

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	121/122 (1943)
Heft:	5
Artikel:	Eigenspannungen und vorgespannter Beton: allgemeine, vereinfachte Berechnungsweise
Autor:	Lardy, Pierre
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-53036

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

zur Verfügung, wo das Integral über den ganzen Querschnitt zu erstrecken ist. Die Lösung des Problems folgt in Analogie mit Obigem aus dem Ansatz

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \delta = \frac{\sigma'}{E'} \quad \dots \quad (4)$$

in Kombination mit der Navier-Bernoulli'schen Hypothese des Ebenbleibens der Querschnitte; für unsern Fall heisst das aber, dass δ aus Gl. (4) eine lineare Funktion des Abstandes z von der ideellen Schweraxe ist:

$$\delta = A + Bz \quad \dots \quad (5)$$

wo A und B Konstante sind. δds ist die tatsächliche Längenänderung der Faser von der Länge ds im Abstande z . Daraus folgt:

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = A + Bz \quad \dots \quad (6)$$

oder

$$\sigma = E(A + Bz) - \varepsilon E \quad \dots \quad (7)$$

(7) in (2) und (3) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \int \sigma dF &= A \int E dF + B \int Ez dF - \int \varepsilon E dF = 0 \\ \int \sigma z dF &= A \int Ez dF + B \int Ez^2 dF - \int \varepsilon Ez dF = 0 \end{aligned}$$

Wegen (1) ist $\int Ez dF = 0$ und die Konstanten A und B sind gleich:

$$A = \frac{\int \varepsilon E dF}{\int E dF} \quad \dots \quad (8)$$

$$B = \frac{\int \varepsilon Ez dF}{\int Ez^2 dF} \quad \dots \quad (9)$$

Analog zu früher kann definiert werden:

$$\varepsilon E dF = dN \quad \text{Differential einer fiktiven äusseren Normalkraft}$$

$$\int \varepsilon E dF = N \quad \text{Resultierende aller fiktiven Normalkräfte}$$

$$(\varepsilon E dF)z = dNz = dM \quad \text{Moment der fiktiven Kraft } dN \text{ bezüglich der ideellen Schweraxe}$$

$$\int \varepsilon Ez dF = M \quad \text{Moment der Resultierenden } N \text{ bezüglich der ideellen Schweraxe}$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\int E dF = \sum_i E_i F_i = (EF)$$

$$\int Ez^2 dF = \sum_i E_i J_i = (EJ)$$

Damit wird:

$$\delta = \frac{N}{(EF)} + z \frac{M}{(EJ)} \quad \dots \quad (10)$$

und schliesslich

$$\boxed{\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} + z \frac{M}{(EJ)}} \quad \dots \quad (11)$$

Aus dieser Gleichung, in der die rechte Seite nur mit z variiert, lässt sich die Spannung σ für eine beliebige Faser leicht berechnen.

Damit ist die Berechnung der Eigenspannungen im allgemeinsten Falle, als ein Problem innerer Kräfte, zurückgeführt auf ein solches äusserer, fiktiver Kräfte, nämlich auf dasjenige der Biegung mit Axialkraft. Sobald die Kraft N und ihre Lage bestimmt sind, ist die Lösung durch Gl. (11) gegeben. Sämtliche Sonderfälle betr. Temperaturänderungen, Schwinden, usw. und, wie wir sehen werden, Vorspannungen, können somit einheitlich behandelt werden, und zwar in einem einzigen Berechnungsgang, der folgendermassen zusammengefasst werden kann:

Aus den gegebenen Grössen ε und E , die im allgemeinsten Falle von Faser zu Faser variieren, berechnet man die fiktive Kraft

$$N = \int \varepsilon E dF = \sum_i \varepsilon_i E_i F_i$$

sowie das Moment $M = \int \varepsilon Ez dF = \sum_i \varepsilon_i E_i z_i F_i$

ferner die Nennergrössen

$$(EF) = \int E dF = \sum_i E_i F_i$$

$$(EJ) = \int Ez^2 dF = \sum_i E_i J_i$$

Alsdann folgt für eine Spannung σ_k für eine Faser z_k , für die die Werte ε_k und E_k gelten, nach Gl. (11):

$$\frac{\sigma_k}{E_k} + \varepsilon_k = \frac{N}{(EF)} + z_k \frac{M}{(EJ)}$$

Diese Gleichung nach σ_k aufgelöst ergibt die gesuchte Spannung. Die Berechnung ist einfach und übersichtlich und macht die Aufstellung von eventuell komplizierten Elastizitätsbedingungen überflüssig.

