Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 121/122 (1943)
Heft: 25

Artikel: Beitrag zur Berechnung des kontinuirlichen, geknickten Balkenzuges
Autor: Perl, Heinrich
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53114

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zusammenfassung

Es gab eine Zeit, da musste sich die Wissenschaft ihren Raum innerhalb einer mehr oder weniger christlich gläubigen Welt erkämpfen. Heute aber geht es darum, in einer Welt, deren Glaubensgrundlagen erschüttert sind, und die deshalb der Barbarei und der Unmenschlichkeit zu verfallen droht, zu den Grundlagen aller Kultur zurückzukehren, die kritischer Prüfung an den Masstäben, die für eine sittliche Kultur entscheidend sind, standhalten. Unsere Kultur, und mit ihr unsere wissenschaftliche Forschung, kann nur gedeihen in einem Sinnganzen, das auf Gemeinschaft in Freiheit angelegt ist, d. h. aber in dem Sinnganzen, wie es uns der christliche Glaube zeigt. Die Zeiten sind vorbei, wo die Forschung ihre Freiheit einem engherzigen und machtgierigen Kirchenglauben abringen musste. Heute dankt ihr die christliche Gemeinde im Namen des rechten, wahren Glaubens für die Revision des Glaubensbegriffes, zu der die wissenschaftliche Forschung sie nötigte. Der Feind der Wissenschaft steht heute auf einer anderen Seite. Ist die Kirche als Sachwalterin des Glaubens nicht ohne Schuld an jenem unglücklichen «entweder-oder», so ist doch heute die grössere Schuld da, wo im Namen der Wissenschaft dem Glauben der Krieg erklärt wird, ohne zu bedenken, dass man damit der Wissenschaft selbst die Wurzeln abschneidet.

Beitrag zur Berechnung des kontinuierlichen, geknickten Balkenzuges

Von Dipl. Ing. HEINRICH PERL, Ingenieurbureau R. Hunger, Chur

Geknickte, kontinuierliche Träger kommen im Bauwesen ziemlich oft vor, sowohl im Hoch- als auch im Tiefbau. Man führt sie aus in Eisen und Eisenbeton als Balkonträger, als Unterzüge, als Kranzträger von Wassertürmen, Gasbehältern und Kühltürmen usw. Bei Eisenbetonbrücken bilden meistens Haupt- und Endquerträger geschlossene Stabzüge, die stets als ganzes Gebilde wirken (s. unten 1. Beispiel). In allen diesen Fällen treten infolge der äusseren Lasten Torsionsmomente auf, denen Rechnung getragen werden sollte, weil sie besonders bei Eisenbeton-Konstruktionen Anlass zu Rissbildungen geben. Auch der Verlauf der Biegungsmomente weicht sehr stark ab gegenüber ihrem Verlauf beim gestreckten Balken.

In der folgenden Untersuchung wird vorausgesetzt, dass alle Stäbe geradlinig sind und in einer Ebene, der Systemebene, liegen, dass die Stabquerschnitte innerhalb der Stablänge konstant und inbezug auf die normal zur Systemebene stehende Schwer-Axe des Querschnittes symmetrisch sind. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass die Stäbe in den Knotenpunkten biegungs- und torsionsfest miteinander verbunden sind, dass alle Stablasten und die Auflagerkräfte die Stabaxen schneiden und normal zur Systemebene stehen und schliesslich, dass das System in den Knickpunkten unnachgiebige Lager habe.

Der gewöhnliche kontinuierliche Balken ist ein Spezialfall des beschriebenen Systems (Abb. 1), der durch $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdot = 0$ charakterisiert ist. Er kann zum Unterschied vom allgemeinen, geknickten Stabzug als der gestreckte Stabzug bezeichnet werden. In statischer und elastischer Hinsicht unterscheidet sich der geknickte Stabzug ganz wesentlich vom gestreckten. Er ist ein unter parallel gerichteten Kräften stehendes räumliches System, das zur Sicherung der Stabilität dreier Auflagerkräfte bedarf und in jedem Querschnitt biegungs- und torsionsfest sein muss. Ein n-stäbiger, geknickter Stabzug mit Kugellagern in den Endpunkten des Stabzuges ist $n - 2$ fach statisch unbestimmt, der entsprechende gestreckte Stabzug $n - 1$ fach. Ein geschlossener Stabzug (Abb. 2) mit n Stäben ist äusserlich $n - 3$ und innerlich 3, im Ganzen also n fach statisch unbestimmt.

Bezeichnungen:

L_m = Länge des m-ten Stabes, begrenzt durch die Knotenpunkte $m - 1$ und m

α_m = Knickwinkel im Knotenpunkt m, als positiv bezeichnet, wenn er von der Verlängerung des Stabes m rechts drehend zum Stab $m + 1$ führt

X_m = Biegungsmoment am linken Ende des Stabes m

Y_m = Biegungsmoment am rechten Ende des Stabes m

T_m = Torsionsmoment im Stab m

τ'_m = Neigungswinkel der elastischen Linie am linken Ende des Stabes m

τ''_m = Neigungswinkel der elastischen Linie am rechten Ende des Stabes m

ω_m = durch Torsion entstandene Drehwinkel der Stabaxe

I_m = Trägheitsmoment für Biegung; beim Rechteckquerschnitt von der Breite b und der Höhe d: $J = \frac{1}{12} b d^3$

I'_m = Trägheitsmoment für Torsion; beim Rechteckquerschnitt von der Breite b und der Höhe d: $J' = \frac{b^3 d^3}{3{,}6\,(b^2 + d^2)}$

E = Elastizitätsmodul

G = Gleitmodul $\left(\text{für Beton rd.} = \frac{1}{2} E\right)$

I_c = Erweiterungsfaktor mit der Dimension eines Trägheitsmomentes

$$\frac{I_c}{I_m} = c_m\,, \quad \frac{E\,I_c}{G\,I'_m} = r_m$$

Allgemein sind die eingeführten Bezeichnungen aus Abb. 3 ersichtlich. Die Momente sind durch doppeltgefiederte Pfeile dargestellt. Für das gegen den Pfeil schauende Auge bedeutet Linksdrehung die positive Richtung des Momentes.

