**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

**Band:** 121/122 (1943)

**Heft:** 5

**Artikel:** Eigenspannungen und vorgespannter Beton: allgemeine, vereinfachte Berechnungsweise

**Autor:** Lardy, Pierre

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-53036

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 08.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

INHALT: Eigenspannungen und vorgespannter Beton. — Heutige Aufgaben industrieller Wärmewirtschaft. — Der Neubau der Stadtgärtnerei Zürich. — Mitteilungen: Schweiz. Mustermesse in Basel. Anwendungen der ultravioletten Strahlung. Der japanische Kwangmon-Untersee-Tunnel. Studium und Fortbildung des Ingenieurs. Kurs 1918 bis 1922 an der mechanisch-technischen und elektro-technischen Abteilung der E. T. H. Die Transiranische Bahn. — Nekrologe: Hermann Jaeggi. — Wettbewerbe: Verbindung der Rhoneschiffahrt aus der Stauhaltung Verbois mit dem Genfersee. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 121 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 5
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

# Eigenspannungen und vorgespannter Beton

## Allgemeine, vereinfachte Berechnungsweise

Von Ing. Dr. PIERRE LARDY, Zürich

Das aktuelle Problem der Berechnung der Biegungsspannungen in einem Eisenbetonbalken mit vorgespannten Armierungen kann folgendermassen formuliert werden: Gegeben sei ein symmetrischer Eisenbetonquerschnitt mit den Armierungen $F_{e1}$, $F_{e2}$, .... $F_{em}$, deren zugehörige Vorspannungen mit $\overset{v}{\sigma}_{e1}$, $\overset{v}{\sigma}_{e2}$, .... $\overset{v}{\sigma}_{em}$ bezeichnet seien. Es sollen die Biegungsspannungen im Beton sowie die endgültigen Eisenzugspannungen $\sigma_{e1}$, $\sigma_{e2}$, ...., $\sigma_{em}$ unter Berücksichtigung des Schwindens und der Plastizität bestimmt werden.

In der bisherigen Berechnungsweise[1]) zerfällt die Berechnung in mehrere Stufen. Für jede gegebene vorgespannte Eisenlage $F_{e1}$, $F_{e2}$, .... $F_{em}$, sowie für das Schwinden werden die Spannungszustände getrennt berechnet und am Schluss superponiert. Infolge Schwinden und Plastizität des Betons sowie der elastischen Deformation des Querschnittes geht die ursprüngliche Vorspannung, z. B. $\overset{v}{\sigma}_{e1}$, auf den Wert $\sigma_{e1} < \overset{v}{\sigma}_{e1}$ zurück; $\sigma_{e1}$ wird aus der Elastizitätsbedingung:

$$\frac{\overset{v}{\sigma}_{e1} - \sigma_{e1}}{E_e} = \varepsilon_s + k\,\frac{\sigma_b}{E_b}$$

(worin $\varepsilon_s$ = Schwindmass für Beton, $k$ = Plastizitätsfaktor) für die Faser $F_{e1}$ gefunden, sobald $\sigma_b$ dort bekannt ist. Aus den bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma\, dF = 0 \qquad \text{und} \qquad \int \sigma z\, dF = 0$$

sowie aus der Hypothese von Navier-Bernoulli folgt die Spannungsverteilung im Beton und in den Eisen. Diese Berechnungsweise ist mühsam und unübersichtlich; denn für jede Berechnungsstufe sind der «ideelle Querschnitt», der «ideelle Schwerpunkt» und das «ideelle Trägheitsmoment» verschieden.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich diese Berechnungsweise wesentlich vereinfachen lässt, indem die ganze Berechnung in einer *einzigen* Berechnungsstufe durchgeführt werden kann, die einfach und übersichtlich ist und sich im allgemeinsten Fall der Eigenspannungen anwenden lässt. Wesentlich und neu ist dabei für die Anwendung auf den vorgespannten Beton, dass das Schwinden und die Plastizität in dieser vereinfachten Berechnungsweise voll berücksichtigt werden.

