Probleme der Flüssigkeitstreibung

Autor(en): **Bosch, M. ten / Weisz, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **121/122 (1943)**

Heft 14

PDF erstellt am: **15.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-53180

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

INHALT: Probleme der Flüssigkeitsreibung. — Vom Studentenheim an der E. T. H. — Eidgenössisches Oberbauinspektorat. — Standardisierung im Schwedischen Bauwesen. — Mitteilungen: Architektenhonorar, ein strittiger Fall vor Bundesgericht. Hartverchromen von Zylinderbohrungen. Schweizerische Holzgas-Eisenbahn-Fahrzeuge. Eidg. Technische Hochschule. Bauliche Entwicklung Genfs. Schweiz. Vereinigung für Gesundheitstechnik. Volkshochschule des Kantons Zürich. Sprengstoffe als Kampfmittel der Bautruppen. Rhone-Kraftwerk Mörel der A. I. A. G. — Nekrologe: Emil Müller. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 122 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 14

Probleme der Flüssigkeitsreibung

Von Prof. M. ten BOSCH und Dipl. Ing. A. WEISZ, Assistent für Masch.-Elemente, E. T. H., Zürich

Die Theorie der flüssigen Reibung[1]) geht von der «schleichenden» Flüssigkeitsströmung aus, die durch die Gümbel'sche Zahl $Gü = P_1/\eta\, U$ gekennzeichnet ist. Sie setzt eine nach Grösse und Richtung unveränderliche Gewichtsbelastung P_1 kg pro Breiteneinheit der Gleitfläche voraus und führt (unter Voraussetzung einer unveränderlichen Zähigkeit η) für die unendlichbreite Gleitfläche zu einfachen Gleichungen. Die Zähigkeit ändert sich mit der Oeltemperatur, die sich in der Längs- und Querrichtung der Gleitfläche nach sehr verwickelten Gesetzen ändert[2]) und von einer grossen Zahl von Einflüssen abhängt, die in mannigfacher Ueberlagerung im Lager auftreten. Wie Messungen in Uebereinstimmung mit vereinfachten theoretischen Ueberlegungen[3]) zeigen, kann die Veränderlichkeit der Zähigkeit aber in einfachster Weise durch Einführung einer *mittleren* konstanten Zähigkeit berücksichtigt werden. Diese kann ungefähr gleich der Zähigkeit der Temperatur in der Mitte der Tragfläche gesetzt werden.

1. Vergleich verschiedener Spaltformen

Für die ebene Gleitfläche ist:

$$P_1 = \frac{\eta\, U\, a^2}{h_0^{\,2}}\, \Phi \quad \text{oder} \quad h_0/a = \sqrt{\Phi}\, \sqrt{\frac{\eta\, U}{P_1}} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$\mu = K \sqrt{\frac{\eta\, U}{P_1}} = C\, h_0/a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

In diesen Gleichungen sind Φ, K und C reine Zahlen, die nur von der Spaltform und von den Randbedingungen für die Schmierölzu- und Ableitung abhangen. Bekannt ist auch, dass zur Erzeugung einer tragfähigen Oelschicht jeder Spalt geeignet ist, dessen Höhe in Richtung der Bewegung abnimmt. Bei der Vielseitigkeit der möglichen Spaltformen (Abb. 1) scheint ein Vergleich und die Auswahl der «günstigsten» Formen zweckmässig. Je nach der Bewertung der Vor- und Nachteile kann der Konstrukteur, die Werkstatt oder der Betriebsleiter der Anlage zu anderen Bedingungen für die «günstigste» Spaltform kommen.

Wenn η, U und P_1 vorgeschrieben oder gewählt sind, wird der Konstrukteur (um eine möglichst kleine Reibzahl zu erreichen) den kleinsten K-Wert (in Gl. 2) wählen. Mit Rücksicht auf grösste Betriebsicherheit wird der Betriebsleiter (um eine metallische Berührung bestimmt zu vermeiden) einem grossen Wert von h_0, also einem grossen Φ-Wert in Gl. 1 den Vorzug geben. Der Kleinstwert von h_0 ist durch die wirtschaftliche Herstellung begrenzt. Da nach Gl. 2 die Reibzahl dem Wert h_0/a direkt proportional ist, wird eine kleine Reibzahl bei hoher Sicherheit und innerhalb wirtschaftlicher Grenzen durch den kleinsten C-Wert erreicht. Schliesslich muss der Konstrukteur bei der Wahl einer Spaltform auch Rücksicht auf die einfache Herstellung nehmen; diese Forderung ist oft entscheidend.

Wie aus Abb. 2 (für die geneigte und die teilweise abgesperrte Platte) und aus Abb. 3 (für den parabolischen Voll- und Halbzylinder und für parabolisch abgerundete Oeleintrittskanten) hervorgeht, können die drei Bedingungen (K_{min}, Φ_{max} und C_{min}) nicht gleichzeitig erfüllt werden. Erfreulicherweise liegen sie oft verhältnismässig nahe zusammen. Zum einheitlichen Vergleich aller Spaltformen scheint das Spalthöhenverhältnis h_1/h_0 am zweckmässigsten. Die günstigsten h_1/h_0-Werte liegen zwischen 2 und 3, vereinzelt auch bei 4.