Ableitung der Elastizitätsgleichungen

Ausser den Querkräften der Stäbe und der Auflagerkraft greifen im Allgemeinen in jedem Knotenpunkt zwei Biegungs- und zwei Torsionsmomente an, die unter sich im Gleichgewicht sein müssen. Stellt man (Abb. 4) diese Momente durch Vektoren dar, so liefern die Komponentengleichungen für die Richtungen T_m und T_{m+1} die einfachen Beziehungen

$$Y_m = -\frac{T_m}{\operatorname{tg} \alpha_m} + \frac{T_{m+1}}{\sin \alpha_m}$$
$$X_{m+1} = -\frac{T_m}{\sin \alpha_m} + \frac{T_{m+1}}{\operatorname{tg} \alpha_m} \qquad \ldots\ldots (1)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Knotenpunkt $m - 1$ würde entsprechend folgen:

$$X_m = -\frac{T_{m-1}}{\sin \alpha_{m-1}} + \frac{T_m}{\operatorname{tg} \alpha_{m-1}}$$

Da, wie vorausgesetzt, alle Kräfte die Stabaxen schneiden, ist das Torsionsmoment eines Stabes auf seiner ganzen Länge konstant. Aus diesem Grunde liegt es nahe, die Torsionsmomente T als statisch überzählige Grössen zu wählen, und für sie ein Gleichungssystem herzuleiten. Sind aus diesem System alle Werte T ermittelt, so können die Stützmomente X und Y mit Hilfe der Beziehungen (1) errechnet werden.

Um ein anschauliches Bild von der elastischen Stellungs-Aenderung eines Knotenpunktes m zu haben, denke man sich einen mit dem Knotenpunkt festverbundenen Stab von der Länge 1, der normal zur Systemebene steht. Verschiebt sich der Endpunkt m' dieses Stabes infolge der Formänderungen der Tragstäbe nach m'', so stellen im Grundriss die Komponenten der Strecke $m' - m''$ nach den Stabrichtungen die Neigungswinkel τ der elastischen Linie dar und die Komponenten normal zu den Stabrichtungen die Torsions- oder Verdrehungswinkel ω (Abb. 5). Es können somit die Torsionswinkel ω durch die Winkel τ wie folgt ausgedrückt werden:

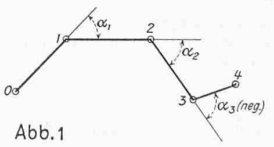
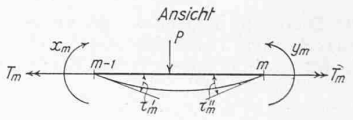


Abb. 1



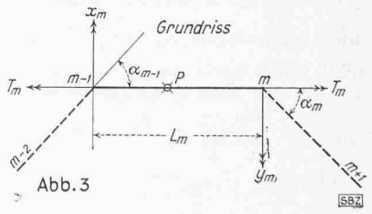


Abb. 3

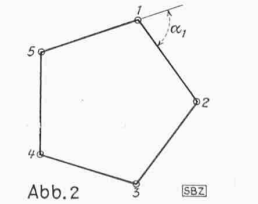


Abb. 2

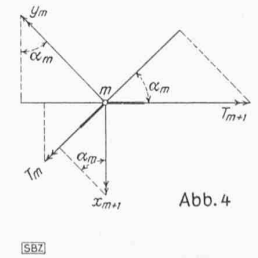


Abb. 4

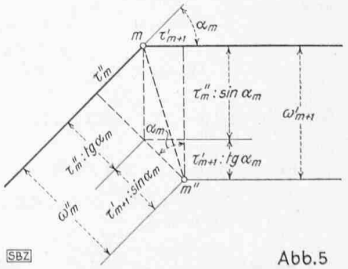


Abb. 5

$$\omega'_m = \frac{\tau''_m}{\operatorname{tg}\alpha_m} + \frac{\tau'_{m+1}}{\sin\alpha_m}$$

$$\omega'_{m+1} = \frac{\tau''_m}{\sin\alpha_m} + \frac{\tau'_{m+1}}{\operatorname{tg}\alpha_m} \quad \ldots \quad (2)$$

und analog

$$\omega'_m = \frac{\tau''_{m-1}}{\sin\alpha_{m-1}} + \frac{\tau'_m}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}}$$

Durch die Abb. 5 sind die als positiv gewählten Richtungen der Drehwinkel gekennzeichnet. Setzt man in den folgenden, für die Winkel des einfachen Balkens gültigen Ausdrücke

$$\tau''_{m-1} = \tau''_{0\,m-1} + \left(\frac{1}{6}X_{m-1} + \frac{1}{3}Y_{m-1}\right)\frac{L_{m-1}}{E\,J_{m-1}}$$

$$\tau'_m = \tau'_{0\,m} + \left(\frac{1}{3}X_m + \frac{1}{6}Y_m\right)\frac{L_m}{E\,J_m}$$

$$\tau''_m = \tau''_{0\,m} + \left(\frac{1}{6}X_m + \frac{1}{3}Y_m\right)\frac{L_m}{E\,J_m}$$

$$\tau'_{m+1} = \tau'_{0\,m+1} + \left(\frac{1}{3}X_{m+1} + \frac{1}{6}Y_{m+1}\right)\frac{L_{m+1}}{E\,J_{m+1}}$$

