versuche bestimmt werden könnte. Er erklärt auch solche Versuche für wünschenswert, sie aber selbst durchzuführen, kam ihm offenbar nicht in den Sinn; es war ihm gar nicht wichtig zu wissen, wie gross der numerische Wert der Steifigkeit für eine bestimmte Stütze ist.

Geraade mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten aber, die auf der damaligen Unkenntnis von uns heute geläufigen Begriffen der Biegsungslehre beruhen, muss die Leistung Eulers bei der Entdeckung der Knickformel umso höher bewertet werden. Seine Methodik, die bei der Überwindung mathematischer Schwierigkeiten auf die Erfassung des Wesentlichen ausgeht, ist für uns auch heute noch wertvoll, aufschlussreich und von vorbildlicher Klarheit und Eleganz der Darstellung. Die Herausgabe der gesammelten Werke dieses wohl umfassendsten Geistes, den unser Land je hervorgebracht hat, ist nicht nur eine Dankesschuld, sondern sie bedeutet noch mehr eine Bereicherung unseres Wissens im Gebiet von Mathematik und Mechanik und damit auch der Technik.

## Untersuchung einer nach den Euler'schen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine

Von Prof. Dr. J. ACKERET, E. T. H. Zürich

Leonhard Euler hat bekanntlich außer seinen grandiosen Arbeiten zur reinen Mathematik auch auf dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik grundlegend wichtige Beiträge geliefert. Wo immer er eine Möglichkeit einer rationalen Behandlung sah, griff er zu, und dadurch, dass er sich nicht durch den primitiven Zustand der damaligen Technologie entmutigen liess, fand er ganz neue Zusammenhänge und Beziehungen und kam zu Vorschlägen, die zu seiner Zeit wohl unaufführbar waren, im Laufe der nächsten zwei Jahrhunderte aber schliesslich zum Allgemeingut der Technik wurden. Unter den zahlreichen neuen Ideen, die bisher in wenig zugänglichen Akademieberichten vergraben lagen (nunmehr aber dank einer gross-

zügigen Spende von Industrie, Handel und öffentlichen Werken der Schweiz gesammelt herausgegeben werden können), ragt eine durch ihre besondere Fruchtbarkeit hervor: die Erfahrung des Leitapparates für Turbinen<sup>1)</sup>. Sie ist das Ergebnis einer genauen Analyse der Verluste im sog. Segner'schen Wasserrad. Andreas Segner, Professor in Göttingen, gab 1750 in Anlehnung an frühere Vorschläge von Daniel Bernoulli (1738) die Konstruktion eines reinen Reaktionsrades an, das seinerzeit mehrfach ausgeführt wurde und später immer wieder auftauchte

<sup>1)</sup> Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau. Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 1754 (gelesen 13. Sept. 1753).

(beispielsweise hat Parsons 1893 solche Räder für Dampfturbinen benutzt, wobei er allerdings einen sehr alten Vorläufer in Heron von Alexandria, 120 v. Chr., hat). Durchsetzen konnte sich das reine Reaktionsrad in grösseren Anlagen nie; es fristet aber heute noch ein gemütliches Leben in Form der kleinen Rädchen, die als Wassersprenger in Gärten verwendet werden.

Wir wollen, um die Zusammenhänge auf möglichst einfache Weise zu erkennen, uns der modernen Ausdrucksweise und Schreibart bedienen, obwohl die alten Formeln von Euler alle wesentlichen mechanischen Beziehungen vollständig enthalten. Wir müssen immerhin nicht vergessen, dass damals (um 1750) der Energiesatz in seiner Allgemeinheit überhaupt nicht bekannt war, es also eine besondere Leistung darstellt, dass Euler gerade die Frage des Wirkungsgrades in so befriedigender Weise erledigen konnte.

Betrachten wir das einfache Schema des Segnerrades Abb. 1, so ist das Drehmoment aus dem Drehimpulssatz leicht abzuleiten. Man muss nur bedenken, dass die Corioliskräfte bei der Drehung eine Arbeit leisten, die sich in Form erhöhten Gefälles  $H_a$  vor der Ausströmöffnung findet.