Falls in Gl. (11) alle $\varepsilon = 0$ gesetzt werden und N und M äussere Kräfte sind, so stellt diese für einen Eisenbetonquerschnitt nichts anderes als die Navier'sche Spannungsgleichung nach Stadium 1 dar.

Es sei noch bemerkt, dass δ die tatsächliche Dehnung der Faser z ist, wobei $\frac{N}{(EF)} = \varepsilon_t$ die «spezifische» Dehnung und $\frac{M}{(EJ)} = \frac{d\varphi}{ds}$ die Winkeldrehung des Querschnittes ist. Dies erlaubt, das allgemeine Problem der Eigenspannungen auch auf statisch unbestimmte Systeme zu übertragen, wo dann neben den oben behandelten Spannungen «erster Art» solche «zweiter Art» infolge der Auflagerbedingungen auftreten. Dies soll in einem späteren Aufsatz behandelt werden.

*

Anwendungen auf den Eisenbeton

In der Folge werden die Spannungen nach Stadium 1 (rissefrei) berechnet. Die Plastizität des Betons wird dadurch berücksichtigt, dass für $\frac{E_e}{E_b}$ statt n der Wert kn gesetzt wird.

1. Vorgespannter Beton (ohne Schwinden).

Gegeben sei ein symmetrischer Eisenbetonquerschnitt mit den Armierungen $F_{e1}, F_{e2}, \dots, F_{em}$ und den zugehörigen Vorspannungen $\sigma_{e1}, \sigma_{e2}, \dots, \sigma_{em}$. Gesucht sind die Spannungen im Beton und in den Eisen. Der ideelle Schwerpunkt S_{id} ist durch $\int Ez dF = 0$ definiert. Nach dem «Loslassen» der Vorspannung in den Eisen haben diese die Tendenz, sich zu verkürzen, d. h. zu «schwinden». Das Schwindmass wird definiert als:

$$\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma_{ei}}{E_e} \quad \dots \quad (12)$$

(—, da σ_{ei} als Zugspannung < 0 ist und ε_{ei} als Verkürzung > 0). Vom Schwinden des Betons soll vorerst abgesehen werden, d. h. $\varepsilon_b = 0$. Die Berechnung der Spannungen erfolgt nach Gl. (11):

$$\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} + z \frac{M}{(EJ)}$$

worin für den Beton $\varepsilon_b = 0$ zu setzen ist, und für die Eisen $\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma_{ei}}{E_e}$. Ferner ist für die Eisen $E_i = E_e, F_i = F_{ei}$. Es folgt: $N = -\sum_i \sigma_{ei} F_{ei}$, $M = -\sum_i \sigma_{ei} F_{ei} z_{ei}$, $(EF) = E_b F_b + E_e \sum_i F_{ei}$, $(EJ) = E_b J_b + E_e \sum_i J_{ei}$ und für die Betonspannung in einer Faser z_b :

$$\frac{\sigma_b}{E_b} = -\frac{\sum \sigma_{ei} F_{ei}}{(EF)} - z_b \frac{\sum \sigma_{ei} F_{ei} z_{ei}}{(EJ)}, \quad \sigma_b = \dots$$

Für die Eisenspannung in einer Eisenlage z_{ei} ist:

$$\frac{\sigma_{ei}}{E_e} + \varepsilon_{ei} = \frac{\sigma_{ei} - \sigma_{ei}}{E_e} = -\frac{\sum \sigma_{ei} F_{ei}}{(EF)} - z_{ei} \frac{\sum \sigma_{ei} F_{ei} z_{ei}}{(EJ)} \\ \sigma_{ei} = \dots$$

Damit ist die Aufgabe für jeden Fall der Vorspannungen gelöst.