die Werte für X und Y der Beziehungen (1) ein, so folgt:

$$\tau''_{m-1} = \tau''_{0\,m-1} + \left(\frac{1}{6}\frac{T_{m-1}}{\operatorname{tg}\alpha_{m-2}} - \frac{1}{6}\frac{T_{m-2}}{\sin\alpha_{m-2}} + \frac{1}{3}\frac{T_m}{\sin\alpha_{m-1}} - \frac{1}{3}\frac{T_{m-1}}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}}\right)\frac{L_{m-1}}{E\,J_{m-1}}$$

$$\tau'_m = \tau'_{0\,m} + \left(\frac{1}{3}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}} - \frac{1}{3}\frac{T_{m-1}}{\sin\alpha_{m-1}} + \frac{1}{6}\frac{T_{m+1}}{\sin\alpha_m} - \frac{1}{6}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_m}\right)\frac{L_m}{E\,J_m}$$

$$\tau''_m = \tau''_{0\,m} + \left(\frac{1}{6}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}} - \frac{1}{6}\frac{T_{m-1}}{\sin\alpha_{m-1}} + \frac{1}{3}\frac{T_{m+1}}{\sin\alpha_m} - \frac{1}{3}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_m}\right)\frac{L_m}{E\,J_m}$$

$$\tau'_{m+1} = \tau'_{0\,m+1} + \left(\frac{1}{3}\frac{T_{m+1}}{\operatorname{tg}\alpha_m} - \frac{1}{3}\frac{T_m}{\sin\alpha_m} + \frac{1}{6}\frac{T_{m+2}}{\sin\alpha_{m+1}} - \frac{1}{6}\frac{T_{m+1}}{\operatorname{tg}\alpha_{m+1}}\right)\frac{L_{m+1}}{E\,J_{m+1}}$$

Diese Ausdrücke für τ in (2) eingesetzt ergibt:

$$\omega''_m = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_m}\left[\tau''_{0\,m} + \left(\frac{1}{6}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}} - \frac{1}{6}\frac{T_{m-1}}{\sin\alpha_{m-1}} + \frac{1}{3}\frac{T_{m+1}}{\sin\alpha_m} - \frac{1}{3}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_m}\right)\frac{L_m}{E\,J_m}\right] + \frac{1}{\sin\alpha_m}\left[\tau'_{0\,m+1} + \left(\frac{1}{3}\frac{T_{m+1}}{\operatorname{tg}\alpha_m} - \frac{1}{3}\frac{T_m}{\sin\alpha_m} + \frac{1}{6}\frac{T_{m+2}}{\sin\alpha_{m+1}} - \frac{1}{6}\frac{T_{m+1}}{\operatorname{tg}\alpha_{m+1}}\right)\frac{L_{m+1}}{E\,J_{m+1}}\right]$$

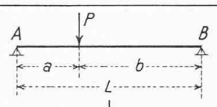
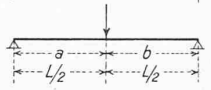
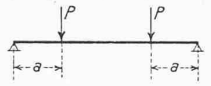
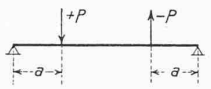
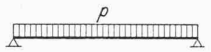
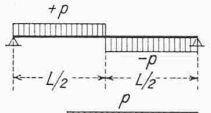
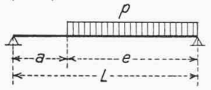
$$\omega'_m = \frac{1}{\sin\alpha_{m-1}}\left[\tau''_{0\,m-1} + \left(\frac{1}{6}\frac{T_{m-1}}{\operatorname{tg}\alpha_{m-2}} - \frac{1}{6}\frac{T_{m-2}}{\sin\alpha_{m-2}} + \frac{1}{3}\frac{T_m}{\sin\alpha_{m-1}} - \frac{1}{3}\frac{T_{m-1}}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}}\right)\frac{L_{m-1}}{E\,J_{m-1}}\right] + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}}\left[\tau'_{0m} + \left(\frac{1}{3}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}} - \frac{1}{3}\frac{T_{m-1}}{\sin\alpha_{m-1}} + \frac{1}{6}\frac{T_{m+1}}{\sin\alpha_m} - \frac{1}{6}\frac{T_m}{\operatorname{tg}\alpha_m}\right)\frac{L_m}{E\,J_m}\right]$$

Die Differenz zwischen den an den beiden Enden des Stabes m auftretenden Torsionswinkeln ω''_m und ω'_m ist aber die durch T_m im Stab m entstehende Verdrehung, d. h.