Nämlich:

$$H_a = a + \frac{u^2}{2g}$$

wo  $u$  die Umfangsgeschwindigkeit ist; die relative Ausströmgeschwindigkeit ist,reibungsfrei gerechnet:

$$\sqrt{2ga + u^2}$$

die absolute:

$$\sqrt{2ga + u^2} - u$$

diese ist also immer positiv; es ist stets ein Verlust vorhanden.

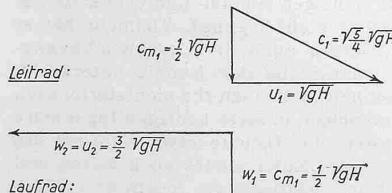


Abb. 4. Geschwindigkeitsdreiecke der Eulerturbine

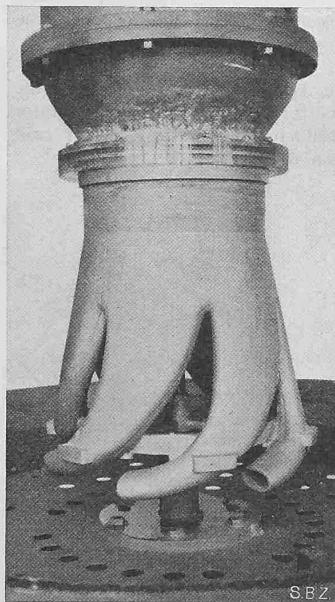


Abb. 5. Laufrad der Versuchsturbine

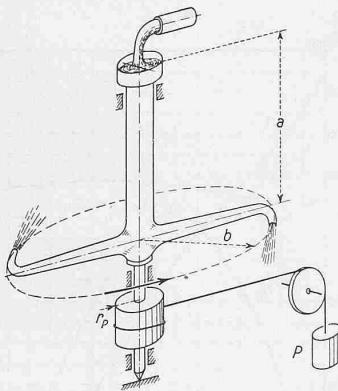


Abb. 1. Segner'sches Reaktionsrad

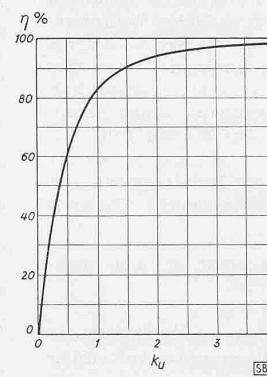


Abb. 2. Theoretischer Wirkungsgrad des Segnerrades

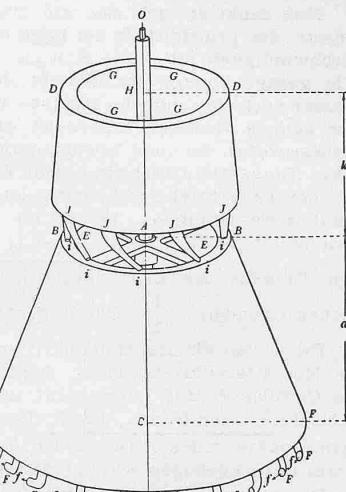


Abb. 3 (rechts). Vorschlag von Euler für eine Reaktions-turbine mit Leitrad. (Die Figur ist nach E. Brauer und M. Winkelmann gegenüber dem Euler'schen Original etwas verbessert)

Das Drehmoment wird:

$$2 \frac{\gamma}{g} Q \left\{ \sqrt{2ga + u^2} - u \right\} b$$

$Q$  = Wassermenge pro Rohr

die Leistung:  $L = \frac{\gamma}{g} Q \left\{ \sqrt{2ga + u^2} - u \right\} 2u$

Der Wirkungsgrad ist somit:

$$\eta = 2k_u \left\{ \sqrt{1 + k_u^2} - k_u \right\} \text{ mit } k_u = \frac{u}{\sqrt{2ga}}$$

Aus der Kurve Abb. 2 ersieht man, dass schon ziemlich hohe Umfangsgeschwindigkeiten ( $k_u > 1$ ) nötig sind, um eine befriedigende Ausnutzung zu bekommen. Euler vergisst aber nicht, dass mit wachsendem  $k_u$  die sonstigen Verluste, wie Zapfen- und Zahnräderreibung, Luftwiderstand usw. stark anwachsen und grosse  $k_u$  unwirtschaftlich machen.

