Anmerkung zu dem vorangehenden Variationsproblem

Autor(en): **Grossmann, K.H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **121/122 (1943)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-53127

Anmerkung zu dem vorangehenden Variationsproblem

In gröbsten Zügen sei skizziert, wie man, der in der «Variationsrechnung» von Constantin Carathéodory[6]) entwickelten Methode folgend, zu den Differentialgleichungen (II) von Levi-Civita gelangen kann.

1. Die Aufgabe

Der Anschaulichkeit halber beschränken wir uns auf das ebene Problem. Zur Zeit $t = 0$ starte das Flugzeug in dem Punkt 0 einer waagrechten Ebene π zu einem Horizontalflug, mit einem andern Punkt C von π als Ziel. Die horizontale Windgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ sei als Funktion der Zeit t und der Punkte P von π bekannt: $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(P, t)$. In Cartesischen Koordinaten: $0 = (0, 0)$, $C = (c_1, c_2)$, $w_i = w_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$.

Es empfiehlt sich, das ebene Koordinatensystem $0; x_1, x_2$ durch Hinzufügen einer t-Axe zu einem räumlichen, $0; x_1, x_2, t$, zu ergänzen. t sei der Zeitpunkt, in dem das Flugzeug auf einer die Punkte 0 und C in π verbindenden Bahn b den Punkt $P = (x_1, x_2, 0)$ erreicht; Q der im Abstand t über P gelegene Punkt (x_1, x_2, t); dann versinnlicht die durch Funktionen $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2$, gegebene Verbindungskurve q der Punkte Q den Fahrplan, nach dem ihre Projektion b durchflogen wird. Unsere Kurven q steigen also, von 0 ausgehend, über der Ebene π an, um sämtlich über dem Punkte C, d. h. auf der Geraden g: $(x_1 = c_1, x_2 = c_2)$ zu endigen, in Punkten also, die sich nur durch ihren Abstand T von π, der Durchlaufzeit, voneinander unterscheiden. Unter den möglichen Kurven q gilt es jene, nennen wir sie k, von kleinstem Abstand T des Endpunkts zu ermitteln. Jede von 0 ausgehende Vergleichskurve q ist durch ein Gesetz

$$\dot{x}_i = \varrho_i(x_j, t), \qquad i = 1, 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eindeutig gekennzeichnet, nach dem ihre Tangente variiert. «Möglich» ist die Kurve jedoch nur dann, wenn dieses Gesetz mit der Bedingung

$$G(x_j, \dot{x}_j, t) \equiv (\dot{x}_1 - w_1(x_j, t))^2 + (\dot{x}_2 - w_2(x_j, t)) - V^2 = 0 \quad (2)$$

verträglich ist. Jeder der Bedingung (2) genügende Werte-Satz $(x_j, \dot{x}_j, t)$ heisse ein «mögliches Linienelement». Unter den möglichen Kurven q sei die gesuchte k durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_j, t), \qquad i = 1, 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

charakterisiert. Mit der Auffindung der Funktionen φ_i wäre unsere Aufgabe gelöst.

2. Erste Umformung des Problems

Carathéodory operiert mit einer Hilfsfunktion $S(x_j, t)$ von folgenden Eigenschaften:

A. Unter den Flächen $S(x_j, t) = \text{const.}$ enthalte die der Konstanten $\overset{(0)}{S}$ zugeordnete den Punkt 0, die zu der Konstanten $\overset{(1)}{S}$ gehörige die Gerade g. Das heisst:

$$S(0, 0, 0) = \overset{(0)}{S} \qquad S(c_1, c_2, t) = \overset{(1)}{S} \qquad t > 0 \quad (4)$$

B. Betrachten wir die folgende Funktion der «möglichen Linienelemente» $(x_j, \dot{x}_j, t)$:

$$F(x_j, \dot{x}_j, t) = 1 - S_t - \sum_{j=1}^{2} S_{x_j} \dot{x}_j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Bei gegebenem Wertetripel (x_1, x_2, t) hängt F noch von dem der Beschränkung (2) unterworfenen Wertepaar $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ ab. Unsere weitere Annahme über die Hilfsfunktion S sei nun diese: Bei einer bestimmten, durch ein gewisses Funktionenpaar (1) ausgedrückten Wahl des «möglichen» Wertepaares $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ werde

$$F(x_j, \varrho_j, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Für alle andern möglichen Paare $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ hingegen sei

$$F(x_j, \dot{x}_j, t) > 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Der Sinn dieser Annahme erhellt aus der Bildung des Linien-Integrals von F längs einer möglichen Kurve q:

$$\int_q F(x_j, \dot{x}_j, t)\, dt = \int_q 1\, dt - \int_q \frac{dS}{dt}\, dt = T(q) - \overset{(1)}{S} + \overset{(0)}{S} \quad (8)$$