Einige einfache Ueberlegungen seien vorausgeschickt; dabei gelten Druckspannungen, sowie Faserverkürzungen als positiv, Zugspannungen und Faserverlängerungen als negativ. Wir betrachten eine am linken Ende eingespannte Faser von der Länge 1, vom Querschnitt $F$, dem Elastizitätsmodul $E$ und dem Schwindmass $\varepsilon > 0$. Das Schwindmass $\varepsilon$ bedeutet, dass die Faser die Tendenz hat, sich zu verkürzen um das Mass $1\,\varepsilon$. Beim «freien», d. h. ungestörten Schwinden verkürzt sich die Faser um $\delta = 1\,\varepsilon$, bleibt dabei aber spannungslos.

Nun kann man sich die tatsächliche Verkürzung $\delta$ dadurch entstanden denken, dass man eine *fiktive*, nicht existierende Normalkraft $N'$ als äussere Druckkraft auf die Faser wirken lässt und die Verkürzung $\delta$ als elastische Deformation infolge dieser Druckkraft auffasst. Die entsprechende fiktive Normalspannung $\sigma'$ ist gleich $\frac{N'}{F}$; aus dem Hooke'schen Gesetz folgt $\frac{\sigma'}{E} = \varepsilon$ oder $\sigma' = \varepsilon E$ und daraus die fiktive Normalkraft $N'$ zu

$$\underline{N' = \varepsilon E F}$$

Dabei sind die tatsächlichen Spannungen $\sigma$ gleich Null; $\sigma'$ existiert ebensowenig wie $N'$. Es ist $\frac{\sigma'}{E}$ gleich der tatsächlichen Dehnung $\varepsilon$.

[1]) Siehe *Hoyer*: «Der Stahlsaitenbeton» und neuerdings *Moersch*: «Der Spannbetonträger», 1943. Hoyer gibt die Berechnung mit Superposition der Spannungszustände an, während Moersch, wie der Verfasser dieser Arbeit, mit einer fiktiven Resultierenden rechnet. Sowohl bei Moersch wie bei Hoyer sind das Schwinden und die Plastizität in den angegebenen Berechnungsweisen nicht einbezogen; Moersch berücksichtigt das Schwinden durch einen konstanten Abzug an den Vorspannungen. Im Gegensatz dazu behandelt Prof. Dr. *M. Ritter* in seiner Vorlesung «Ausgewählte Kapitel der Baustatik und des Massivbaues» das Problem der Vorspannung unter voller Berücksichtigung des Schwindens und der Plastizität.

Für den Fall, dass das Schwinden aus irgendeinem Grunde z. T. oder ganz verhindert wird, entstehen in der Faser Spannungen $\sigma$, die von Null verschieden sind. Die Verkürzung ist dann kleiner, weil sich das Schwinden nicht voll auswirken kann; es treten deshalb Zugspannungen $\sigma < 0$ auf, deren Anteil an der Deformation der Faser gleich $\frac{\sigma}{E}$ ist (im Sinne einer Verkleinerung der Verkürzung). Die tatsächlich auftretende Verkürzung $\delta$ wird dann:

$$\delta = \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \quad (\delta < \varepsilon\,,\ \text{da}\ \sigma < 0)$$

Analog kann wieder eine fiktive Normalkraft $N'$ als äussere Kraft eingeführt werden, die $\delta$ erzeugt. Es folgt:

$$\delta = \frac{\sigma'}{E} = \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \qquad \text{(I)}$$

(Die Berechnung von $N'$ würde hier die nähere Kenntnis der «Verhinderung» der Verkürzung erfordern.) Die beiden Grenzfälle $\sigma = 0$ sowie $\frac{\sigma'}{E} = \delta = 0$ ($N' = 0$ und $\sigma = -\varepsilon E$) brauchen keine weitere Erläuterung.