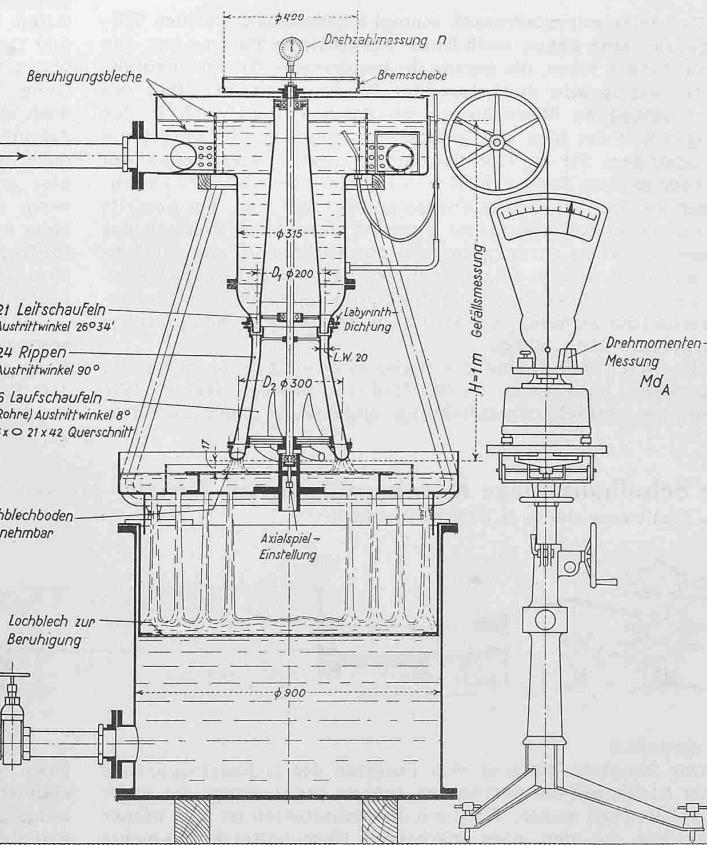


Abb. 6. Eulerturbine, Versuchsanordnung. — Masstab der Zeichnung 1 : 20

Nun denkt er sich aus, wie ein Turbinenapparat aussieht, der prinzipiell in der Lage wäre, bei *endlicher* Umfangsgeschwindigkeit die *ganze* Energie aus dem Wasser zu ziehen. Wie gesagt kommt der Verlust dadurch zustande, dass das Wasser noch eine endliche absolute Austrittsgeschwindigkeit hat. Der geniale Gedanke Eulers ist die Anwendung eines festen *Leitapparates*, der dem bewegten *Laufrad* das Wasser mit endlicher Tangential-Geschwindigkeit zuführt. Das Laufrad weicht nun der Tangential-Geschwindigkeit aus; im Relativsystem ist somit diese eliminiert. Da er im Laufrad normalen Eintritt voraussetzt, ist

$$c_{u_1} = u_1$$

Den Tangens des Leitradaustrittswinkels setzt er aus praktischen Gründen  $\frac{1}{2}$ . Damit wird:  $c_{m_1} = \frac{u_1}{2}$ .

Da Euler als Laufradaustrittsradius das anderthalbfache des Eintrittsradius annimmt, folgt eine bestimmte Aufteilung des Gefälles  $H$  auf Leitapparat und Laufrad und zwar wird (Abb. 3)  $k = 5/8 H$ ,  $a = 3/8 H$ . Der Spaltüberdruck wird Null (Atmosphärendruck). Die Enden der Laufradröhren sind horizontal zurückgebogen wie bei Segner (Abb. 3).

Die Anpassung an verschiedene Wassermengen erfolgt durch Veränderung der Breite des Eintrittsrings, wobei Euler sorgfältig darauf achtet, dass nicht zu grosse Unterschiede in den Radien auftreten dürfen.

