Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 121/122 (1943)

Heft: 24

Inhaltsverzeichnis

Band 122 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 24

De la stabilité des chambres d'équilibre et des systèmes de chambres d'équilibre

(Suite de la page 257)

Par CHARLES JAEGER, Dr. ès sc. techn., Privat-docent à l'E. P. F., Collaborateur du Laboratoire de recherches hydrauliques E. P. F. à Zurich

II. LA CHAMBRE D'EQUILIBRE CYLINDRIQUE

1. Application de la «méthode estimative» (Abschätzungsverfahren) de Schüller-Karas

Voici quel est le raisonnement fait par Schüller[5]) et amplement développé par Karas[6]): On peut toujours ramener une équation de la forme (5) à une équation telle que:

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + \varphi(t) \frac{d z}{d t} + \psi(t) z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions du temps t, par l'intermédiaire de z, dz/dt, etc.

Revenons à l'équation (6). Multiplions chaque terme par $\frac{dz}{dt} dt$ et intégrons de $-\delta t$ à t. On obtient successivement

$$\int_{-\delta t}^{t} \frac{d^2 z}{d t^2} \frac{d z}{d t} d t + b \int_{-\delta t}^{t} z \frac{d z}{d t} d t = -2 a \int_{-\delta t}^{t} \left(\frac{d z}{d t}\right)^2 d t \quad (10)$$

ou encore

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d z}{d t}\right)^2\right]_{-\delta t}^{t} + b \left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\delta t}^{t} = -2 a \int_{-\delta t}^{t} \left(\frac{d z}{d t}\right)^2 d t \quad . \quad . \quad (11)$$

On voit alors[7]) que le membre de gauche de l'équation (11) représente la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du système, à condition que b soit positif. Si a est positif, cette somme des énergies est constamment négative en prenant comme point de référence l'instant $t = -\delta t$ où les énergies sont nulles.

Partons maintenant de l'équation (9) et opérons de même. Nous aurons en supposant δt très petit:

$$\int_{0}^{t} \frac{d^2 z}{d t^2} \frac{d z}{d t} d t + \int_{0}^{t} \psi(t) z \frac{d z}{d t} d t = -\int_{0}^{t} \varphi(t) \left(\frac{d z}{d t}\right)^2 d t \quad . \quad (12)$$

Faisons les deux hypothèses restrictives suivantes: $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions de t, mais telles qu'elles varient peu avec t (ce qui malheureusement ne se vérifiera point entièrement et affaiblira la portée des raisonnements!), supposons en outre que l'on puisse définir des *valeurs moyennes* $\varphi_m(t)$ de $\varphi(t)$ et $\psi_m(t)$ de $\psi(t)$. Dans ces conditions, on peut écrire (12) sous la forme:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d z}{d t}\right)^2\right]_{0}^{t} + \psi_m(t) \left[\frac{z^2}{2}\right]_{0}^{t} = -\varphi_m(t) \int_{0}^{t} \left(\frac{d z}{d t}\right)^2 d t \quad (13)$$

Le raisonnement de Schüller, repris et développé par Karas, consiste à comparer et à confondre la courbe $z = z(t)$ qui représente la solution réelle du mouvement telle que la donne l'équation (9) avec la solution approchée telle qu'elle ressort de l'équation:

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + \psi_m(t) z = -\varphi_m(t) \frac{d z}{d t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

où $\varphi_m(t)$ et $\psi_m(t)$ sont des constantes. Or, cette dernière équation représente un mouvement amorti si:

$$\psi_m(t) > 0 \text{ et } \varphi_m(t) > 0$$

Pour que la substitution proposée ait un sens, il est bien indispensable que les hypothèses relatives à $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi_m(t)$ et $\psi_m(t)$ soient satisfaites. Mais, même en ce cas, il est bien entendu qu'il s'agit d'une méthode «estimative», ainsi que la dénomme Schüller, c'est-à-dire d'une voie d'analyse approchée.

Schüller d'ailleurs, n'avait pas posé les conditions $\psi_m(t) > 0$ et $\varphi_m(t) > 0$, mais écrivait simplement $\psi(t) > 0$ et $\varphi(t) > 0$, conditions qui se prêtent mal à la discussion, ainsi que nous le verrons, et auxquelles il est parfois même impossible de satisfaire.