Einen Schritt weiter führt die Betrachtung des Zusammenwirkens von zwei Fasern der Länge 1 mit den zugehörigen Werten $\varepsilon_1$, $E_1$, $F_1$ bzw. $\varepsilon_2$, $E_2$, $F_2$. $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ seien $> 0$ (Verkürzungen). Voraussetzung ist, dass beide Fasern aneinander «haften»; die Bewegung der Endquerschnitte am freien Ende ist dann für beide Fasern dieselbe, nämlich eine Verkürzung $\delta$. (Es wird hier von der Verdrehung abgesehen.) Beide Fasern hindern sich gegenseitig am «freien» Schwinden. Mit Benützung des Ansatzes (I) wird:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} + \varepsilon_1 = \delta = \frac{\sigma'}{E'} \quad \text{(Faser 1)}$$

$$\frac{\sigma_2}{E_2} + \varepsilon_2 = \delta = \frac{\sigma'}{E'} \quad \text{(Faser 2)}$$

$E'$ ist symbolisch und fällt später aus der Rechnung heraus. Um $\sigma_1$ und $\sigma_2$ zu bestimmen, benützen wir die Gleichgewichtsbedingung $\int \sigma\, dF = 0$, aus der $\sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2 = 0$ folgt; dies in die zwei obigen Gleichungen für $\sigma_1$ und $\sigma_2$ eingesetzt führt zu

$$\delta = \frac{\sigma'}{E'} = \frac{\varepsilon_1 E_1 F_1 + \varepsilon_2 E_2 F_2}{E_1 F_1 + E_2 F_2}$$

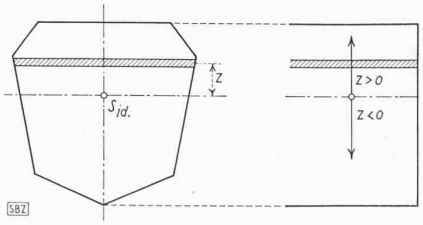
Wir definieren analog wie oben als fiktive äussere Kräfte folgende Ausdrücke:

$$N_1 = \varepsilon_1 E_1 F_1$$
$$N_2 = \varepsilon_2 E_2 F_2$$

und $\varepsilon_1 E_1 F_1 + \varepsilon_2 E_2 F_2 = N_1 + N_2 = N$ als Resultierende der Kräfte $N_1$ und $N_2$. Der Nenner $E_1 F_1 + E_2 F_2 = \sum_i E_i F_i$ werde mit $(EF)$ abgekürzt.

Daraus erhellt, dass die Berechnung von $\sigma_1$ und $\sigma_2$ auf die Bestimmung von $\frac{\sigma'}{E'}$ allein zurückgeführt werden kann, d. h. auf die Bestimmung einer *einzigen* fiktiven Kraft $N$, die, wie auch der Nenner $(EF)$, sofort hingeschrieben werden kann.

Diese Betrachtungsweise lässt sich auf den allgemeinsten Fall der Berechnung der Eigenspannungen mit Verdrehung des Querschnittes anwenden, was im Folgenden bewiesen wird. Es ist hierbei vorausgesetzt, dass keine äusseren Kräfte wirken.




Wir betrachten einen symmetrischen Querschnitt, bei dem das Schwindmass $\varepsilon$ und der Elastizitätsmodul $E$ von Faser zu Faser variieren. Die durch das Schwinden jeder Faser «induzierten» Normalspannungen sollen berechnet werden. Als Bezugsaxe wird die Horizontale durch den Schwerpunkt des ideellen Querschnittes (ideelle Schweraxe) gewählt, wofür die Gleichung

$$\int E z\, dF = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gilt. Wir haben vorerst die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma\, dF = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und

$$\int \sigma z\, dF = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

zur Verfügung, wo das Integral über den ganzen Querschnitt zu erstrecken ist. Die Lösung des Problems folgt in Analogie mit Obigem aus dem Ansatz

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \delta = \frac{\sigma'}{E'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

in Kombination mit der Navier-Bernoulli'schen Hypothese des Ebenbleibens der Querschnitte; für unsern Fall heisst das aber, dass $\delta$ aus Gl. (4) eine lineare Funktion des Abstandes $z$ von der ideellen Schweraxe ist:

$$\delta = A + Bz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wo $A$ und $B$ Konstante sind. $\delta\, ds$ ist die tatsächliche Längenänderung der Faser von der Länge $ds$ im Abstande $z$. Daraus folgt:

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = A + Bz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oder

$$\sigma = E(A + Bz) - \varepsilon E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

(7) in (2) und (3) eingesetzt ergibt:

$$\int \sigma\, dF = A \int E\, dF + B \int E z\, dF - \int \varepsilon E\, dF = 0$$

$$\int \sigma z\, dF = A \int E z\, dF + B \int E z^2\, dF - \int \varepsilon E z\, dF = 0$$

Wegen (1) ist $\int E z\, dF = 0$ und die Konstanten $A$ und $B$ sind gleich:

$$A = \frac{\int \varepsilon E\, dF}{\int E\, dF} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$B = \frac{\int \varepsilon E z\, dF}{\int E z^2\, dF} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Analog zu früher kann definiert werden:

| | |
|---|---|
| $\varepsilon E\, dF = dN$ | Differential einer fiktiven äusseren Normalkraft |
| $\int \varepsilon E\, dF = N$ | Resultierende aller fiktiven Normalkräfte |
| $(\varepsilon E\, dF)\, z = dN z = dM$ | Moment der fiktiven Kraft $dN$ bezüglich der ideellen Schweraxe |
| $\int \varepsilon E z\, dF = M$ | Moment der Resultierenden $N$ bezüglich der ideellen Schweraxe |

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\int E\, dF = \sum_i E_i F_i = (EF)$$

$$\int E z^2\, dF = \sum_i E_i J_i = (EJ)$$

Damit wird:

$$\delta = \frac{N}{(EF)} + z \frac{M}{(EJ)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und schliesslich

$$\boxed{\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} + z \frac{M}{(EJ)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Aus dieser Gleichung, in der die rechte Seite nur mit $z$ variiert, lässt sich die Spannung $\sigma$ für eine beliebige Faser leicht berechnen.

Damit ist die Berechnung der Eigenspannungen im allgemeinsten Falle, als ein Problem innerer Kräfte, zurückgeführt auf ein solches äusserer, fiktiver Kräfte, nämlich auf dasjenige der Biegung mit Axialkraft. Sobald die Kraft $N$ und ihre Lage bestimmt sind, ist die Lösung durch Gl. (11) gegeben. Sämtliche Sonderfälle betr. Temperaturänderungen, Schwinden, usw. und, wie wir sehen werden, Vorspannungen, können somit einheitlich behandelt werden, und zwar in einem einzigen Berechnungsgang, der folgendermassen zusammengefasst werden kann:

Aus den gegebenen Grössen $\varepsilon$ und $E$, die im allgemeinsten Falle von Faser zu Faser variieren, berechnet man die fiktive Kraft

$$N = \int \varepsilon E\, dF = \sum_i \varepsilon_i E_i F_i$$

sowie das Moment $M = \int \varepsilon E z\, dF = \sum \varepsilon_i E_i z_i F_i$

ferner die Nennergrössen

$$(EF) = \int E\, dF = \sum_i E_i F_i$$

$$(EJ) = \int E z^2\, dF = \sum_i E_i J_i$$

Alsdann folgt für eine Spannung $\sigma_k$ für eine Faser $z_k$, für die die Werte $\varepsilon_k$ und $E_k$ gelten, nach Gl. (11):

$$\frac{\sigma_k}{E_k} + \varepsilon_k = \frac{N}{(EF)} + z_k \frac{M}{(EJ)}$$

Diese Gleichung nach $\sigma_k$ aufgelöst ergibt die gesuchte Spannung. Die Berechnung ist einfach und übersichtlich und macht die Aufstellung von eventuell komplizierten Elastizitätsbedingungen überflüssig.

Falls in Gl. (11) alle $\varepsilon = 0$ gesetzt werden und $N$ und $M$ äussere Kräfte sind, so stellt diese für einen Eisenbetonquerschnitt nichts anderes als die Navier'sche Spannungsgleichung nach Stadium 1 dar.