2. Schwinden im Beton

Es liege der selbe Querschnitt zu Grunde, jedoch seien sämtliche Vorspannungen gleich Null (Schwinden allein). Es ist $\varepsilon_{ei} = 0, \varepsilon_b = \varepsilon_s$ und $N = \varepsilon_s E_b F_b, M = \varepsilon_s E_b F_b s$, wo s den Abstand der Schwerpunkte des ideellen und des Betonquerschnittes bedeutet (s aus der Momentengleichung für S_{id}). (EF) und (EJ) wie oben. In Gl. (11) eingesetzt folgt:

$$\frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_s = \frac{\varepsilon_s E_b F_b}{(EF)} + z_b \frac{\varepsilon_s E_b F_b s}{(EJ)}$$

$$\frac{\sigma_{ei}}{E_e} = \frac{\varepsilon_s E_b F_b}{(EF)} + z_{ei} \frac{\varepsilon_s E_b F_b s}{(EJ)}$$

Werden diese Gleichungen nach σ_b und σ_{ei} aufgelöst, so folgen die bekannten Formeln für das Schwinden nach der Theorie der Eigenspannungen²⁾.

3. Vorspannung und Schwinden

Fall 1. und 2. können gleichzeitig behandelt werden, indem $\varepsilon_b = \varepsilon_s$ und $\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma_{ei}}{E_e}$ gesetzt wird. Es ändern sich nur N und M :

$$N = -\sum_i \sigma_{ei} F_{ei} + \varepsilon_s E_b F_b, \quad M = -\sum_i \sigma_{ei} F_{ei} z_{ei} + \varepsilon_s E_b F_b s \\ (EF) \text{ und } (EJ) \text{ wie oben. Dies führt zu:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_s &= \frac{N}{(EF)} + z_b \frac{M}{(EJ)} \\ \frac{\sigma_{ei}}{E_e} - \frac{\sigma_{ei}}{E_e} &= \frac{N}{(EF)} + z_{ei} \frac{M}{(EJ)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für Vorspannung und} \\ \text{Schwinden gleichzeitig.} \end{array}$$

²⁾ Siehe Prof. Dr. M. Ritter, «Wärme- und Schwindspannungen in eingespannten Gewölben», SBZ, Bd. 95, S. 139* und 156*, März 1930.

4. Temperaturspannungen

Es liege wieder obiger Querschnitt zu Grunde. Man setzt:

$$\varepsilon = \omega t^0$$

wo t^0 = Temperatur (i. Allgem. variabel mit z).

ω = Wärmeleitzahl (i. A. variabel mit z , für Eisen und Beton jedoch konstant und für beide Materialien dieselbe).

a) Lineare Temperaturänderung

Darin ist als Spezialfall die gleichmässige Temperaturänderung mit $t^0 = \text{konstant}$ enthalten. Für t^0 wird gesetzt $t^0 = a + bz$, wo a und b durch t^0_u und t^0_b an den Rändern bestimmt werden können. Es folgt:

$$\varepsilon = \omega(a + bz)$$

und

$$N = \omega[a(EF) + b\sum EFz] = \omega a(EF)$$

$$M = \omega[a\sum EFz + b(EJ)] = \omega b(EJ)$$

Wegen (1) ist $\sum EFz = 0$ und Gl. (11) ergibt:

$$\frac{\sigma}{E} + \omega(a + bz) = \omega(a + bz)$$

woraus wie bekannt $\sigma = 0$.

b) Ungleichmässige Temperaturänderung nach einem Parabelgesetz

Vorausgesetzt sei ein unarmierter Beton-Rechteckquerschnitt von der Grösse bd und eine Temperaturänderung nach dem Gesetz

$$t^0 = t^0_m - 4(t^0_m - t^0_1) \frac{z^2}{d^2}$$

Dann ist

$$\varepsilon = -\omega t = -\omega \left[t_m - 4(t_m - t_1) \frac{z^2}{d^2} \right] \quad (- = \text{Verlängerung})$$