Grundsätzlich kann gesagt werden, dass alle Spaltformen mit abgerundeter oder abgeschrägter Oeleintrittskante (Abb. 1d, e) eine kleinere Tragfähigkeit und eine etwas grössere Reibzahl haben als Spaltformen mit bis zum Ende der Tragfläche abnehmender Spalthöhe (Abb. 1a, b). Mit den zuerst genannten Spaltformen erreicht man also niemals die günstigste Reibzahl oder die kleinste Gleitfläche, aber immerhin eine brauchbare Ausführung mit Flüssigkeitsreibung (ohne Abnutzung) bei billiger Herstellung. Um z. B. einen Kreuzkopf tragfähig zu machen, genügen verhältnismässig kleine Abrundungen mit $h_1/h_0 = 2$ bis 3 für beide Bewegungsrichtungen. Auch in der kurzen Zeit des Richtungswechsels ($U = 0$) lässt sich eine unmittelbare Berührung der Gleitflächen verhindern, da die Zeit nicht ausreicht, um den Schmierzustand für $U = 0$ herzustellen.

Besonderes Interesse bietet die teilweise abgesperrte Platte (Abb. 1f), die zweifellos einfach in der Herstellung ist und auch sehr günstige Φ-, K- und C-Werte aufweist. Es scheint deshalb empfehlenswert, dieser bisher noch nicht gebräuchlichen Spaltform eine Vorzugstellung einzuräumen. Mit $a_1/a_0 = 3$, $h_1/h_0 = 2$, $h_0 = 0{,}002$ mm und $a = 100$ mm könnte damit theoretisch für eine unendlich breite Gleitfläche eine Reibzahl

$$\mu = C\, h_0/a = 4 \times 0{,}002/100 = 0{,}00008$$

erreicht werden, also nur 1 % des heute bei guten Ausführungen erreichten Wertes.

Man könnte die Theorie auch für die Berechnung der Reibung der Dichtungsringe in einem Kolben verwenden, wenn Spaltform und Oelmenge bekannt wären. Die handelsüblichen Ringe, mit denen H. Horgen[4]) ausgedehnte Reibungsversuche durchgeführt hat, liefen (wie genaue Profilmessungen zeigten) ohne Abrundung oder Abschrägung scharf aus. Man kann umgekehrt (unter der Voraussetzung, dass tatsächlich flüssige Reibung vorhanden ist) aus den Versuchsergebnissen die «wahrscheinlichste» Spaltform ableiten. Horgen vergleicht nun seine Versuche mit der Theorie einer abgeschrägten bezw. abgerundeten Oeleintrittskante und kommt (in krassem Widerspruch zu den Profilmessungen) zum Ergebnis, dass die wahrscheinlichste Spaltform eine auf $^1/_5$ der Länge mit grossem h_1/h_0-Wert ausgeführte Schrägung wäre. Eine zuverlässige Vorausberechnung der Kolbenreibung scheint so lange ausgeschlossen, bis die Faktoren, die eine tragfähige Oelschicht ermöglichen, geklärt sind. Als solche kämen in Betracht: eine schwache Schrägstellung (Verdrehung) des Ringes und eine Drucksteigerung im Spalt *vor* dem Ring, als teilweise abgesperrte Platte.

2. Flüssige Reibung beim Schneckentrieb

Eine weitere Gruppe schmiertechnisch wichtiger Probleme bilden die Zahnflanken, Rollen, Wälzhebel, usw. Es handelt sich dabei um parallele Zylinder, deren relative Bewegung tangential oder normal zur Oberfläche gerichtet sein kann. Solche Probleme können auf den parabolischen Vollzylinder (Abb. 1c) zurückgeführt werden[5]), für den die Lösung bekannt ist.

Die praktische Bedeutung dieser theoretischen Grundlagen liegt bei den Rollenlagern zunächst in der Verminderung der Abnutzung[6]). Wenn es bei den Zahnflanken gelingen würde, eine tragfähige Oelschicht von Beginn bis Ende des Eingriffes *zuverlässig* zu erzeugen, so wären die beiden Hauptmängel hochbelasteter und raschlaufender Zahnflanken (Geräusch und Abnutzung) grösstenteils behoben. Die technischen Schwierigkeiten bei der Verwirklichung sind aber sehr gross. Etwas günstiger als bei den Zahnrädern scheinen die Voraussetzungen für flüssige Reibung beim *Schneckentrieb* zu liegen, wegen der hohen Gleitgeschwindigkeit ohne Richtungswechsel. Die Verminderung des Reibungsverlustes hat hier auch eine wesentlich grössere Bedeutung als bei den Zahnrädern. G. Niemann[7]) hat den *theoretischen* Nachweis erbracht, dass dieses Ziel durch eine zweckmässige Zahnform tatsächlich erreicht werden kann. Sein Anwendungsbeispiel, nach dem ein Schneckentrieb für 5000 PS bei einer Uebersetzung von 3000 auf 300 U/min einen Wirkungsgrad von 98,8 % aufweist, klingt heute noch phantastisch, sollte aber die Fachwelt doch zu praktischen Ausführungen anspornen.

---

[1]) Die Theorie wird als bekannt vorausgesetzt. Vgl. z. B. *ten Bosch:* Vorlesungen über Maschinenelemente, Abschnitt 42.