Wegen (7) ist sonach $T(q) > \overset{(1)}{S} - \overset{(0)}{S}$; es sei denn, q koinzidiere mit der durch (1) definierten Kurve h. Gemäss (6) ist nämlich $T(h) = \overset{(1)}{S} - \overset{(0)}{S}$, mithin

$$T(h) < T(q)$$

Die ausgezeichnete Kurve h ist also keine andere als unsere gesuchte Kurve k von kleinster Durchlaufzeit T, und die sie beschreibenden Funktionen $\varrho_j(x_j, t)$ sind mit den gesuchten Funktionen $\varphi_i(x_j, t)$ identisch.

Die Existenz einer Funktion S von den Eigenschaften A und B vorausgesetzt, ist das zu einem gegebenen Tripel (x_1, x_2, t) gehörige Paar $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (\varphi_1, \varphi_2)$ somit jenes, das, unter der Nebenbedingung (2),

α) der Funktion F ein Minimum, und zwar

β) das Minimum null erteilt.

Aus α) folgt bekanntlich, dass für eine Zahl ω die partiellen Ableitungen nach $\dot{x}_1$ und $\dot{x}_2$ der Funktion $F(x_j, \dot{x}_j, t) + \frac{\omega}{2} G \cdot (x_j, \dot{x}_j, t)$ für $\dot{x}_i = \varphi_i(x_j, t)$ verschwinden, dass also, bei Einführung der Funktion

$$M(x_k, \dot{x}_k, t, \omega) = 1 + \frac{\omega}{2} G(x_k, \dot{x}_k, t) . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$M_{\dot{x}_i}(x_k, \varphi_k, t, \omega) = \omega(\varphi_i - w_i) = S_{x_i} \qquad i = 1, 2 \quad (10)$$

Dies berücksichtigt, bedeutet β):

$$S_t = 1 - \sum_i \varphi_i M_{\dot{x}_i}(x_k, \varphi_k, t, \omega) = 1 - \omega \sum_i \varphi_i (\varphi_i - w_i) \quad (11)$$

Aus (10) und (11) folgt nach (5): $F = \omega \Sigma (\varphi_i - w_i)(\varphi_i - \dot{x}_i)$

Bezeichnet der Vektor $\mathfrak{V}$ mit den Komponenten $\dot{x}_i - w_i$ eine mögliche Eigengeschwindigkeit, insbesondere der Vektor $\mathfrak{V}^*$ mit den Komponenten $\varphi_i - w_i$ die «ausgezeichnete» Eigengeschwindigkeit ($|\mathfrak{V}| = |\mathfrak{V}^*| = V$), so kann man für F auch schreiben: $F = \omega(V^2 - \mathfrak{V}, \mathfrak{V}^*)$. Die Bedingung (7) erheischt somit

$$\omega > 0$$

Bei Kenntnis einer Funktion S könnte man aus den Gleichungen (10), (11) die Zahlen ω, φ_1, φ_2 in Funktion von x_1, x_2, t berechnen. Damit ist unsere Aufgabe dahin umgeformt, eine Funktion von S von den verlangten Eigenschaften zu konstruieren.

3. Zweite Umformung des Problems

Die Kenntnis einer Funktion S ist aber gar nicht nötig; es genügt uns, wenn es eine gibt. Das wird bei Einführung «kanonischer Koordinaten» klar: Setzen wir

$$y_i = M_{\dot{x}_i}(x_k, \dot{x}_k, t, \omega) = \omega(\dot{x}_i - w_i) \qquad i = 1, 2 \quad (12)$$

so lassen sich aus den drei Gleichungen (2), (12) die Variablen $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, ω in Funktion der x_k, y_k, t berechnen:

$$\dot{x}_i = \psi_i(x_k, y_k, t) = w_i + V \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \qquad i = 1, 2 \quad (13)$$

$$\omega = \chi(y_k, t) = \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Aus (13) folgt übrigens für jede mögliche Kurve q:

$$\sum_k y_k \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Auf der Kurve k ist nach (10):