$$\omega''_m - \omega'_m = \frac{T_m L_m}{G\,J'_m}$$

Setzt man die Ausdrücke von ω''_m und ω'_m ein, verwendet man die Abkürzungen $n_m = \frac{J_c}{J_m}$ und $r_m = \frac{E\,J_c}{G\,J'_m}$ und erweitert man schliesslich beide Seiten der Gleichung mit $6\,E\,J_c$, so ergibt sich die für den Stab m gültige Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{n_{m-1}L_{m-1}}{\sin\alpha_{m-1}\sin\alpha_{m-2}}T_{m-2} + \left[\left(\frac{2}{\sin\alpha_{m-1}\operatorname{tg}\alpha_{m-1}} - \frac{1}{\sin\alpha_{m-1}\operatorname{tg}\alpha_{m-2}}\right)n_{m-1}L_{m-1} + \left(\frac{2}{\sin\alpha_{m-1}\operatorname{tg}\alpha_{m-1}} - \frac{1}{\sin\alpha_{m-1}\operatorname{tg}\alpha_m}\right)n_m L_m\right]T_{m-1} + 2\left[-\frac{n_{m-1}L_{m-1}}{\sin^2\alpha_{m-1}} + \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}\operatorname{tg}\alpha_m} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha_m} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha_{m-1}} - 3\frac{r_m}{n_m}\right)n_m L_m - \frac{n_{m+1}L_{m+1}}{\sin^2\alpha_m}\right]T_m + \left[\left(\frac{2}{\sin\alpha_m\operatorname{tg}\alpha_m} - \frac{1}{\sin\alpha_m\operatorname{tg}\alpha_{m-1}}\right)n_m L_m + \left(\frac{2}{\sin\alpha_m\operatorname{tg}\alpha_m} - \frac{1}{\sin\alpha_m\operatorname{tg}\alpha_{m+1}}\right)n_{m+1}\cdot L_{m+1}\right]T_{m+1} + \frac{n_{m+1}L_{m+1}}{\sin\alpha_m\sin\alpha_{m+1}}T_{m+2} = 6\,E\,J_c \times \left(\frac{\tau''_{0\,m-1}}{\sin\alpha_{m-1}} + \frac{\tau'_{0\,m}}{\operatorname{tg}\alpha_{m-1}} - \frac{\tau'_{0\,m}}{\operatorname{tg}\alpha_m} - \frac{\tau'_{0\,m+1}}{\sin\alpha_m}\right) = N_m \,. \quad (3)$$

	Belastungsfall	$6EJ\tau_A$	$6EJ\tau_B$
1		$\frac{ab(L+b)}{L}P$	$\frac{ab(L+a)}{L}P$
2		$3/8\,PL^2$	$3/8\,PL^2$
3		$3a(L-a)P$	$3a(L-a)P$
4		$\frac{Pa}{L}(L-a)(L-2a)$	$-\frac{Pa}{L}(L-a)(L-2a)$
5		$\frac{1}{4}pL^3$	$\frac{1}{4}pL^3$
6		$\frac{1}{32}pL^3$	$-\frac{1}{32}pL^3$
7		$\frac{p}{4L}e^2(2L^2-e^2)$	$\frac{p}{4L}(L^2-a^2)^2$

Haben alle Stäbe die gleiche Länge und den gleichen Querschnitt, und ist ausserdem der Knickwinkel konstant, so ist $\alpha_m = \alpha$, $I_m = I$, $n = 1$, $r_m = r$, und damit geht die Gleichung (3) über in:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}T_{m-2} + \frac{2}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}T_{m-1} - 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{2}{\sin^2\alpha} + 3r\right)T_m + \frac{2}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}T_{m+1} + \frac{1}{\sin^2\alpha}T_{m+2} = \frac{6\,E\,J_c}{L}\left(\frac{\tau''_{0\,m-1}}{\sin\alpha} + \frac{\tau'_{0\,m}}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\tau''_{0\,m}}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\tau'_{0\,m+1}}{\sin\alpha}\right) = \frac{N_m}{L} \quad (3\,a)$$

Für jeden Stab kann eine Gleichung (3), im besonderen Fall (3 a), aufgestellt werden. Im allgemeinen kommen in jeder dieser Gleichungen fünf unbekannte, im System aufeinanderfolgende Torsionsmomente vor. Für das Belastungsglied der allgemeinen Gleichung des Stabes m sind, von den Lasten herrührend, nur die in den Knotenpunkten $m-1$ und m, in den einfach gelagerten Stäben $m-1$, m und $m+1$ auftretenden Drehwinkel τ_0 zu errechnen. In der obigen Zusammenstellung sind die Werte $6\,E\,I\,\tau_0$ für einige Belastungsfälle angegeben.

Den Uebergang vom geknickten zum gestreckten Stabzug, d. h. von einem endlichen α zu $\alpha = 0$, findet man aus Gl. (3 a) wie folgt: Die T-Werte werden durch Momente X und Y ausgedrückt (s. Beziehung 1). Beachtet man, dass für $\alpha = 0$ $Y_m = X_{m+1} = M_m$ ist, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $\operatorname{tg}\alpha$ und deutet man die für $\alpha = 0$ in unbestimmter Form erscheinenden Beiwerte, so erhält man eine Gleichung für den Stab m zwischen fünf Stützmomenten und den Drehwinkeln τ. Stellt man für den Stab $m+1$ die analoge Gleichung auf, aber im umgekehrten Sinne, d. h. von $m+2$ nach $m-2$ laufend, und addiert man sie zur Gleichung des Stabes m, so folgt:

$$M_{m-2} + 2\,M_{m-1} - 6\,M_m + 2\,M_{m+1} + M_{m+2} = -\frac{6\,E\,J}{L}\left(\tau''_{m-1} - 2\,\tau'_{m+1} - 2\,\tau''_m + \tau'_m + \tau''_{m+1} + \tau'_{m+2}\right)$$

Stellt man anderseits für die Stützpunkte $m-1$, m und $m+1$ die Clapeyron'schen Gleichungen auf, und subtrahiert man die mit 2 multiplizierte zweite Gleichung von der Summe der ersten und dritten, so ergibt sich die identische Gleichung.

Anwendungen: *1. Beispiel*

Abb. 6 stellt eine in den Punkten 1, 2, 3 und 4 gestützte schiefe Brücke aus Eisenbeton im Grundriss dar. Die Stäbe 1 und 3 sind die Hauptträger und die Stäbe 2 und 4 die Endquerträger; die Höhe aller Träger sei d, die Breite $b = 0{,}4\,d$. Damit sind die Trägheitsmomente:

$$J = \frac{1}{12}\,b\,d^3 = 0.0333\,d^4 = J_c\,, \text{ mithin } n = 1$$

$$J' = \frac{b^3 d^3}{3{,}6\,(b^2 + d^2)} = 0{,}0154\,d^4$$

Setzt man $G = \frac{1}{2}E$, so wird $r =$ rd. 4,4. Der Grundriss ist festgelegt durch: $L_2 = L_4 = L$, $L_1 = L_3 = 2\,L$.