[2]) Vgl. z. B. die Messungen von *W. Nücker:* VDI-Forschungsheft 352 (1932) und von *A. Rumpf:* VDI-Forschungsheft 393 (1938).

[3]) Vgl. z. B. die Messungen von *R. E. Stanton* im Nat. Phys. Lab (London) oder Abb. 42.22 in «Vorl. über Masch.-El» und die Berechnung von *v. Freudenreich:* Sonderdruck BBC-Mitteilungen, Nov. 1920.

[4]) *H. Horgen:* Versuche über Kolbenringreibung. Diss. E.T.H., Zürich, 1942.

[5]) *W. Peppler:* VDI-Forschungsheft 391 (1938).

[6]) *E. Heidebroek:* Zur Theorie der Flüssigkeitsreibung zwischen Gleit- und Wälzflächen. Forschung 6 (1935), S. 161/68.

[7]) *G. Niemann:* Schneckengetriebe mit flüssiger Reibung. VDI-Forschungsheft 412 (1942).

Zahlentafel 1: Verhältnis L_1/L_0 der wirklichen Reibleistung L_1 zur Reibleistung im unbelasteten Zustand L_0

P_1/P_1''	L_1/L_0			
	$\delta = 0{,}6$	$\delta = 0{,}8$	$\delta = 0{,}9$	$\delta = 0{,}95$
0	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00
0,2	1,00	1,00	1,00	1,01
0,4	1,00	1,00	1,00	1,05
0,6	1,00	1,01	1,02	1,08
0,8	1,02	1,03	1,06	1,11
1,0	1,04	1,05	1,09	1,13
1,2	1,06	1,07	1,12	1,16
1,5	1,08	1,10	1,15	1,19
2,0	1,12	1,14	1,20	1,23

NB: P_1 = äussere Belastung pro Längeneinheit (Abb. 4).
P_1'' = stabilisierende Kraft der oberen Schale pro Längeneinheit.
δ = relative Beilagedicke = $a/\Delta r$.

gleich der (vertikal angenommenen) äusseren Belastung P_1 sein müssen. Diese Forderung kann nur durch wiederholtes Probieren und durch schrittweise Annäherung erfüllt werden. Dieser umständlichen und zeitraubenden Berechnungsweise ist es wohl zuzuschreiben, dass solche Berechnungen bisher noch nie veröffentlicht wurden.

Bei den praktischen Ausführungen erfolgt der Oeleintritt sowohl für die obere als auch für die untere Lagerschale (bei vertikaler Kraftwirkung P_1) in der horizontalen Trennebene. Die Richtungen der Teilkräfte P_1' und P_1'' sind dann eindeutig durch die Winkel $(\varphi_1' - \beta')$ und $(\varphi_1'' - \beta'')$ bestimmt. Die Bedingung, dass die resultierende Kraft P_1 vertikal steht, ist dann erfüllt, wenn

$$P_1' \cos(\varphi_1' - \beta') = P_1'' \cos(\varphi_1'' - \beta'')$$

ist. Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit dem konstanten Faktor $\psi^2/\eta U$, so wird:

$$\frac{P_1' \psi^2}{\eta U} \cos(\varphi_1' - \beta') = \frac{P_1'' \psi^2}{\alpha U} \cos(\varphi_1'' - \beta'')$$

oder

$$\Phi' \cos(\varphi_1' - \beta') = \Phi'' \cos(\varphi_1'' - \beta'') \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Die Kurvenschar $\Phi \cos(\varphi_1 = \beta)$ kann aus den bekannten Funktionen Φ und β berechnet und gezeichnet werden. Aus der Bedingungsgleichung (3) folgt durch Probieren (für verschiedene Werte der relativen Beilagedicke δ) die Bahn des Wellenmittels (Abb. 5). Mit Hilfe dieser Bahnkurven ist die Berechnung der Lager mit Zitronenspiel allgemein und eindeutig gelöst.

Die Lage des Wellenmittels ist praktisch auf die kleine Fläche in Abb. 5 zwischen $\Phi = 0$ und $\Phi = 2$ beschränkt. Die kleinste Spalthöhe folgt dann aus der einfachen Beziehung:

$$h_0/\Delta r = 1 - \delta \text{ oder } h_0 = \Delta r - a \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Die Reibleistung L_1 pro Breiteneinheit des Lagers kann aus den Teilleistungen der beiden Lagerhälften berechnet werden. Aus

$$L_1 = (\mu' P_1' + \mu'' P_1'') U$$

folgt mit $\mu = C\psi$ und $P_1 = \frac{\eta U}{\psi^2} \Phi$:

$$L_1 = (C' \Phi' + C'' \Phi'') \frac{\eta U^2}{\psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

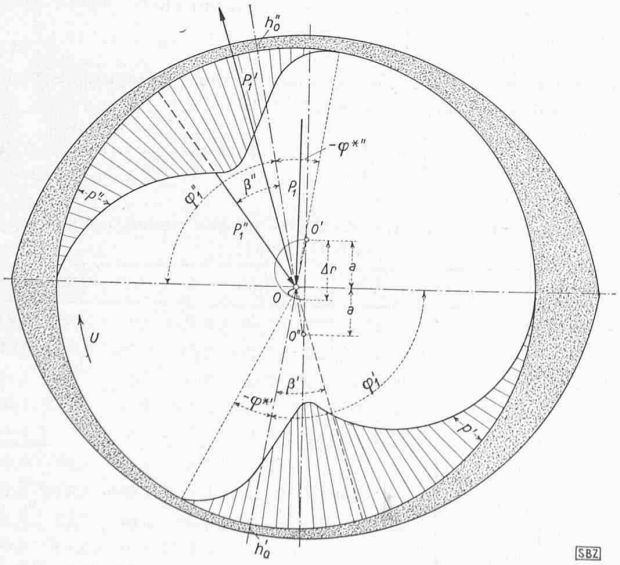

Abb. 4. Lager mit Zitronenspiel

Zahlentafel 2: Bewährte Spiele der A. E. G. [8])