Es sei noch bemerkt, dass $\delta$ die tatsächliche Dehnung der Faser $z$ ist, wobei $\frac{N}{(EF)} = \varepsilon_t$ die «spezifische» Dehnung und $\frac{M}{(EJ)} = \frac{d\varphi}{ds}$ die Winkeldrehung des Querschnittes ist. Dies erlaubt, das allgemeine Problem der Eigenspannungen auch auf statisch unbestimmte Systeme zu übertragen, wo dann neben den oben behandelten Spannungen «erster Art» solche «zweiter Art» infolge der Auflagerbedingungen auftreten. Dies soll in einem späteren Aufsatz behandelt werden.

*

**Anwendungen auf den Eisenbeton**

In der Folge werden die Spannungen nach Stadium 1 (rissefrei) berechnet. Die Plastizität des Betons wird dadurch berücksichtigt, dass für $\frac{E_e}{E_b}$ statt $n$ der Wert $kn$ gesetzt wird.

*1. Vorgespannter Beton* (ohne Schwinden).

Gegeben sei ein symmetrischer Eisenbetonquerschnitt mit den Armierungen $F_{e_1}, F_{e_2}, \ldots . F_{em}$ und den zugehörigen Vorspannungen $\sigma v_{e_1}, \sigma v_{e_2}, \ldots . \sigma v_{em}$. Gesucht sind die Spannungen im Beton und in den Eisen. Der ideelle Schwerpunkt $S_{id.}$ ist durch $\int E z\, dF = 0$ definiert. Nach dem «Loslassen» der Vorspannung in den Eisen haben diese die Tendenz, sich zu verkürzen, d. h. zu «schwinden». Das Schwindmass wird definiert als:

$$\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma v_{ei}}{E_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

(—, da $\sigma v_{ei}$ als Zugspannung $< 0$ ist und $\varepsilon_{ei}$ als Verkürzung $> 0$). Vom Schwinden des Betons soll vorerst abgesehen werden, d. h. $\varepsilon_b = 0$. Die Berechnung der Spannungen erfolgt nach Gl. (11):

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} + z \frac{M}{(EJ)}$$

worin für den Beton $\varepsilon_b = 0$ zu setzen ist, und für die Eisen $\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma v_{ei}}{E_e}$. Ferner ist für die Eisen $E_i = E_e$, $F_i = F_{ei}$. Es folgt: $N = -\sum_i \sigma v_{ei} F_{ei}$, $M = -\sum_i \sigma v_{ei} F_{ei} z_{ei}$, $(EF) = E_b F_b + E_e \sum_i F_{ei}$, $(EJ) = E_b J_b + E_e \sum_i J_{ei}$ und für die Betonspannung in einer Faser $z_b$:

$$\frac{\sigma_b}{E_b} = -\frac{\sum \sigma v_{ei} F_{ei}}{(EF)} - z_b \frac{\sum \sigma v_{ei} F_{ei} z_{ei}}{(EJ)}, \quad \sigma_b = \ldots .$$

Für die Eisenspannung in einer Eisenlage $z_{ei}$ ist:

$$\frac{\sigma_{ei}}{E_e} + \varepsilon_{ei} = \frac{\sigma_{ei} - \sigma v_{ei}}{E_e} = -\frac{\sum \sigma v_{ei} F_{ei}}{(EF)} - z_{ei} \frac{\sum \sigma v_{ei} F_{ei} z_{ei}}{(EJ)}$$

$$\sigma_{ei} = \ldots .$$

Damit ist die Aufgabe für jeden Fall der Vorspannungen gelöst.

*2. Schwinden im Beton*

Es liege der selbe Querschnitt zu Grunde, jedoch seien sämtliche Vorspannungen gleich Null (Schwinden allein). Es ist $\varepsilon_{ei} = 0$, $\varepsilon_b = \varepsilon_s$ und $N = \varepsilon_s E_b F_b$, $M = \varepsilon_s E_b F_b s$, wo $s$ den Abstand der Schwerpunkte des ideellen und des Betonquerschnittes bedeutet ($s$ aus der Momentengleichung für $S_{id.}$). $(EF)$ und $(EJ)$ wie oben. In Gl. (11) eingesetzt folgt:

$$\frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_s = \frac{\varepsilon_s E_b F_b}{(EF)} + z_b \frac{\varepsilon_s E_b F_b s}{(EJ)}$$

$$\frac{\sigma_{ei}}{E_e} = \frac{\varepsilon_s E_b F_b}{(EF)} + z_{ei} \frac{\varepsilon_s E_b F_b s}{(EJ)}$$

Werden diese Gleichungen nach $\sigma_b$ und $\sigma_{ei}$ aufgelöst, so folgen die bekannten Formeln für das Schwinden nach der Theorie der Eigenspannungen [2]).