Hierin bedeuten t^0_m die Temperatur in der Mitte und t^0_1 diejenige am Rande des Querschnittes. Aus Symmetriegründen ist $M = 0$. N ist eine fiktive Zugkraft, die nach dem obigen Parabelgesetz leicht berechnet werden kann zu:

$$N = -\frac{\omega EbFb}{3}(t_1 + 2t_m)$$

Nach Gl. (11) folgt:

$$\frac{\sigma}{E_b} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} = -\frac{\omega}{3}(t_1 + 2t_m)$$

oder

$$\sigma = \omega E_b(t_m - t_1) \left(\frac{1}{3} - 4 \frac{z^2}{d^2} \right)$$

Für $z = 0$ und $z = \pm \frac{d}{2}$ folgt bzw. $\sigma = \sigma_m = \frac{\omega E_b}{3}(t_m - t_1)$ und $\sigma = \sigma_R = -2\sigma_m$

Heutige Aufgaben industrieller Wärmewirtschaft

Die immer dringendere Frage, wie und in welchem Umfang die knapp werdende Kohle ersetzt werden kann, veranlasst uns, auf zwei Vortragsveranstaltungen des letzten Jahres zurückzukommen.

I.

An der Generalversammlung des Schweiz. Energiekonsumenten-Verbandes vom 24. März in Zürich¹⁾ wurde durch Kurzvorträge von fünf Referenten das Thema Anpassung der Wärmerversorgung der schweiz. Industrie an die gegenwärtige und kommende Kohlenwirtschaft behandelt.

Nach dem einleitenden Referat von Prof. Dr. B. Bauer, E. T. H., brachten die weiteren Referenten als Beiträge zum gemeinsamen Thema gut belegte Ausführungen über Teilfragen aus dem Arbeitsgebiet ihrer Firmen. Es sprachen Dir. J. Gastpar (Gebr. Sulzer) über «Wärmebeschaffung in Dampf- und Warmwasserkesseln», Obering. R. Peter (Escher-Wyss) über «Richtlinien für vorteilhafte Wärmewirtschaft industrieller Betrieb und die zur Verfügung stehenden technischen Mittel», Obering. P. Faber (BBC) über «Sparsame Energiewirtschaft» und Ing. G. Keller (BBC) über «Ersatz von festen, flüssigen und gasförmigen Brennstoffen durch Elektrowärme». Alle Referate sind als Sonderpublikation des E.K.V. bei dessen Sekretariat, Usteristr. 14 in Zürich zu beziehen.

Nach Prof. B. Bauer, der die prinzipielle Seite des Themas und die Möglichkeit und Notwendigkeit der Anpassung der WärmeverSORGUNG der Industrie an die gegenwärtige und kommende Kohlenwirtschaft darlegte, hat die durch die Mangelwirtschaft und die Autarkiebestrebungen in den kohlenprodu-

¹⁾ In den den Vorträgen vorangehenden geschäftlichen Teil der Sitzung stimmte die Versammlung auf Antrag des Ausschusses einstimmig einer Resolution zu, in der dringend der beschleunigte Ausbau von Grossspeicherwerken gefordert wurde. Die Resolution stellte ferner fest, dass durch rechtzeitige Erteilung von Konzessionen für neue Kraftwerke auf Grund von Art. 21 und 24 bis der Bundesverfassung eine vermehrte Energielieferung heute sichergestellt wäre («Der Schweiz. Energie-Konsument» 1942, S. 70 ff.).