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 135^0,\ \sin\alpha_1 = \sin\alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_3 = -1$$

$$\alpha_2 = \alpha_4 = 45^0,\ \sin\alpha_2 = \sin\alpha_4 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_4 = +1$$

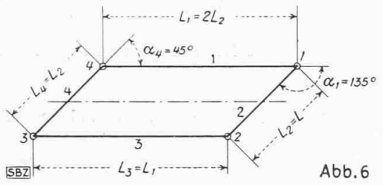


Abb. 6

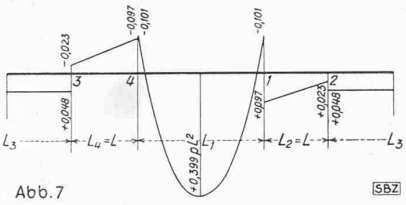


Abb. 7

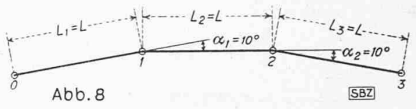


Abb. 8

Das System sei zu untersuchen für a) durchgehende Belastung beider Hauptträger mit p, b) durchgehende Belastung nur eines Hauptträgers mit p. In beiden Fällen ist $T_4 = -T_2$ und damit folgen, wenn alle Stützweiten durch L ausgedrückt werden, nach (3) die Gleichungen für die Stäbe 1 und 2:

$$-80{,}8\,T_1 - 25{,}4\,T_2 + 4{,}0\,T_3 = \frac{N_1}{L}$$

$$-12{,}7\,T_1 - 56{,}4\,T_2 + 12{,}7\,T_3 = \frac{N_2}{L}$$

Fall a): Aus Symmetriegründen ist $T_1 = T_3$, $T_2 = T_4 = 0$

Belastungsglied: $N_1 = 2 \cdot \frac{1}{4}\,p\,L^3{}_1 = 4{,}00\,p\,L^3$. Die erste Gleichung geht über in: $-76{,}8\,T_1 = 4{,}00\,p\,L^2$, daraus $T_1 = -0{,}0523\,p\,L^2 = T_3$. Die Momente ergeben sich aus der Beziehung (1) zu:

$$X_1 = -\frac{T_4}{\sin\alpha_4} + \frac{T_1}{\operatorname{tg}\alpha_4} = -0{,}0523\,p\,L^2 = X_3 = Y_1 = Y_3$$

$$X_2 = -\frac{T_1}{\sin\alpha_1} + \frac{T_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = +0{,}0740\,p\,L^2 = X_4 = -Y_2 = -Y_4$$

Die Auflagerkräfte sind:

$$A_4 = A_2 = 1{,}000\,p\,L + 2 \cdot 0{,}0740\,p\,L = 1{,}148\,p\,L$$

$$A_1 = A_3 = 1{,}000\,p\,L - 2 \cdot 0{,}0740\,p\,L = 0{,}852\,p\,L$$

Fall b): Dieser Fall kann dadurch gelöst werden, dass man zum Fall a) den Belastungsfall $+p$ auf dem Balken 1 und $-p$ auf dem Balken 3 superponiert und die Gesamtwerte durch 2 teilt. Im Superpositionsfall ist $T_1 = -T_3$, $T_2 = -T_4$, $\frac{N_1}{L} = 4{,}00\,p\,L^2$, $\frac{N_2}{L} = 2 \cdot \frac{1}{4}\,p\,L^2{}_1\,\frac{2}{\sqrt{2}} = 5{,}66\,p\,L^2$.

Damit lauten die Kontinuitätsgleichungen:

$$-80{,}8\,T_1 - 25{,}4\,T_2 = 4{,}00\,p\,L^2$$

$$-25{,}4\,T_1 - 56{,}4\,T_2 = 5{,}66\,p\,L^2$$

woraus: $T_1 = -0{,}0209\,p\,L^2$, $T_2 = -0{,}0910\,p\,L^2$

und weiter nach den Beziehungen (1):

$$X_1 = -\frac{T_4}{\sin\alpha_4} + \frac{T_1}{\operatorname{tg}\alpha_4} =$$

$$= (-0{,}128 - 0{,}021)\,p\,L^2 = -0{,}149\,p\,L^2 = Y_1 = -X_3 = -Y_3$$

$$X_2 = -\frac{T_1}{\sin\alpha_1} + \frac{T_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} =$$

$$= (0{,}029 + 0{,}091)\,p\,L^2 = +0{,}120\,p\,L^2 = Y_2 = -X_4 = -Y_4$$

Die endgültigen Werte für Fall b) sind:

$T_1 = -0{,}037\,p\,L^2$, $T_2 = -0{,}045\,p\,L^2 = -T_4$, $T_3 = -0{,}016\,p\,L^2$.

$X_1 = -0{,}101\,p\,L^2 = Y_1$, $X_2 = 0{,}097\,p\,L^2 = -Y_4$, $X_3 = 0{,}048\,p\,L^2 = Y_3$,

$Y_2 = 0{,}023\,p\,L^2 = -X_4$.

$A_4 = 1{,}074\,p\,L$, $A_1 = 0{,}926\,p\,L$, $A_2 = A_3 = 0{,}074\,p\,L$.

In Abb. 7 ist der Verlauf der Biegungsmomente dargestellt.