$$y_i = S_{x_i} \qquad i = 1, 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und nach (11):

$$S_t = 1 - \Sigma y_i \psi_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Bei Einführung der «Hamilton-Funktion»

$$H(x_k, y_k, t) = -1 + \Sigma y_i \psi_i(x_k, y_k, t) = -1 + \\ + \Sigma\left(y_i w_i + V \frac{y_i^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\right) \quad (18)$$

folgt aus (16) und (17), dass S die «Hamilton-Jacobi'sche-Differentialgleichung»

$$S_t(x_k, t) + H(x_k, S_{x_k}, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

erfüllen muss. Auf den Nachweis — das Fundament unserer Ueberlegung —, dass es unter deren Lösungen tatsächlich eine solche von den geforderten Eigenschaften gibt, müssen wir hier verzichten. Leiten wir die Hamilton-Funktion (18) partiell nach y_i ab:

$$H_{y_i} = \psi_i + \sum_k y_k \frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}$$

Auf jeder möglichen Kurve q, für die ja (15) gilt, ist mithin

$$\dot{x}_i = H_{y_i} \qquad i = 1, 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Fällt q speziell mit k zusammen, so gilt darum nach (16) ausserdem:

$$\dot{y}_i = \sum_k S_{x_i x_k} H_{y_k} + S_{x_i t}$$

oder, wenn man $S_{x_i t}$ aus (19) berechnet:

$$\dot{y}_i = -H_{x_i} = -\sum_k y_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2 \quad . \quad . \quad (21)$$

Aus den «kanonischen Differentialgleichungen» (20), (21) wäre der Verlauf der Kurve k zu schöpfen; die Hilfsfunktion S ist daraus verschwunden, freilich um den Preis der neu hinzugetretenen Variablen y_i. Diese werden sogleich durch anschaulichere Grössen ersetzt.

---

[6]) Verlag B. G. Teubner 1935. Vergl. insbesondere die unserem Problem gewidmeten §§ 458 bis 460.

4. Gewinnung der Differentialgleichungen von Levi-Civita

Setzen wir mit Levi-Civita

$$\dot{x}_i = w_i + V\alpha_i\,, \qquad i = 1, 2 \quad . \; . \; . \; . \quad (I)$$

wobei von den Komponenten α_i des Vektors $\mathfrak{B}/V$ der «Steuer-Richtung» natürlich

$$\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

gilt, so wird aus (12): $y_i = V\omega\,\alpha_i$ und infolge von (21) und (22):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 \qquad\qquad + \alpha_1 \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= -\Sigma\alpha_k \frac{\partial w_k}{\partial x_1} \\ \dot{\alpha}_2 + \alpha_2 \frac{\dot{\omega}}{\omega} &= -\Sigma\alpha_k \frac{\partial w_k}{\partial x_2} \\ \alpha_1\dot{\alpha}_1 + \alpha_2\dot{\alpha}_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Diesem in $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$, $\dot{\omega}/\omega$ linearen Gleichungssystem die Differentialgleichungen (II) von Levi-Civita zu entnehmen, darf dem Leser überlassen bleiben.

K. H. G.

† Tullio Levi-Civita, 1873 — 1941

Zu Lebzeiten eine Leuchte der internationalen Wissenschaft, mit deren ersten Auszeichnungen bedacht, nach Süd- und Nord-Amerika, West-, Mittel- und Ost-Europa zu Gastvorlesungen berufen, zwei Jahrzehnte lang in Padua, zwei weitere in Rom ein «Strahlungszentrum der modernen Forschungen auf dem Gebiet der mathematischen Physik, der analytischen Mechanik und der mathematischen Analysis, dessen Einfluss noch lange fortfahren wird zu wirken»[1]), Cavaliere dell'ordine civile di Savoia, Mitglied der Päpstlichen Akademie, einer der «höchsten Vertreter des italienischen mathematischen Gedankens in diesem Jahrhundertanfang»[2]), ist Tullio Levi-Civita am schreckerfüllten Ende dieses verheissungsvollen Jahrhundertanfangs nichtsdestoweniger fast unbemerkt erloschen[3]).