Zapfen-Durchmesser d (= Lagerbreite) mm	Δd μ	Beilage-Dicke 2 a μ	Rel. Lagerspiel $\psi = \Delta d/d$ ‰	Rel. Beilagedicke $\delta = a/\Delta r$
60	400	300	6,67	0,75
80	400	300	5,00	0,75
100	500	400	5,00	0,80
160	700	500	4,38	0,71
200	800	600	4,00	0,75
300	1000	700	3,33	0,70
400	1400	1100	3,50	0,78
500	1800	1400	3,60	0,78

[8]) *E. A. Kraft:* Die Dampfturbine im Betrieb. J. Springer, Berlin 1935, S. 50.

Die Zahlenwerte C', C'', Φ' und Φ'' sind für eine bestimmte relative Beilagedicke δ (mit Hilfe der aus den bekannten Bahnkurven, Abb. 5, abgelesenen Werten für ε', ε'', φ_1' und φ_1'') bekannt. Das Ergebnis der Berechnung ist in Zahlentafel 1 zusammengestellt und zeigt, dass, wenn die stabilisierende Kraft P_1'' im Verhältnis zur Lagerbelastung P_1 gross ist (und nur in solchen Fällen ist Zitronenspiel notwendig), *die Reibleistung eines Lagers mit Zitronenspiel praktisch unabhängig von der äusseren Belastung ist.* Diese Feststellung hat eine grosse praktische Bedeutung, indem es genügt, die Reibleistung L_0 für den einfachen Fall eines unbelasteten Lagers zu berechnen, das nur durch die beiden Zangenkräfte $P_1' = P_1'' = P_{1s}$ belastet ist. Da in diesem Grenzfall der obere und der untere Oelspalt vollkommen gleich sind, ist $\varepsilon' = \varepsilon''$ und $\varphi_1' = \varphi_1'' = 90^0$ und

$$L_0 = 2 \mu_s P_{1s} U = 2 C_s \Phi_s \frac{\eta U^2}{\psi} \; ^{*)} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

*) μ_s bezogen auf die stabilisierende Kraft.

mit

$$\Phi_s = \frac{P_{1s} \psi^2}{\eta U} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Der Wert $L_1/L_0 = \frac{C' \Phi' + C'' \Phi''}{2 C_s \Phi_s}$ (Zahlentafel 1) zeigt, in wie weiten Grenzen diese Vereinfachung zulässig ist. Aus $L_0 = 2 \mu_s P_{1s} U$ folgt mit $P_{1s} = p_s d$:

$$L_1 \approx L_0 = \mu_s p_s \omega d^2 \text{ oder}$$

$$\frac{L_1}{p_s \omega d^2} = \mu_s = C_s \psi \quad (8)$$

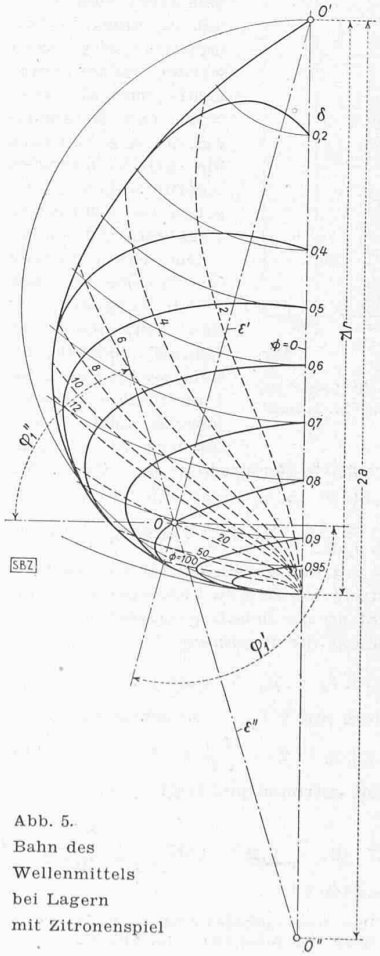

Abb. 5. Bahn des Wellenmittels bei Lagern mit Zitronenspiel

Wie Abb. 6 zeigt, ist $L_1/p_s \omega d^2$ in weiten Grenzen unabhängig von der relativen Beilagedicke δ. Die Reibleistung nimmt deshalb (bei gegebenen Abmessungen und bei unveränderter Drehzahl) proportional mit der stabilisierenden Pressung p_s zu. Aus der Definitionsgleichung (7) folgt das relative Lagerspiel:

$$\psi = \sqrt{\frac{\Phi_s}{2}} \sqrt{\frac{\eta \omega}{p_s}} \quad (7a)$$

Da Φ_s in Funktion von δ (für $P_1 = 0$ und $\varepsilon = \delta$) bekannt ist, kann aus dieser Gleichung für einen gewählten Wert $\eta \omega/p_s$ die relative Beilagedicke δ bei einem angenommenen Lagerspiel berechnet werden (Abb. 7). Die Grösse der für den ruhigen Lauf notwendigen Pressung p_s hängt von der Sorgfalt der Ausbalancierung ab und kann nur durch die Erfahrung bestimmt werden. Bei einem bestimmten Wert von $\eta \omega/p_s$ sind verschiedene Ausführungen für ψ und δ möglich, die in Bezug auf die Reibzahl (und für unendlichbreite Lager) alle gleichwertig sind. Je kleiner p_s sein