Bei reibungsfreier Strömung erhält man für diese Anordnung (Abb. 4):

$$u_1 c_{u_1} = u_1^2 = g H \quad (\text{Euler'sche Turbinengleichung})$$

$$c_{u_1} = u_1 = \sqrt{g H}$$

$$c_{m_1} = 0,5 \sqrt{g H} = w_1$$

$$c_1 = \sqrt{1,25 g H} = \sqrt{5/8} \sqrt{2 g H}$$

Im Laufrad erfolgt eine relative Beschleunigung durch das Laufradgefälle und die Zentrifugalkraft:

$$\frac{w_2^2}{2 g} = \frac{w_1^2}{2 g} + \frac{3}{8} H + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2 g}$$

Setzen wir ein, so ergibt sich mit  $u_2 = 1,5 u_1$ :

$$\frac{w_2^2}{2 g} = 0,125 H + \frac{3}{8} H + 1,25 \frac{H}{2} = \frac{9}{8} H$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{9}{4} g H} = \frac{3}{2} u_1 = u_2$$

d. h., die absolute Austrittsgeschwindigkeit ist jetzt null, der theoretische Wirkungsgrad = 1.

Es schien mir interessant, einmal nachzusehen, welchen Wirkungsgrad eine genau nach Euler konstruierte Turbine hat. Die Firma Escher Wyss, die gerade ihr hundertstes Turbinenbaujahr feierte, war in sehr dankenswerter Weise bereit, den Bau des Maschinchens zu übernehmen; ein Zeichen, dass auch in der heutigen Zeit der Sinn für Geschichte nicht ausgestorben ist. Es ist konstruiert für ein Gefälle von 1 m, eine Wassermenge von 19,7 l/sec und die Drehzahl 300/min (Abb. 5). Der mittlere Durchmesser am Eintritt des Laufrades beträgt 200 mm; am Austritt 300 mm. Obwohl Euler darauf hinweist, dass durch Reibung der Wasserdurchfluss zurückgeht, und die Turbine für ein tatsächlich kleineres Gefälle zu rechnen ist, haben wir keinerlei Änderungen gegenüber den theoretischen Winkeln und Öffnungsquerschnitten gemacht, da bei Euler präzise Angaben darüber naturgemäß noch fehlen.

Bald nach Inbetriebnahme erwies es sich als nötig, den Spalt nach aussen zu dichten, da das Rad viel Wasser verlor. Wir haben eine einfache Spaltdichtung angebracht. Man darf dem

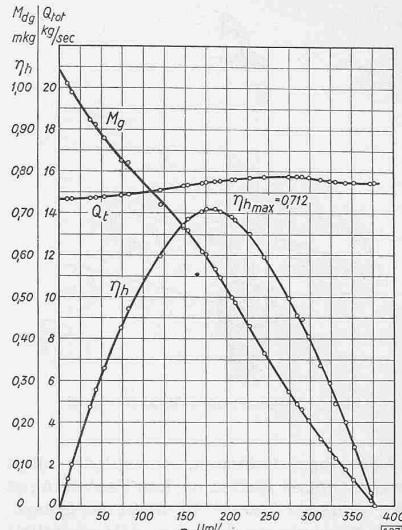


Abb. 7. Versuchsergebnisse

zeitgenössischen Maschinenbau, der immerhin schon grosse Wasserhaltungs-Maschinen und Pumpenwerke zustande brachte, zutrauen, dass er sich gegebenenfalls auf irgend eine ähnliche Weise geholfen hätte. Durch besondere Verteilrohre wird das Wasser gleichmäßig zugeführt. Das Gefälle wird bis Unterkante Laufrad gerechnet (Abb. 6); die Wassermenge wird durch eine VDI-Normblende, die wir direkt (durch Wasserwägung) geeicht haben, bestimmt. Als Bremse diente eine Schnur-Trommel; die sehr geringe Kugellagerreibung wurde abgezo-