Sein um die rationale Naturerkenntnis bemühtes, auf etwa zweihundert Publikationen verteiltes Werk[4]) zu würdigen, ist hier nicht der Ort, wohl aber, daran zuhanden einer wieder den Dauerwerten zugewandten Nachwelt zu erinnern und insbesondere seine Bedeutung auch für die Technik zu betonen. Darum ist dieser Nummer ein kurzer Bericht aus der Feder des Toten vorangestellt, der die Fruchtbarkeit abstrakter Studien bei der Behandlung technischer Fragen der Gegenwart oder Zukunft beleuchtet und zugleich einen Begriff vermittelt von der strengen, gleichsam kristallinen und dabei doch pädagogisch überzeugenden Prägung, die der humane Meister seinen Schriften zu erteilen wusste.

Es sei hier weder von seiner Erforschung der Potentialtheorie oder der Elektrodynamik, noch von seinen hydrodynamischen Arbeiten, noch von seinen Beiträgen zur Himmelsmechanik und zur allgemeinen Relativitätstheorie die Rede; auch die in Zusammenarbeit mit Ugo Amaldi geschaffenen «Lezioni di Meccanica Razionale», ein fundamentales Werk von klassischer Vollendung, seien nur erwähnt. Dagegen sei der Anlass wahrgenommen, auf das gleichfalls mit Amaldi zusammen verfasste «Compendio di Meccanica Razionale»[5]) nachdrücklich hinzuweisen, das in gedrängter Fülle das zum guten Teil enthält, wessen ein auf Ein- und Uebersicht bedachter mechanischer Ingenieur zur geistigen Beherrschung seines Arbeitsfeldes bedarf. Der erste Teil, die Kinematik, die Prinzipien und die Statik betreffend, ist ein erwogenes Extrakt des ersten Bandes der Lezioni, während von deren zweitem Band in den zweiten Teil des Compendio nur die für die Technik wichtigeren Partien der Dynamik aufgenommen sind, dafür aber ein neuer Abriss über die Mechanik der kontinuierlichen Systeme. Die stoffliche Konzentration hat freilich eine grosse Sparsamkeit an erläuternden Beispielen und eine leider bloss fragmentarische Behandlung der Elastizitätstheorie bedingt; die Hydrodynamik endigt mit einer selten schönen Herleitung der Helmholtz'schen Wirbelsätze, ohne Behandlung der Impulssätze und ihrer so wichtigen Anwendungen (Tragflügelauftrieb!).

Ein Buch wie das Compendio ist das Ergebnis jahrzehntelanger analytisch-synthetischer Gedankenarbeit, des Willens, den Kern der Dinge von der Spreu zu scheiden und die logische Struktur der äusseren Welt zu erschliessen. Dass es bei einer solchen umgestaltenden Assimilation des säkularen Stoffes nicht ohne Schlüsse und Feststellungen abgeht, die kritischen Widerspruch wecken[6]), ist eine unvermeidliche Zubehör jeder lebendigen Tätigkeit und vermag den durchgehenden Eindruck bezwingender limpidezza nicht zu schmälern, deren Geheimnis wohl auf dem vollendeten Gleichgewicht intuitiver Anschauung und mathematischer Strenge beruht. «Esempio mirabile di sobrietà e di precisione» — diese Kennzeichnung der Mechanik von Kirchhoff in einer der reizvollen, den Vätern dieser Wissenschaft gewidmeten biographischen Fussnoten gilt mit Fug auch für die Mechanik Levi-Civita's.

Die didaktischen Fähigkeiten dieses zierlichen, lebhaften Mechanikprofessors, die Wirkung seines als «leicht und eindringlich»[2]) geschilderten Wortes auf Generationen junger Ingenieure müssen ausserordentlich gewesen sein. Die ihn erfüllende Leidenschaft, zu lehren und Licht zu verbreiten, war der Ausfluss einer seltenen (auch mir bewiesenen) Liebenswürdigkeit, doppelt schätzbar an einem so selten scharfen Geist. «Non visse che per la scienza e per la scuola. Poco si curò di quanto avveniva intorno a lui. Ebbe animo dolce e buonissimo; fu per gli allievi suoi più che un padre»[2]).

K. H. Grossmann

[1]) Umberto Cisotti in den «Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere». Parte gen. e Atti uff. Vol. LXXV, fasc. I, 1941–42.

[2]) Carlo Somigliana, ebenda.

[3]) Am 29. Dezember 1941. Geboren war er am 29. März 1873.

[4]) Verzeichnis im «Annuario della Pontifica Accademia delle Scienze».

[5]) Bologna 1938, Zanichelli, 2 Bände.