2. Beispiel:

Abb. 8 stellt im Grundriss den Randbalken einer Strassenverbreiterung in der Kurve dar. Der geknickte Balken sei in den Punkten 0, 1, 2 und 3 auf Mauerwerk gelagert. Es sei ausserdem $L_1 = L_2 = L_3 = L$ und I von 0 bis 3 konstant $= I_c$, folglich $n = 1$.

$$r = \frac{E\,I_c}{G\,I'} = 4 \text{ (angenommen)}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 10°$. $\sin\alpha = 0{,}17365$, $\sin^2\alpha = 0{,}03015$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}17633$, $\operatorname{tg}^2\alpha = 0{,}03109$, $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = 0{,}03062$. Aus der Art der Lagerung folgt für alle Belastungsfälle: $T_1 = T_3 = 0$. Für Belastungsfälle, die Symmetrie inbezug auf die Mitte des Mittelfeldes aufweisen, ergibt sich $A_0 = A_3 = 0$, mithin $T_1 = T_2 = T_3 = 0$. Für alle übrigen Belastungsfälle liefert (3a) die Kontinuitäts-Gleichung für den Stab 2 in der Form:

$$-2\,(32{,}164 + 66{,}335 + 12{,}000)\,T_2 = \frac{N_2}{L}$$

oder $\quad -221\,T_2 = \frac{N_2}{L}$, woraus $T_2 = -0{,}00452\,\frac{N_2}{L}$.

Bei Belastung nur des Balkens 1 mit der gleichmässig verteilten Last p ist das Belastungsglied:

$$\frac{N_2}{L} = \frac{1}{4}\,p\,L^2\,\frac{1}{0{,}17365} = 1{,}439\,p\,L^2$$

mithin $T_2 = -0{,}00651\,p\,L^2$

$$X_2 = \frac{T_2}{\operatorname{tg}\alpha} = -0{,}0369\,p\,L^2 = -Y_2$$

$$Y_1 = \frac{T_2}{\sin\alpha} = -0{,}0375\,p\,L^2 = -X_3$$

$$A_0 = (0{,}500 - 0{,}0037)\,p\,L = 0{,}463\,p\,L$$

$$A_1 = (0{,}500 + 0{,}037 + 2 \cdot 0{,}037)\,p\,L = 0{,}611\,p\,L$$

$$A_2 = (-0{,}074 - 0{,}037)\,p\,L = -0{,}111\,p\,L$$

$$A_3 = 0{,}037\,p\,L$$

Der Verlauf der Biegungsmomente ist in Abb. 9 dargestellt. Die gestrichelte Linie entspricht den Biegungsmomenten im entsprechenden und entsprechend belasteten, gestreckten Stabzug.

3. Beispiel.

Regelmässiger sechsgliedriger, in den Ecken gelagerter Stabzug, Abb. 10.

Grundwerte: $\alpha = 60°$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}^2\alpha = 3$, $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$. I konstant $= I_c$, $n = 1$, r (angenommen) $= 3$. Damit geht die Gleichung (3a) über in:

$$T_{m-2} + T_{m-1} - 18\,T_m + T_{m+1} + T_{m+2} = \frac{3}{4}\,\frac{N_m}{L}$$

(Die allgemeine Lösung eines Systems von sechs Gleichungen, die die Form haben:

$$T_{m-2} + T_{m-1} - K\,T_m + T_{m+1} + T_{m+2} = R_m$$

ist: $\quad T_m =$

$$\frac{R_{m-2} + R_{m-1} + \frac{K^2 - 2K - 4}{K}\,R_m + R_{m+1} + R_{m+2} + \frac{4}{K}\,R_{m+3}}{(K+2)\,(K-4)}$$

Diese Formel für T_m hat Gültigkeit für beliebige Belastungs-Fälle im regelmässigen Sechseck.)

Das System sei zu untersuchen für eine vom Knickpunkt 6 bis zur Mitte des Stabes 1 wirkende, gleichmässig verteilte Last p. Die Rechnung kann durch Superposition nach dem Schema Abbildung 11 wie folgt sehr vereinfacht werden. Der zu untersuchende Fall A kann ersetzt werden durch die Fälle I und II. Fall I ist gleichbedeutend wie a und b zusammen und Fall II gleichbedeutend wie c und d zusammen. Alle Werte von Fall A stimmen demnach überein mit der Summe der entsprechenden Werte aus den Fällen a, b, c und d.

Für die Stäbe 1 und 2 lauten die Kontinuitätsgleichungen:

$$\text{(a)}\quad T_5 + T_6 - 18\,T_1 + T_2 + T_3 = \frac{3}{4}\,\frac{N_1}{L}$$

$$\text{(b)}\quad T_6 + T_1 - 18\,T_2 + T_3 + T_4 = \frac{3}{4}\,\frac{N_2}{L}$$

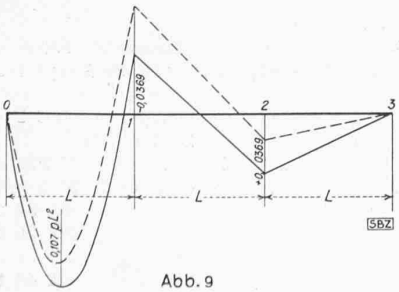


Abb. 9

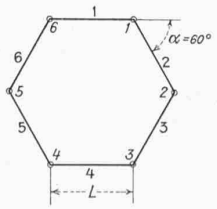


Abb. 10

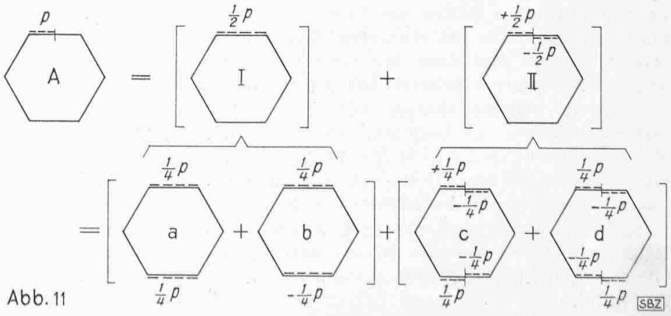


Abb. 11

Belastungsglieder:

Fälle a und b:

$$\frac{3}{4}\frac{N_1}{L} = 0, \quad \frac{3}{4}\frac{N_2}{L} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16}\,p\,L^2\,\frac{1}{\sin\alpha} = 0{,}054126\,p\,L^2$$

Fälle c und d:

$$\frac{3}{4}\frac{N_1}{L} = \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\,p\,L^2\,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 0{,}006766\,p\,L^2$$

$$\frac{3}{4}\frac{N_2}{L} = -\,0{,}006766\,p\,L^2$$

Fall a:

$$T_1 = T_4 = 0, \; -T_3 = T_5 = -T_6 = T_2$$

$$\text{Gl. (b)}: \; -T_2 - 18\,T_2 - T_2 = -20\,T_2 = 0{,}054126\,p\,L^2$$

$$T_2 = -\,0{,}002706\,p\,L^2$$

Fall b:

$$T_1 = T_4 = 0, \; T_3 = -T_5 = -T_6 = T_2$$

$$\text{Gl. (b)}: \; -T_2 - 18\,T_2 + T_2 = -18\,T_2 = 0{,}054126\,p\,L^2$$

$$T_2 = -\,0{,}003007\,p\,L^2$$

Fall c:

$$T_1 = -T_4, \; -T_3 = -T_5 = T_6 = T_2$$

Gl. (a) und (b):

$$-T_2 + T_2 - 18\,T_1 + T_2 - T_2 = -18\,T_1 = 0{,}006766\,p\,L^2$$

$$+T_2 + T_1 - 18\,T_2 - T_2 - T_1 = -18\,T_2 = -\,0{,}006766\,p\,L^2$$

$$T_1 = -T_2 = -\,0{,}000375\,p\,L^2$$

Fall d:

$$T_1 = T_4, \; T_3 = T_5 = T_6 = T_2$$

Gl. (a) und (b):

$$-18\,T_1 + 4\,T_2 = 0{,}006766\,p\,L^2$$

$$2\,T_1 - 16\,T_2 = -\,0{,}006766\,p\,L^2$$

daraus:

$$T_1 = -\,0{,}000290\,p\,L^2$$

$$T_2 = 0{,}000386\,p\,L^2$$

Zusammenstellung

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Fall a	0,000000	− 0,002706	+ 0,002706	0,000000	− 0,002706	+ 0,002706
Fall b	0,000000	− 0,003007	− 0,003007	0,000000	+ 0,003007	+ 0,003007
Fall c	− 0,000375	+ 0,000375	− 0,000375	+ 0,000375	− 0,000375	+ 0,000375
Fall d	− 0,000290	+ 0,000386	+ 0,000386	− 0,000290	+ 0,000386	+ 0,000386
Fall A	− 0,000665 $p\,L^2$	− 0,004952 $p\,L^2$	− 0,000290 $p\,L^2$	+ 0,000085 $p\,L^2$	+ 0,000312 $p\,L^2$	+ 0,006474 $p\,L^2$

Mit Hilfe der Beziehungen (1) findet man die Biegungsmomente zu:

$$X_1 = -\,0{,}00786\,p\,L^2 \qquad Y_1 = -\,0{,}00534\,p\,L^2$$
$$X_2 = -\,0{,}00209\,p\,L^2 \qquad Y_2 = +\,0{,}00252\,p\,L^2$$
$$X_3 = +\,0{,}00555\,p\,L^2 \qquad Y_3 = +\,0{,}00027\,p\,L^2$$
$$X_4 = +\,0{,}00038\,p\,L^2 \qquad Y_4 = +\,0{,}00031\,p\,L^2$$
$$X_5 = +\,0{,}00008\,p\,L^2 \qquad Y_5 = +\,0{,}00730\,p\,L^2$$
$$X_6 = +\,0{,}00338\,p\,L^2 \qquad Y_6 = -\,0{,}00450\,p\,L^2$$

Schlussbemerkungen

Die Vernachlässigung des Torsionswiderstandes steht oft, besonders in den Berechnungen von Eisenbetonkonstruktionen, in sonderbarem Widerspruch zu der vielfach zu weit getriebenen, zahlenmässigen Genauigkeit der statischen Berechnungen. Bei Berücksichtigung des Zusammenhanges der einzelnen Konstruktionsteile treten, wie die Beispiele zeigen, erhebliche Abweichungen gegenüber der üblichen Rechnungsart auf. Für die Aufnahme der Torsionsmomente sollte durch zweckentsprechende Armierungen gesorgt werden. Zahlenmässig fällt beim ersten Beispiel besonders die Grösse der Auflagerkräfte auf. Ueblicherweise würde man für den ersten Belastungsfall setzen: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0{,}50\,p\,L_1$. Statt dessen wurde errechnet: $A_1 = A_3 = 0{,}426\,p\,L_1$, $A_2 = A_4 = 0{,}574\,p\,L_1$. Die Auflagerkräfte an den spitzen Ecken sind um 14,8 % kleiner und die Auflagerkräfte an den stumpfen Ecken um 14,8 % grösser als $0{,}50\,p\,L_1$. Wenn man bedenkt, dass die stumpfen Ecken näher der Lastresultierenden liegen, und dass der Lastausgleich auf dem kürzeren Wege natürlicher erscheint, überrascht das Ergebnis nicht.

Den im zweiten Beispiel behandelten Stabzug als kontinuierlichen Balken zu rechnen, wäre falsch. Nur, wenn in den Knickpunkten 1 und 2 kräftige, verankerte Querschwellen eingebaut würden, könnte die Berechnung als kontinuierlicher Balken als genügend genau bezeichnet werden.

Die Berechnung geknickter Stabzüge verursacht, wie die Beispiele zeigen, bei Anwendung der abgeleiteten Kontinuitäts-Gleichungen keine Schwierigkeiten und keinen grossen Arbeits-Aufwand.

