

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 121/122 (1943)
Heft: 21

Artikel: Les vibrations transversales des cordes pesantes verticales
Autor: Favre, Henry
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-53207>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

où

$$c = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad \dots \dots \dots \quad (4')$$

est la vitesse d'une onde indéformable se propageant le long de la corde.

2. Solution approchée de l'équation (3) dans le cas d'une corde homogène pesante verticale

Nous avons vu que, pour une telle corde, μ est constant et S une fonction linéaire de x . Ecrivons cette fonction comme suit pour la commodité des calculs:

$$S = S_0(1 + 4\alpha x) \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

où S_0 désigne la traction au point d'abscisse nulle, α une constante dont la dimension est l'inverse d'une longueur. La comparaison de (1) et (5) montre que

$$\mu g = 4\alpha S_0, \text{ d'où } \alpha = \frac{\mu g}{4S_0} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

Introduisons l'expression (5) de S dans (3); il vient, après multiplication par $1 + 4\alpha x$:

$$(1 + 4\alpha x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 4\alpha \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \quad (7)$$

où

$$c = \sqrt{\frac{S_0}{\mu}} \quad \dots \dots \dots \quad (7')$$

Dans la plupart des applications, α sera très petit par rapport à un et αx petit. Prenons en effet l'exemple numérique précédemment cité:

$$\alpha = \frac{\mu g}{4S_0} = \frac{1}{4 \cdot 500} = 0,0005 \text{ m}^{-1}$$

$$\alpha |x|_{\max} = \alpha \frac{h}{2} = 0,0005 \cdot 50 = 0,025$$

Il est donc indiqué de chercher à déterminer une solution approchée de (7) en considérant α et αx comme petits.

Dans ce but, nous ferons le raisonnement suivant. Dans le cas particulier $\alpha = 0$, l'équation (7) se réduit à celle des cordes vibrantes (4), dont l'intégrale générale est

$$y = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où F et f désignent des fonctions quelconques. Ces fonctions représentent des ondes qui se propagent sans se déformer, F dans le sens des x croissants, f dans le sens contraire. La vitesse de propagation de ces ondes est c .

Dans le cas général où α est différent de zéro, mais α et αx sont petits par rapport à 1, nous pouvons chercher à satisfaire à l'équation (7) par une expression de la forme

$$y = (1 + \varepsilon_1 x) \left\{ F\left[t - \frac{(1 + \varepsilon_2 x)x}{c}\right] + f\left[t + \frac{(1 + \varepsilon_2 x)x}{c}\right]\right\} \quad (8)$$

où F , f désignent des fonctions quelconques, ε_1 et ε_2 des constantes du même ordre que α . Cette expression représente, comme nous le verrons au paragraphe suivant, la somme de deux ondes qui se propagent en se déformant.

Pour vérifier que (8) est bien la solution cherchée et pour trouver les valeurs de ε_1 et ε_2 , remplaçons, dans (7), y par l'expression ci-dessus en faisant pour simplifier $f = 0$. On obtient après quelques transformations et en tenant compte de ce que α et αx sont petits par rapport à un, ce qui permet de négliger les produits et les puissances des petites quantités ε_1 , ε_2 et α :

$$-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\alpha)F' + 2(\varepsilon_2 + \alpha)\frac{x}{c}F'' = 0$$

où F' et F'' désignent les dérivées première et seconde de F par rapport à t . Cette équation sera satisfaite quel que soit F si l'on choisit ε_1 et ε_2 de façon à annuler les expressions entre parenthèses. D'où les deux conditions:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\alpha = 0$$

$$\varepsilon_2 + \alpha = 0$$

c'est à dire $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\alpha$

Remplaçons ε_1 et ε_2 par $-\alpha$ dans (8), il vient:

$$y = (1 - \alpha x) \left\{ F\left[t - \frac{1}{c}(1 - \alpha x)x\right] + f\left[t + \frac{1}{c}(1 - \alpha x)x\right]\right\} \quad (9)$$

Telle est une solution approchée de l'équation (7) régissant les vibrations transversales d'une corde homogène pesante verticale. Son application est soumise à la restriction que α et $\alpha |x|_{\max}$ soient petits par rapport à un. Pratiquement ces deux grandeurs devront être comprises entre 0 et 0,1 ou tout au plus 0,15³⁾.

Remarque. En comparant (6) et (7') on voit que les constantes α et c sont liées par la relation $4\alpha c^2 = g$.

3. Interprétation physique de la solution (9)

Nous allons tout d'abord montrer que F et f représentent des ondes qui se propagent en se déformant. Considérons par exemple F .