[6]) Ich nenne im I. Teil die m. E. anfechtbare Beweisführung der Nummern 5 bis 8 des XII. Kapitels, ferner die m. E. auf zeitunabhängige Bedingungen beschränkte Gültigkeit von Kap. XIV, Nr. 6.

Das Institut für Geophysik der E. T. H. in Zürich

Von Prof. Dr. F. GASSMANN, Zürich

Gründung. Bei Anlass der Einführung der angewandten Geophysik als Diplomwahlfach für Vermessungsingenieure wurde im Jahre 1934 an der E. T. H., zunächst in ganz bescheidenem Rahmen, das Institut für Geophysik gegründet. Wenige Jahre später wurde an der Abteilung für Naturwissenschaften die Studienrichtung für Ingenieur-Geologen und Ingenieur-Petrographen geschaffen. Im Ausbildungsplan dieser Studienrichtung wurde auch die Geophysik mit einem dreisemestrigen Kursus aufgenommen. Angesichts der erhöhten Bedeutung, die dieses Lehrfach dadurch an der E. T. H. erhielt und der Zunahme der praktischen Anwendung geophysikalischer Methoden in der Schweiz errichtete der Bundesrat letztes Jahr an der E. T. H. eine a. o. Professur für Geophysik und leitete durch Gewährung entsprechender Kredite einen Ausbau des Institutes für Geophysik in die Wege.

Zweck. Das ausgebaute Institut hat als Lehr- und Forschungsinstitut die Aufgabe, der Ausbildung der Studierenden zu dienen, nicht nur durch Vermittlung theoretischer Kenntnisse, sondern auch der Fähigkeit, die geophysikalischen Methoden auf praktische Probleme anzuwenden und die zugehörigen Apparaturen zu handhaben. Das Institut ist mit feldtüchtigen Instrumenten ausgerüstet, die den Studierenden für Uebungszwecke zur Verfügung stehen (Abb. 1). Der Ausbau setzt darüber hinaus das Institut in den Stand, geophysikalische Untersuchungen über Probleme durchzuführen, die ihm aus der Praxis gestellt werden, sowie als Beratungsstelle in geophysikalischen Fragen aller Art zu dienen.

Unterricht. Das minimale Programm für den Unterricht in Geophysik an den Abteilungen für Vermessungsingenieure, Ingenieur-Geologen und Ingenieur-Petrographen erstreckt sich über das 4., 5. und 6. Studiensemester und umfasst folgende, je ein Semester dauernde Kurse: Mathematisch-physikalischer Vorkurs zur Geophysik (wöchentlich 2 St. Vorlesung für Geologen und Petrographen), Allgemeine Geophysik (wöchentlich 2 St. Vorlesung), Geophysikalische Uebungen (wöchentlich 3 St.), Geophysikalisches Praktikum (1 Woche zusammenhängend im

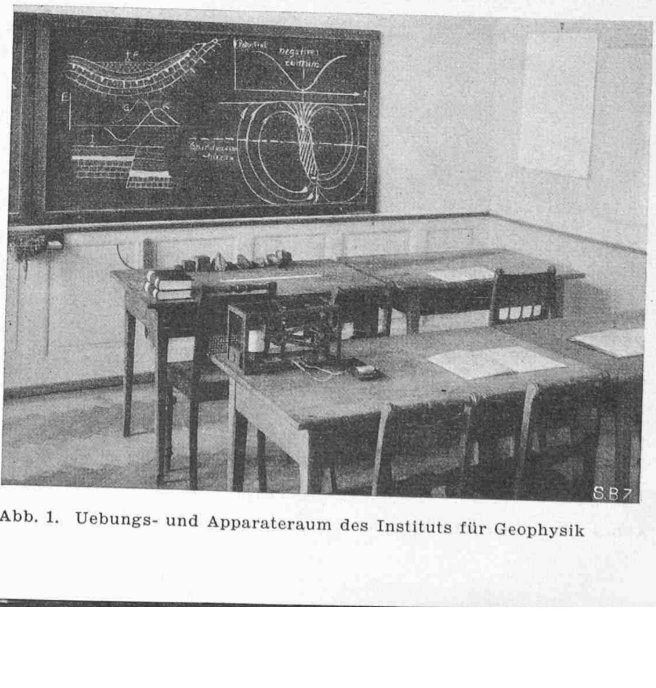

Abb. 1. Uebungs- und Apparateraum des Instituts für Geophysik