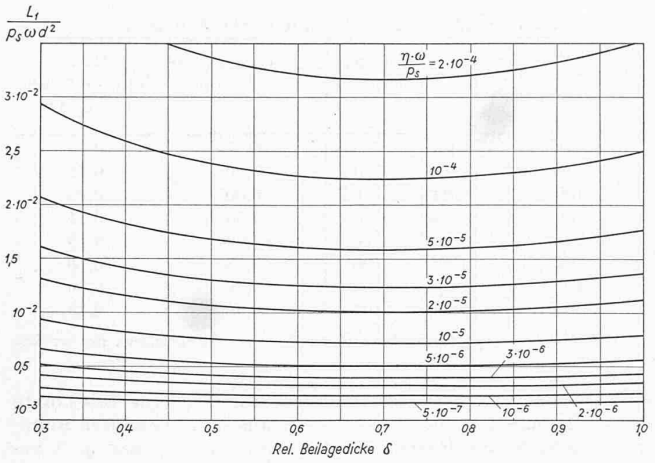

Abb. 6. Reibzahl und Reibleistung L pro Breiteneinheit für Lager mit Zitronenspiel, in Abhängigkeit der relativen Beilagedicke $\delta = a/\Delta z$

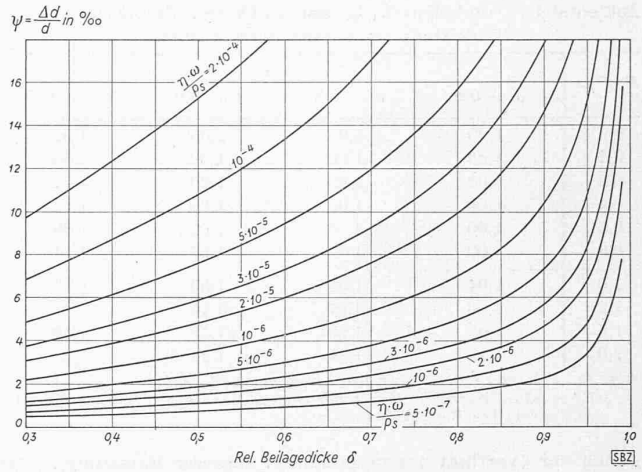

Abb. 7. Zur Berechnung des Stabilisierungsdruckes p_s für Lager mit Zitronenspiel

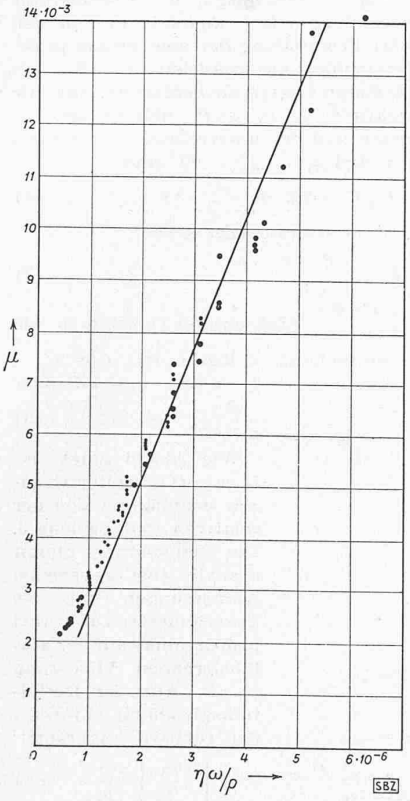

Abb. 8. Vergleich der Theorie für Lager mit Zitronenspiel mit den Versuchen von Rumpf

darf, umso kleiner ist auch die im Lager erzeugte Wärme. Eine grosse Beilagedicke δ gibt (nach Gl. 4) einen kleinen Wert für die kleinste Spalthöhe h_0, erfordert also genaue Herstellung. Man wird in der Praxis im allgemeinen zuerst versuchen, mit einer *kleinen* Beilagedicke auszukommen. Läuft der Zapfen noch unruhig, so sollte zunächst die Ausbalancierung verbessert werden. Wenn dies nicht mehr möglich ist, muss die Beilagedicke vergrössert werden, bis der ruhige Lauf erreicht wird. Nach den Erfahrungen der A. E. G. liegen die gebräuchlichsten Ausführungen zwischen $\delta = 0{,}70$ bis $0{,}80$ (Zahlentafel 2, S. 165).