Nous appellerons «vitesse de propagation d'une valeur déterminée de la fonction F » la vitesse d'un observateur se déplaçant le long de la corde de manière à ce que F lui paraîsse constant. L'équation régissant le mouvement d'un tel observateur est évidemment

$$t - \frac{1}{c}(1 - \alpha x)x = \text{const.}$$

car cette relation est précisément la condition nécessaire et suffisante pour que F ne varie pas.

Pour calculer la vitesse $\frac{dx}{dt}$ de l'observateur, c'est à dire la vitesse de propagation définie ci-dessus, dérivons les deux membres par rapport à t :

$$1 - \frac{1}{c}(1 - 2\alpha x)\frac{dx}{dt} = 0$$

d'où, en remarquant que $2\alpha x$ est petit par rapport à 1:

$$\frac{dx}{dt} = c(1 + 2\alpha x) = \sqrt{\frac{S_0}{\mu}}(1 + 2\alpha x) \quad \dots \quad (10)$$

Mais, au profil x , la traction est $S = S_0(1 + 4\alpha x)$ (5). Si S avait partout cette valeur, la vitesse de propagation qu'auraient les ondes indéformables F et f serait, d'après (4'):

$$\sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S_0(1 + 4\alpha x)}{\mu}} \cong \sqrt{\frac{S_0}{\mu}}(1 + 2\alpha x)$$

c'est à dire précisément $\frac{dx}{dt}$. Ceci nous permet d'énoncer le théorème:

«En un profil d'abscisse x , la vitesse de propagation d'une valeur de F est égale à la vitesse qu'auraient les ondes indéformables le long d'une corde de caractéristiques μ , S constantes précisément égales à celles du profil considéré».

F représente donc une onde qui se propage en se déformant, puisque, à un instant donné t , la vitesse de propagation de chacune des ordonnées de la courbe $F(x, t)$ est une fonction de x représentée par l'équation (10). La vitesse de chaque ordonnée étant positive, l'onde se déplace dans le sens des x croissants, c'est à dire de bas en haut et comme $1 + 2\alpha x$ croît avec x , les ordonnées de la tête de l'onde ont des vitesses plus grandes que celles de la queue, de sorte que l'intumescence tend à s'allonger. La figure 3 montre comment se propage une onde F (trait interrompu).

Quant à la fonction f , elle représente une onde qui se propage en se déformant dans le sens des x décroissants, c'est à dire de haut en bas, comme une onde F qui décrirait son chemin en sens inverse; f se raccourcit en se propageant. Il suffit, pour démontrer cette propriété, de remarquer que l'on passe de l'argument de F à celui de f en remplaçant c par $-c$.

Examinons maintenant y . Si F existe seul, y sera l'ordonnée d'une onde que l'on obtiendra, pour un instant donné, en multipliant les ordonnées de l'onde F par le facteur $1 - \alpha x$. Cette onde, en se propageant de bas en haut, a ses ordonnées y qui décroissent. De plus elle s'allonge. Elle est donc fortement défigurée (voir la figure 3, trait continu).

Si f existe seul, y sera une onde se propageant de haut en bas. Ses ordonnées augmentent mais sa longueur diminue.

Lorsque F et f sont différents de zéro, y est la somme de deux ondes analogues à celles que nous venons de décrire, la première, qui correspond à F , se propage de bas en haut, la seconde, correspondant à f , se propage de haut en bas.

Remarquons encore que si, à un instant donné, une onde y correspondant à F coïncide avec une autre correspondant à f , la première coincidera, dans la suite, avec les différentes positions qu'occupait la seconde à des temps antérieurs et réciproquement. Cela est dû au fait que leur déformation dépend de x seul (et non de t). (A suivre.)

³⁾ Pour mettre en évidence l'influence de la pesanteur, les figures 3 à 8 ont été faites en choisissant la limite extrême $\alpha |x|_{\max} = \alpha \frac{h}{2} = 0,15$.

Dans toutes les figures nous avons exagéré les dimensions horizontales, afin de permettre une appréciation commode du caractère des vibrations. Il va de soi qu'il s'agit de mouvements infinitésimaux.

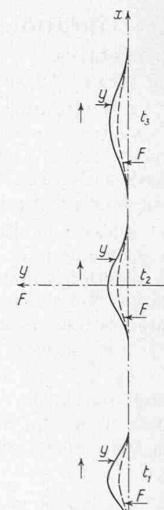


Fig. 3. Ondes F et y aux temps t_1 , t_2 et t_3