gen. Die Ergebnisse sind in Abb. 7 dargestellt. Die Drehzahl für den besten Wirkungsgrad erweist sich erwartungsgemäss als bedeutend niedriger als nach Rechnung; hierin äussert sich eben die vollständige Vernachlässigung der Reibung. Der Momentenverlauf ist annähernd geradlinig, es ist also ein recht günstiges Anfahrmoment da, das für den damaligen Stand der Arbeitsmaschinen zweifellos sehr vorteilhaft gewesen wäre. Die Wassermenge ändert sich nur wenig, der Wirkungsgrad parabolisch. Der Höchstwert von 0,71 muss in Anbetracht der vollen Reibungsvernachlässigung beim Entwurf und der sehr geringen Leistung von nur 0,15 PS auch für heutige Anschauungen als recht befriedigend bezeichnet werden, haben doch moderne Francisräder, die Thoma für ähnliche kleine Leistungen und 1 m Gefälle gebaut und untersucht hat, nur Werte von 0,78 bis 0,82 ergeben.

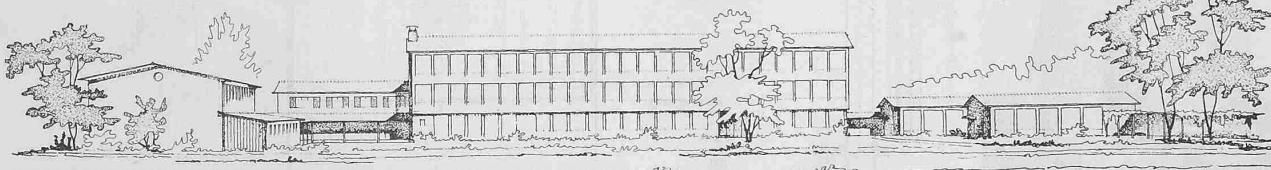
Mit der Auffindung der richtigen Winkel- und Querschnittszusammenhänge hat sich Euler nicht begnügt. Vielmehr hat er durch eine umfangreiche Analyse auch die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse an jeder Stelle der Kanäle untersucht, und zwar in voller Allgemeinheit, d. h. auch für nichtstationären Gang. Vielleicht würde es manchem unserer heutigen Ingenieure doch eine gewisse Mühe kosten, die Drücke etwa während des Anlaufs der Maschine anzugeben. Euler leistet auch dieses, und dabei gelingt ihm eine wichtige Entdeckung, indem er (1754!) klar erkennt, dass die Strömung stark gestört werden muss, wenn der absolute Druck auf Null sinkt. Das Kavitationsproblem ist somit aufgezeigt worden; aber es hat volle hundert-fünfzig Jahre gedauert, bis man durch allerhand schlechte Erfahrungen wieder darauf gekommen ist; heute bildet die Kavitationsforschung eine umfangreiche Wissenschaft.

Ich möchte nicht verfehlern, der Firma Escher Wyss, insbesondere Ing. Dr. C. Keller und Dir. Ing. Dr. H. Gygi für ihr Entgegenkommen, meinen Mitarbeitern Dipl. Ing. E. Mühlmann und Techniker J. Egli für ihre Mitwirkung beim Entwurf und der Versuchsdurchführung bestens zu danken.

## Die Schulhausanlage Kornhausbrücke in Zürich

Arch. Stadtbaumeister A. H. STEINER, Zürich

Hierzu Tafel 1 bis 4 mit Abb. 3 bis 18



### Zur Situation

Der Bauplatz befindet sich inmitten des Industriequartiers an der Stelle, auf der in früheren Jahren das Gaswerk der Stadt Zürich betrieben wurde. Während der Bauarbeiten ist man immer wieder auf die vier alten mächtigen Gasbehälter-Fundamente gestossen, die nie ausgehoben worden sind. Die Neubauarbeiten wurden dadurch wesentlich kompliziert. Der Bauplatz entbehrte

jeden landschaftlichen Reizes. Lediglich an der Nordwestecke standen einige Bäume, die in der heutigen Anlage in den Vorhof gegen die Limmatstrasse hin (Abb. 5) einbezogen worden sind. Auf der West- und Ostseite wird die Anlage von zwei Hauptverkehrssadern, der Limmatstrasse und dem Sihlquai, begrenzt. Diese Tatsache war für die gesamte Gestaltung sehr stark massgebend.