Die Brauchbarkeit der Theorie soll nun durch Vergleich mit den Versuchen von Rumpf[2]) geprüft werden, dessen Versuchslager folgende Abmessungen hatte: $d = 220$ mm, $b = 300$ mm, Lagerspiel $\psi = 1{,}727\,‰$, relative Beilagedicke $\delta = 0{,}487$. Mit diesen Werten folgt aus Abb. 7: $\eta\,\omega/p_s = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$, und mit diesem Wert aus Abb. 6: $\frac{L_1}{\omega\, p_s\, d^2} = 3{,}94 \cdot 10^{-3}$ oder $L_1 = 5840\ U^2$

Beim Vergleich der Theorie mit den Versuchen ist zu beachten, dass Abb. 6 für die Reibleistung am *Zapfen* gemessen gilt, während Rumpf das Reibmoment an der *Schale* gemessen hat. Zwischen beiden Reibungen besteht die Beziehung[9]):

$$\mu_z - \frac{l}{r} \sin\beta = \mu_L = \mu_z - \varepsilon\,\psi \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Multipliziert man beide Seiten mit $2\,P_{1s}\,U$, so erhält man:

$$L_{1\,\text{Schale}} = L_{1\,\text{Zapfen}} - 2\,\psi\,\varepsilon\,\frac{P_{1s}}{\eta\,U}\,\eta\,U^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Für das unbelastete Lager mit Zitronenspiel folgt[10]) mit $\varepsilon = \delta = 0{,}487$: $\beta = 33{,}1^0$, also

$$L_{1\,\text{Schale}} = 5840\,\eta\,U^2 - 2 \cdot 1{,}727 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}487 \cdot 0{,}547 \cdot \frac{2}{2{,}7 \cdot 10^{-6}}\,\eta\,U^2$$
$$= 5160\,\eta\,U^2$$

[9]) *ten Bosch.* Vorlesungen über Maschinenelemente, Gl. 42, 73.
[10]) *ten Bosch.* Vorlesungen über Maschinenelemente, Abb. 42, 25.

Zum Vergleich mit den Versuchen von Rumpf muss in dieser Reibleistung (die von der äusseren Belastung weitgehend unabhängig ist) doch die Reibzahl μ (bezogen auf P_1) eingeführt werden:

$$L_{1\,\text{Schale}} = \mu\,P_1\,U = \mu\,p\,d\,U = 5160\,\eta\,U^2$$

oder $\mu = 2580\,\eta\,\omega/p$. Der geradlinige Verlauf dieser Gleichung ist in Abb. 8 mit den Versuchspunkten von Rumpf verglichen und zeigt die ausserordentlich gute Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch.

4. Die endliche Breite der Gleitfläche

Alle wirklichen Gleitflächen haben eine endliche Breite, sodass die Theorie für alle *praktischen* Anwendungen noch ergänzt werden muss, indem auch das seitliche Abfliessen des Oeles berücksichtigt wird. Das Lager mit Zitronenspiel bildet eine Ausnahme, weil dafür die Reibleistung pro Breiteneinheit konstant ist. Die Bedingung, dass die totale Flüssigkeitsmenge, die in der X- und Z-Richtung strömt, im Beharrungszustand konstant sein muss, führt zu der bekannten partiellen Differentialgleichung für die Druckverteilung:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial 2^2} + \frac{3}{h}\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{d\,h}{d\,x} + \frac{b\,\eta\,U}{h^3}\,\frac{d\,h}{d\,x} = 0 \quad . \quad (11)$$

Die sehr umständlichen Zahlenrechnungen, die die Lösung dieser Gleichung erfordert, wurden bisher nur für die schwach geneigte Platte ($m = 1$ und 2) und für verschiedene Werte von b/a durchgeführt (Michell, Martin, Boswall). Aus diesen Lösungen ging hervor, dass *bei gleicher relativer Lage der Gleitflächen* (z. B. bei gleichem Wert von m, bezw. h_1/h_0) die Tragfähigkeit, infolge des seitlichen Abfliessens bei endlicher Breite, vermindert wird. Setzt man analog wie für die unendlich breite Gleitfläche:

$$P_{1e} = \frac{\eta\,U\,a^2}{h_0^{\,2}}\ \Phi_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

so kann die Verminderung der Tragfähigkeit durch einen Faktor f_b

$$f_b = P_1/P_{1e} = \Phi/\Phi_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

berücksichtigt werden. Die kleinste Schmierschichtdicke bleibt (wie vorausgesetzt) unverändert, weil

$$h_0/a = \sqrt{\Phi_e}\,\sqrt{\frac{\eta\,U}{P_{1e}}} = \sqrt{\Phi}\,\sqrt{\frac{\eta\,U}{P_1}} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Zahlentafel 3: f_b- und K-Werte für die geneigte Platte (nach Boswall)

	b/a		4	2	1,33	1	0,8	0,667	0,5
$m = 1$	f_b	1	1,19	1,44	1,79	2,305	2,91	3,585	5,41
	$\sqrt{f_b}$	1	1,09	1,20	1,338	2,518	1,707	1,893	2,325
$h_1/h_0 = 2$	K_e	1,94	2,08	2,25	2,48	2,76	3,07	3,39	4,13
	$K_\infty \sqrt{f_b}$	1,94	2,115	2,325	2,595	2,945	3,31	3,675	4,51
	Fehler, %	0	1,6	3,2	4,4	6,3	7,3	7,8	8,4
$m = 2$	f_b	1	1,18	1,41	1,74	2,18	2,74	3,38	4,83
	$\sqrt{f_b}$	1	1,086	1,187	1,318	1,477	1,655	1,838	2,198
$h_1/h_0 = 3$	K_e	1,82	1,91	2,02	2,18	2,38	2,60	2,83	3,32
	$K_\infty \sqrt{f_b}$	1,82	1,976	2,16	2,40	2,685	3,01	3,345	4,00
	Fehler, %	0	3,3	6,5	9,2	11,4	13,6	15,4	17,0