*3. Vorspannung und Schwinden*

Fall *1.* und *2.* können gleichzeitig behandelt werden, indem $\varepsilon_b = \varepsilon_s$ und $\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma v_{ei}}{E_e}$ gesetzt wird. Es ändern sich nur $N$ und $M$:

$$N = -\sum_i \sigma v_{ei} F_{ei} + \varepsilon_s E_b F_b, \quad M = -\sum_i \sigma v_{ei} F_{ei} z_{ei} + \varepsilon_s E_b F_b s$$

$(EF)$ und $(EJ)$ wie oben. Dies führt zu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_s &= \frac{N}{(EF)} + z_b \frac{M}{(EJ)} \\ \frac{\sigma_{ei} - \sigma v_{ei}}{E_e} &= \frac{N}{(EF)} + z_{ei} \frac{M}{(EJ)} \end{aligned}\right\} \text{für Vorspannung und Schwinden gleichzeitig.}$$

[2]) Siehe Prof. Dr. *M. Ritter*, «Wärme- und Schwindspannungen in eingespannten Gewölben», SBZ, Bd. 95, S. 139* und 156*, März 1930).

*4. Temperaturspannungen*

Es liege wieder obiger Querschnitt zu Grunde. Man setzt:

$$\varepsilon = \omega\, t^0$$

wo $t^0$ = Temperatur (i. Allgem. variabel mit $z$).
$\omega$ = Wärmeleitzahl (i. A. variabel mit $z$, für Eisen und Beton jedoch konstant und für beide Materialien dieselbe).

a) Lineare Temperaturänderung

Darin ist als Spezialfall die gleichmässige Temperaturänderung mit $t^0$ = konstant enthalten. Für $t^0$ wird gesetzt $t^0 = a + bz$, wo $a$ und $b$ durch $t^0_u$ und $t^0_0$ an den Rändern bestimmt werden können. Es folgt:

$$\varepsilon = \omega\,(a + b\,z)$$

und

$$N = \omega\,[a\,(EF) + b\,\Sigma EF z] = \omega\, a\,(EF)$$
$$M = \omega\,[a\,\Sigma EF z + b\,(EJ)] = \omega\, b\,(EJ)$$

Wegen (1) ist $\Sigma EF z = 0$ und Gl. (11) ergibt:

$$\frac{\sigma}{E} + \omega\,(a + b\,z) = \omega\,(a + b\,z)$$

woraus wie bekannt $\sigma = 0$.

b) Ungleichmässige Temperaturänderung nach einem Parabelgesetz

Vorausgesetzt sei ein unarmierter Beton-Rechteckquerschnitt von der Grösse $b\,d$ und eine Temperaturänderung nach dem Gesetz

$$t^0 = t^0_m - 4\,(t^0_m - t^0_1)\,\frac{z^2}{d^2}$$

Dann ist

$$\varepsilon = -\,\omega\, t = -\,\omega\left[t_m - 4\,(t_m - t_1)\,\frac{z^2}{d^2}\right] \quad (- = \text{Verlängerung})$$

Hierin bedeuten $t^0_m$ die Temperatur in der Mitte und $t^0_1$ diejenige am Rande des Querschnittes. Aus Symmetriegründen ist $M = 0$. $N$ ist eine fiktive Zugkraft, die nach dem obigen Parabelgesetz leicht berechnet werden kann zu:

$$N = -\,\frac{\omega\, E_b\, F_b}{3}\,(t_1 + 2\,t_m)$$

Nach Gl. (11) folgt:

$$\frac{\sigma}{E_b} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} = -\,\frac{\omega}{3}\,(t_1 + 2\,t_m)$$

oder

$$\sigma = \omega\, E_b\,(t_m - t_1)\left(\frac{1}{3} - 4\,\frac{z^2}{d^2}\right)$$