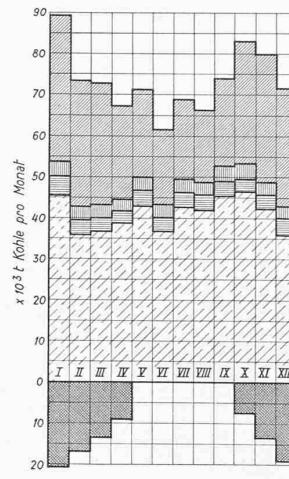


Abb. 1. Ersatzmöglichkeiten des industriellen Kohlenverbrauchs für das Jahr 1940,
Gesamtverbrauch 980100 t

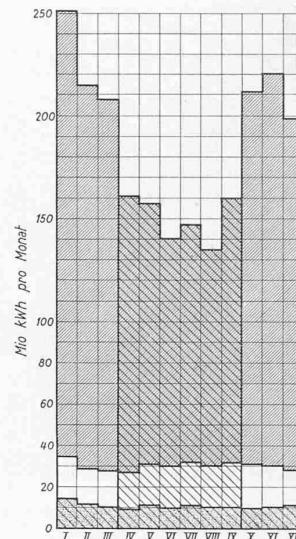


Abb. 2. Strombedarf für den in den industriellen Anlagen möglichen Kohlenersatz im Jahr 1940,
Gesamtbedarf 2200 Mio kWh

zierenden Ländern stark geförderte «Kohlenveredlung», für die die Kohle nicht mehr «Brennstoff», sondern «Werkstoff» ist, auch für spätere Zeiten unbedingt eine Verknappung und Verteuerung der bisher von der Industrie bevorzugten fetten Kohlensorten zur Folge. Anderseits muss mit einer stärkeren Belastung der Kohle durch fiskalische und soziale Abgaben gerechnet werden. Ein Angleichen an diese Verhältnisse müsste daher gesucht werden durch Brennstoffeinsparung einerseits und durch Ersatz von Brennstoffen durch landeseigene Rohenergie, d. h. durch Elektrizität anderseits.

Über Ersatz von Brennstoffen durch Elektrowärme machte Ing. G. Keller interessante Angaben. Prinzipiell sei dies bei den meisten industriellen Wärmeanlagen möglich; besonders günstig liegen die Verhältnisse bei Glüh-, Brenn- und Schmelzöfen, wo Temperaturen bis 1000 °C leicht erreicht werden können. Für höhere Temperaturen bestehen noch gewisse Schwierigkeiten. Für Grossbetriebe, z. B. für Anwendung von Elektrowärme in der Zementindustrie, liegen erst Versuche vor; dagegen sind auch Trockenöfen und Metallbäder geeignete Objekte. Für Elektrokessel für Dampf- oder Warmwasserbereitung liegen die Verhältnisse wieder wesentlich anders, da hier der Wärmeinhalt einer kWh direkt mit dem nutzbaren Heizwert eines kg Brennstoff in Beziehung zu setzen ist. Keller gab eine interessante Zusammenstellung über die Äquivalenzzahl einer kWh zu einem kg Brennstoff bei verschiedenen Verwendungszwecken. Diese Verhältniszahl (kWh elektr. Energie : kg Kohle für gleiche Produktion) beträgt z. B. für Einsatzhärteöfen 2,7, für Glühöfen 2,0, für Brennen von Porzellan 1,28, Emaillieren von Blechwaren 1,0, Feuerverzinkung 1,0, Dampferzeugung 5 bis 6. Diese Zahlen sind für die Tarifbildung und Anwendungsmöglichkeit massgebend.

Nach Studien von Prof. Bauer wären von dem im Jahre 1940 ausgewiesenen Kohlenbedarf von rd. 1 Mio t etwa 60% vorläufig aus technischen oder wirtschaftlichen Gründen nicht durch Elektrizität ersetztbar, für die übrigen 40% liesse sich die Umstellung durchführen (Abb. 1). In den Angaben, die diesem Diagramm zu Grunde liegen, sind die 1940 bereits elektrifizierten Betriebe nicht inbegriffen. Die für den angegebenen Brennstoffersatz erforderliche Energiemenge übersteigt aber bei weitem die wirtschaftliche Leistungsfähigkeit der bestehenden und neu geplanten Kraftwerke. Ein mutmassliches Maximalprogramm (!) gibt das zweite Diagramm (Abb. 2). Darnach «können eventuell» 183000 t Industriekohlen im Jahre durch Hydroelektrizität ersetzt werden. Für die Durchführung dieses Programms wären aber vielfach