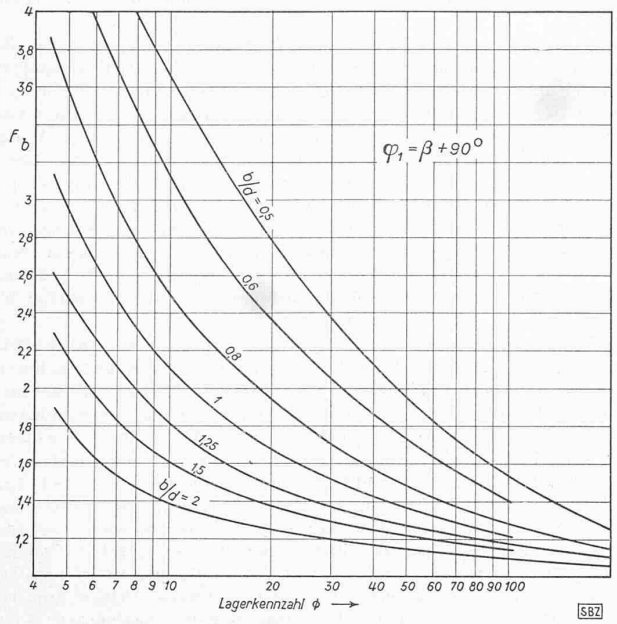

Abb. 9. Kurven für die Werte f_b

ist. Auch die Reibzahl μ_e kann in gleicher Form geschrieben werden, wie bei unendlicher Breite:

$$\mu_e = K_e \sqrt{\frac{\eta U}{P_{1e}}} = C_e\, h_0/a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Φ_e- (bezw. f_b-), sowie die K_e- und C_e-Werte sind aus den vorliegenden Lösungen (geneigte Platte, $m = 1$ und 2) bekannt (Zahlentafel 3). Dabei ist zu beachten, dass

$$f_b = F\,(b/a,\ h_1/h_0,\ \text{Spaltform}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ist, sodass die Zahlenwerte weder für andere Spaltformen noch für andere Spalthöhenverhältnisse verwendet werden können.

Die kürzlich von Frössel und von Bauer berechneten Zahlenwerte für den parabolischen Vollzylinder bedeuten deshalb eine praktisch sehr wertvolle Ergänzung. Bei der Vielseitigkeit der möglichen und ausgeführten Spaltformen ist dem Ingenieur durch diese wenigen Lösungen doch nur teilweise geholfen. Bei dieser Sachlage scheint eine einfache und allgemein (d. h. für alle Spaltformen) gültige Näherungslösung auch heute noch für den Konstrukteur äusserst wertvoll. Sie beruht auf der Feststellung, dass die Reibzahl bei flüssiger Reibung eine geometrische Grösse ist. Bei gleicher Spaltform und gleichem Wert von h_0/a ist die Reibzahl (bezw. die Reibkraft) gleich, gleichgültig durch welche Mittel die gleiche relative Lage der Gleitflächen erreicht wird. Selbstverständlich gilt diese Schlussfolgerung genau nur unter Voraussetzung gleicher Flüssigkeitsströmungen im Spalt, also für unendlichbreite Gleitflächen. Sieht man aber für eine Näherungslösung vom seitlichen Abfliessen bei endlicher Breite ab, so wäre (bei gleicher relativer Lage) die Reibkraft R_1 unabhängig von der Breite der Gleitfläche, während die Tragkraft im Verhältnis f_b kleiner wird. Für die Gleitfläche mit endlicher Breite ist also:

$$\mu_e = \frac{R_{1e}}{P_{1e}} = \frac{R_{1\infty}}{P_{1\infty}/f_b} = \mu_\infty f_b = K_\infty \sqrt{\frac{\eta U}{P_{1\infty}}}\, f_b = K_\infty \sqrt{f_b}\, \sqrt{\frac{\eta U}{P_{1e}}} \quad (17)$$

oder mit

$$C_\infty = \frac{K_\infty}{\sqrt{\Phi_\infty}} = \frac{K_\infty}{\sqrt{f_b}} \sqrt{\frac{\eta U}{P_{1e}}}:$$

$$\mu_e = C_\infty f_b\, \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Zahlentafel 4: Werte $\frac{K_\infty \sqrt{f_b}}{K_e}$ für den parabolischen Vollzylinder (nach Frössel)

b/a	$h_1/h_0 = 3{,}9$	$h_1/h_0 = 6{,}7$	$h_1/h_0 = 17{,}5$	$h_1/h_0 = 31$
0,5	1,11	1,19	1,26	1,25
0,75	1,11	1,15	1,19	1,17
1,00	1,10	1,13	1,14	1,12
1,25	1,09	1,11	1,11	1,09
1,50	1,08	1,09	1,09	1,07
1,75	1,07	1,08	1,08	1,06
2,00	1,06	1,07	1,07	1,05
2,25	1,05	1,06	1,06	1,05