Die 300 PS-Diesel-mechanischen Triebwagen der Mittel-Thurgau-Bahn

Von Ing. A. MEYER, in Fa. Schweizerische Lokomotiv- und Maschinenfabrik Winterthur

Allgemeines

Die Leitung der Mittelthurgau-Bahn gelangte schon vor einigen Jahren zur Erkenntnis, dass eine teilweise Umstellung des Betriebes von Dampf- auf Dieseltraktion erhebliche Einsparungen zur Folge haben werde. Wegleitend war der Gedanke, die vorhandenen 3/5-gekuppelten Heissdampflokomotiven nur noch für die mittelschwere und schwere Zugförderung zu verwenden, den normalen Personenverkehr einschliesslich des leichten Stückgüterverkehrs dagegen mit Dieseltriebwagen mittlerer Leistung zu bewerkstelligen. Bevor sich das Bahnunternehmen entschloss, solche Triebwagen anzuschaffen, führte es mit einem gemieteten vierachsigen dieselmechanischen Triebwagen deutscher Herkunft während beinahe vier Jahren einen Versuchsbetrieb durch, dessen Ergebnis die Richtigkeit der erwähnten Ueberlegungen bestätigte.

Durch sorgfältige Auswertung der Betriebserfahrungen wurde eine wertvolle Grundlage für die Ausarbeitung des Pflichtenheftes für die neuen Dieseltriebwagen gewonnen. In Bezug auf den generellen Aufbau schrieb die Bahngesellschaft vierachsige Triebwagen mit unter dem Wagenboden angeordneter Motoranlage vor. Anderseits wurde bei einem ungefähren Leergewicht des Triebfahrzeuges von rd. 36 t und einer Höchstgeschwindigkeit von rd. 80 km/h eine Motorleistung von rd. 300 PS gewünscht, um einen Zug von einem Gesamtgewicht von 77 t auf der massgebenden Steigung von 20 ‰ mit einer Geschwindigkeit von 30÷32 km/h befördern zu können. Besondern Wert legte die Bahngesellschaft auf die Aufteilung der motorischen Anlage in zwei unabhängig voneinander arbeitende Aggregate, um bei einer Störung die Fahrt unter Benützung eines Motors fortsetzen zu können. Diese Lösung erlaubt zudem, bei kleineren Zugleistungen nur mit einem Motor zu fahren.

Die beiden neuen Diesel-Triebwagen wurden im Frühjahr 1939 in Auftrag gegeben und zwar der wagenbauliche Teil und die Drehgestelle einschliesslich des Gesamtentwurfes des Triebwagens, sowie der Lieferung der Brems- und gewisser Hilfseinrichtungen bei der *Triebwagen- und Waggonfabrik Wismar*, die Motoren einschliesslich der Lichtmaschinen und der Batterie bei der *AG. Adolph Saurer, Arbon*, und die mechanische Kraftübertragung mit Fernsteuerungseinrichtung bei der *Schweiz. Lokomotiv- und Maschinenfabrik, Winterthur*.

Zufolge der durch den Ausbruch des Krieges geschaffenen Verhältnisse beschloss die Mittelthurgau-Bahn, die Montage der Triebwagen in den Werkstätten der SLM in Winterthur durchführen zu lassen. Dies geschah in enger Zusammenarbeit letztgenannter Firma mit der Bahn und der Lieferantin der wagenbaulichen Teile. Nach Abnahme durch die Aufsichtsbehörde wurden die Fahrzeuge am 20. Dezember 1941 bzw. am 25. Januar 1942 dem fahrplanmässigen Betrieb übergeben.

Grundsätzlich bestehen die Wagen (Abb. 1 und 2) aus dem Wagenkasten, den beiden, je eine Triebachse und eine Laufachse aufweisenden Drehgestellen, und den unter dem Wagenkasten angeordneten zwei Maschinenanlagen.

Abb. 3 zeigt die Anordnung der beiden getrennt voneinander arbeitenden motorischen Anlagen. Der Dieselmotor und das druckölbetätigte Stufengetriebe mit Wendegetriebe jedes Aggregates sind auf einem besondern Maschinenrahmen montiert, der unter Zuhilfenahme schwingungs- und geräuschdämpfender Elemente an besondern, vom Fussboden unabhängigen Querträgern des Untergestelles aufgehängt ist. Der Oberteil der Motoren ragt leicht über den Fussboden hinaus (s. Abb. 2). Die über dem Motor liegende Doppel-Sitzbank bildet gewissermassen die Motorhaube; diese ist leicht aufklappbar und erlaubt somit gute Zugänglichkeit zu den Motoren. Auf jeden Maschinenrahmen ist ferner ein einstufiger Knorr-Kolbenkompressor (Typ V 70/150), mittels Keilriemen angetrieben, montiert.

Tabelle I: Hauptdaten der Fahrzeuge

Spurweite 1435 mm, Triebrad- und Laufraddurchmesser					900 mm
65 Sitzplätze III. Kl., 8 II. Kl., 13 Klappsitze, total 86 Sitzplätze					
Stehplätze 34, Fassungsvermögen					total 120 Personen
Gesamtdauerleistung beider Dieselmotoren					2 × 150 = 300 PS
Entsprechende Motordrehzahl					1500 U/min
Fahrgeschwindigkeit auf	I	II	III	IV	V Stufe
bei obiger Motordrehzahl	rd. 17	31,2	49,4	60,2	82 km/h
Leergewicht des Triebwagens					rd. 36 t
Gewicht des voll ausgerüsteten Triebwagens					rd. 38 t
Dienstgewicht des Triebwagens einschliesslich Besetzung und Gepäck					rd. 46 t