Für $z = 0$ und $z = \pm\,\frac{d}{2}$ folgt bzw. $\sigma = \sigma_m = \frac{\omega\, E_b}{3}\,(t_m - t_1)$ und $\sigma = \sigma_R = -\,2\,\sigma_m$

## Heutige Aufgaben industrieller Wärmewirtschaft

Die immer dringendere Frage, wie und in welchem Umfang die knapp werdende Kohle ersetzt werden kann, veranlasst uns, auf zwei Vortragsveranstaltungen des letzten Jahres zurückzukommen.

I.

An der Generalversammlung des Schweiz. Energiekonsumenten-Verbandes vom 24. März in Zürich [1]) wurde durch Kurzvorträge von fünf Referenten das Thema *Anpassung der Wärmeversorgung der schweiz. Industrie an die gegenwärtige und kommende Kohlenwirtschaft* behandelt.

Nach dem einleitenden Referat von Prof. Dr. *B. Bauer*, E. T. H., brachten die weiteren Referenten als Beiträge zum gemeinsamen Thema gut belegte Ausführungen über Teilfragen aus dem Arbeitsgebiet ihrer Firmen. Es sprachen Dir. *J. Gastpar* (Gebr. Sulzer) über «Wärmebeschaffung in Dampf- und Warmwasserkesseln», Obering. *R. Peter* (Escher-Wyss) über «Richtlinien für vorteilhafte Wärmewirtschaft industrieller Betriebe und die zur Verfügung stehenden technischen Mittel», Obering. *P. Faber* (BBC) über «Sparsame Energiewirtschaft» und Ing. *G. Keller* (BBC) über «Ersatz von festen, flüssigen und gasförmigen Brennstoffen durch Elektrowärme». Alle Referate sind als Sonderpublikation des E. K. V. bei dessen Sekretariat, Usteristr. 14 in Zürich zu beziehen.

Nach Prof. B. Bauer, der die prinzipielle Seite des Themas und die Möglichkeit und Notwendigkeit der Anpassung der Wärmeversorgung der Industrie an die gegenwärtige und kommende Kohlenwirtschaft darlegte, hat die durch die Mangelwirtschaft und die Autarkiebestrebungen in den kohlenproduzierenden Ländern stark geförderte «Kohlenveredlung», für die die Kohle nicht mehr «Brennstoff», sondern «Werkstoff» ist, auch für spätere Zeiten unbedingt eine Verknappung und Verteuerung der bisher von der Industrie bevorzugten fetten Kohlensorten zur Folge. Anderseits muss mit einer stärkeren Belastung der Kohle durch fiskalische und soziale Abgaben gerechnet werden. Ein Angleichen an diese Verhältnisse müsse daher gesucht werden durch Brennstoffeinsparung einerseits und durch Ersatz von Brennstoffen durch landeseigene Rohenergie, d. h. durch Elektrizität anderseits.

[1]) In dem den Vorträgen vorangehenden geschäftlichen Teil der Sitzung stimmte die Versammlung auf Antrag des Ausschusses einstimmig einer Resolution zu, in der dringend der beschleunigte Ausbau von Grosspeicherwerken gefordert wurde. Die Resolution stellte ferner fest, dass durch rechtzeitige Erteilung von Konzessionen für neue Kraftwerke auf Grund von Art. 21 und 24 bis der Bundesverfassung eine vermehrte Energielieferung heute sichergestellt wäre («Der Schweiz. Energie-Konsument» 1942, S. 70 ff.).