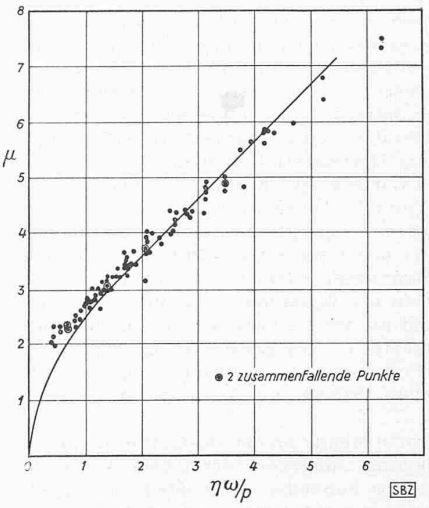

Abb. 10. Vergleich der Theorie (ausgezogene Linie = Gl. 19a) mit den Messungen von Rumpf

Die Brauchbarkeit dieser Näherungslösung kann durch Vergleich mit den vorliegenden mathematischen Lösungen festgestellt werden. Wie die Zahlentafeln 3 und 4 für die geneigte Platte und für den parabolischen Vollzylinder zeigen, gibt die Näherungslösung nach Gl. 17 immer etwas zu grosse Reibzahlen, was übrigens im Interesse der Zuverlässigkeit unserer Rechnungen liegt. Der Fehler nimmt, wie zu erwarten war, für schmale Gleitflächen (b/a kleiner als 0,8) rasch zu.

Aus den vorliegenden Lösungen scheint hervorzugehen, dass f_b hauptsächlich durch die beiden Faktoren b/a und h_1/h_0 festgelegt ist und dass der Einfluss der Spaltform (geneigte oder parabolische Gleitfläche) gering ist. Man kann deshalb die gleichen f_b-Werte auf alle Spaltformen anwenden und zwar auch auf die stark gekrümmten, weil das seitliche Abfliessen durch die Krümmung nicht beeinflusst wird. Die in Abb. 9 dargestellten f_b-Werte gelten für den parabolischen Vollzylinder (nach der Berechnung von Frössel); sie weichen nur wenig von den Werten von Bauer ab.

Die Gleichungen 17 und 18 gelten unter der Voraussetzung, dass die Oelaustrittstelle φ_2 mit dem Ende des Druckberges $-\varphi^*$ zusammenfällt. Diese Voraussetzung ist bei den praktischen Ausführungen nur selten erfüllt, da die Austrittsöffnung sehr oft in die horizontale Trennfuge des Lagers gelegt wird. Dadurch erhöht sich die Reibkraft um den Betrag $R_1' = r \int_{-\varphi^*}^{\varphi_2} \tau_0\, d\varphi$, der leicht berechnet werden kann, weil im unbelasteten Oelspalt eine geradlinige Geschwindigkeitsverteilung vorhanden, also $\tau_0 = \eta\, U/h$ ist. Die Reibzahl erhöht sich deshalb um den Betrag

$$\mu' = K' \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} \text{ bezw. } \mu' = C'\psi$$

sodass unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Reibung

$$\mu = (K \sqrt{f_b} + K') \sqrt{\frac{\eta U}{P_1}} = (C f_b + C')\, \psi\,. \quad (19\,\text{a, b})$$

Wie gut die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung ist, zeigt Abb. 10, in der Gl. 19a (für $\varphi_1 = \beta + 90$ und φ_2 horizontal) mit den Messungen von Rumpf verglichen ist. Der Konstrukteur kann deshalb volles Vertrauen zur Theorie haben, wenn er nur dafür sorgt, dass die Voraussetzungen der Theorie bei der Ausführung erfüllt werden.

Dass die Rumpf'sche Gleichung nur für seine Randbedingungen gilt und nicht auf andere Verhältnisse angewandt werden darf, zeigen recht deutlich die Versuche von Clayton und Jakeman[11]), die ihre Versuchsergebnisse (in voller Uebereinstimmung mit der Theorie) durch ein Strahlenbüschel darstellen.

Vom Studentenheim an der E. T. H.

Auszug aus dem Jahresbericht 1942/43

Die laufenden Geschäfte besorgte der Präsident der Betriebskommission, Dr. H. Bosshardt, zusammen mit seinem Mitarbeiter, cand. phil. O. Clavuot. Der Vorstand unternahm im Berichtjahre eine Finanzaktion, vor allem, um rückständige laufende Schulden bezahlen und eine ausserordentliche Tilgung vom Darlehen bei der Schweiz. Eidgenossenschaft vornehmen zu können. Durch die freundliche Vermittlung des Vizepräsidenten, Gen.-Dir. E. Dübi, überwiesen schenkungsweise der Arbeitgeberverband schweiz. Maschinen- und Metallindustrieller 10 000 Fr. und der Verein schweiz. Maschinenindustrieller 7500 Fr. Diese beiden Schenkungen seien auch an dieser Stelle herzlich verdankt.

Die Gesamtzahl der Gäste, die im Studentenheim eine Konsumation eingenommen haben, betrug 449 225, was einer Zu-

[11]) *D. Clayton* and *C. Jakeman*, Proc. Mech. Engrs. (London (134/1936/III, S. 437/506. *C. Jakeman* and *A. Fogg*, Gen. Disc. on lubrication, London 1937.