En poursuivant ses calculs, Schüller avait montré qu'il convient, dès que les oscillations ne sont pas infiniment petites, d'écrire au lieu de la formule de Thoma: (7b), la relation[8]):

$$F \geqq \frac{w_0^2}{g} \frac{L f}{P w_0^2 H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ce qui revient à poser: $n^* \cong 2$, compte tenu du fait que $H \neq H_0$. Karas va même plus loin et précise que cette valeur limite de F est celle admissible à hauteur du niveau statique et que F croît à une certaine distance en dessous de ce niveau jusqu'à $n^* = 3$ et au delà; ce qui donnerait en réalité $n^* \cong 3$ pour qu'une chambre cylindrique soit simplement stable, l'oscillation étant, à la limite, sinusoïdale. Il faudrait encore ajouter à n^* une certaine marge de securité pour assurer l'amortissement des oscillations.

Ce résultat est décevant, car il impose des chambres très grandes. De plus, il n'est point non plus satisfaisant, car on ne voit figurer nulle part, ni dans la formule finale de Schüller, ni dans celle de Karas, le rapport $z_{\max}/H$ qui certainement joue un rôle essentiel, et l'on ne voit pas non plus pour quelle raison, en passant graduellement des oscillations très petites à des oscillations d'amplitude finie, on devrait passer brusquement de $n^* = 1$ à $n^* = 2$, et même plus. En fait, les développements de Schüller et Karas reposent sur un certain nombre d'hypothèses un peu fragiles qu'il convient de vérifier ou même de rectifier.

Pour préciser le sens de notre remarque, nous reproduisons l'équation [84] d'un récent travail de Karas[9]), équation qu'on obtient en écrivant explicitement la condition $\varphi(t) > 0$. Karas écrit que:[10])

$$[84] \quad \left(-\frac{1}{F_z} \frac{d F_z}{d z} + \frac{P g F_z}{L f}\right) \frac{d z}{d t} + \frac{2 P g C}{L f (H + z)} - \frac{C}{F_z (H + z)^2} > 0 \quad (16)$$

F_z est la section de la chambre, supposée variable avec z. Dans cette équation, dz/dt est donné par l'équation de continuité

$$\frac{d z}{d t} = -\frac{C}{F_z (H + z)} + \frac{f}{F_z} w$$

On peut, ainsi que le montre Karas, intégrer l'équation [84] et obtenir la loi $F_z = F_z$ en supposant $w = w_1 = \text{const.}$, w_1 étant la vitesse dans la galerie d'amenée au début du phénomène ($t = 0$). Mais pareille hypothèse, quelque séduisante qu'elle soit pour le calculateur qui se trouve en présence d'une équation différentielle à intégrer, n'est admissible que tout au début du mouvement, au temps $t = 0$; dès que le temps croît, w s'avère être une fonction du temps, $w = w(t)$, et l'hypothèse n'est plus admissible. Or, ce qui nous intéresse, lorsque nous voulons étudier la stabilité de la chambre, c'est précisément l'allure du phénomène au cours d'un certain nombre de phases et non point au seul instant $t = 0$. Il faut donc rejeter l'hypothèse de Karas et suivre un autre raisonnement.

Si les oscillations sont à la limite de la stabilité, on ne commettra pas une grande erreur en admettant qu'elles sont de forme sinusoïdale. Supposons en outre que $F_z = F$ est constant, c'est-à-dire que $dF_z/dz = 0$; en employant des notations classiques[11]), nous écrivons (Fig. 1):

$$z = z_0 + s; \quad z_0 = -P w_0^2$$

$$s = \pm Z_* \sin \frac{2 \pi t}{T}; \quad \frac{d z}{d t} = \frac{d s}{d t} = \pm \frac{2 \pi Z_*}{T} \cos \frac{2 \pi t}{T}$$

$$Z_* = \frac{Q_0}{F} \sqrt{\frac{L F}{g f}} \;^{12)}; \quad T = 2 \pi \sqrt{\frac{L F}{g f}}$$

et

$$F \frac{d z}{d t} = \frac{2 \pi Z_*}{T} F \cos \frac{2 \pi t}{T} = Q_0 \cos \frac{2 \pi t}{T}$$

---

[5]) *Schüller:* Eine wirtschaftliche Wasserschlossform. «SBZ» tome 89 (1927) et *Frank et Schüller:* «Schwingungen in den . . . .» (op. cit.) p. 92.

[6]) *K. Karas:* Rechnerische Ermittlung der Spiegelbewegung gedämpfter Wasserschlösser. «Ingenieur-Archiv», décembre 1941.

[7]) *Ollivier:* Cours de Physique générale, tome III (Edition de 1932), page 68.

[8]) *Frank et Schüller,* op. cit., p. 104, équation (61).

[9]) *Karas,* op. cit.

[10]) On obtient cette équation en introduisant la condition de réglage (1) dans le système d'équations des oscillations.

[11]) Voir p. ex.: *Calame et Gaden:* «Théorie des chambres d'équilibre».

[12]) Z_* est donc l'élongation maximum des oscillations dans un système sans frottement.