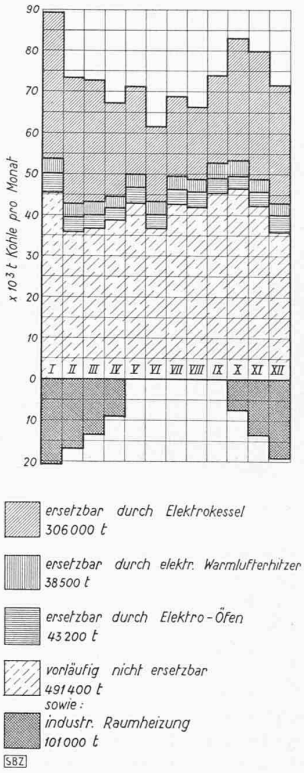



Abb. 1. Ersatzmöglichkeiten des industriellen Kohlenverbrauchs für das Jahr 1940, Gesamtverbrauch 980 100 t

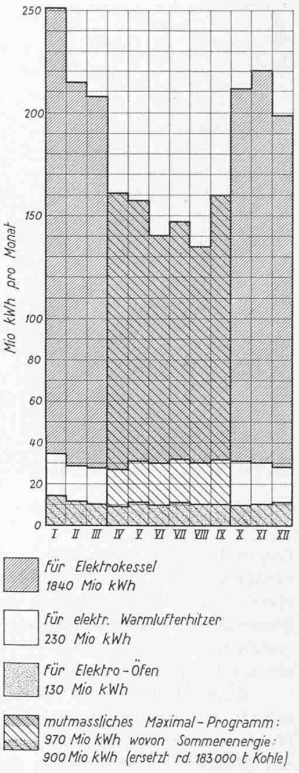



Abb. 2. Strombedarf für den in den industriellen Anlagen möglichen Kohlenersatz im Jahr 1940, Gesamtbedarf 2200 Mio kWh

Ueber *Ersatz von Brennstoffen durch Elektrowärme* machte Ing. G. Keller interessante Angaben. Prinzipiell sei dies bei den meisten industriellen Wärmeanlagen möglich; besonders günstig liegen die Verhältnisse bei Glüh-, Brenn- und Schmelzöfen, wo Temperaturen bis 1000° C leicht erreicht werden können. Für höhere Temperaturen bestehen noch gewisse Schwierigkeiten. Für Grossbetriebe, z. B. für Anwendung von Elektrowärme in der Zementindustrie, liegen erst Versuche vor; dagegen sind auch Trockenöfen und Metallbäder geeignete Objekte. Für Elektrokessel für Dampf- oder Warmwasserbereitung liegen die Verhältnisse wieder wesentlich anders, da hier der Wärmeinhalt einer kWh direkt mit dem nutzbaren Heizwert eines kg Brennstoff in Beziehung zu setzen ist. Keller gab eine interessante Zusammenstellung über die Aequivalenzzahl einer kWh zu einem kg Brennstoff bei verschiedenen Verwendungszwecken. Diese Verhältniszahl (kWh elektr. Energie : kg Kohle für gleiche Produktion) beträgt z. B. für Einsatzhärteöfen 2,7, für Glühöfen 2,0, für Brennen von Porzellan 1,28, Emaillieren von Blechwaren 1,0, Feuerverzinkung 1,0, Dampferzeugung 5 bis 6. Diese Zahlen sind für die Tarifbildung und Anwendungsmöglichkeit massgebend.

Nach Studien von Prof. Bauer wären von dem im Jahre 1940 ausgewiesenen Kohlenbedarf von rd. 1 Mio t etwa 60 % vorläufig aus technischen oder wirtschaftlichen Gründen nicht durch Elektrizität ersetzbar, für die übrigen 40 % liesse sich die Umstellung durchführen (Abb. 1). In den Angaben, die diesem Diagramm zu Grunde liegen, sind die 1940 bereits elektrifizierten Betriebe nicht inbegriffen. Die für den angegebenen Brennstoffersatz erforderliche Energiemenge übersteigt aber bei weitem die wirtschaftliche Leistungsfähigkeit der bestehenden und neu geplanten Kraftwerke. Ein mutmassliches Maximalprogramm (!) gibt das zweite Diagramm (Abb. 2). Darnach «könnten eventuell» 183 000 t Industriekohlen im Jahre durch Hydroelektrizität ersetzt werden. Für die Durchführung dieses Programms wären aber vielfach