Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 121/122 (1943)
Heft: 20

Artikel: Allgemeine Dimensionierung und Spannungsberechnung vorgespannter Eisenbetonträger

Autor: Lardy, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53097

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Allgemeine Dimensionierung und Spannungsberechnung vorgespannter Eisenbetonträger. — Start und Landung hochbelasteter Flugzeuge. — Wasserkirche und Helmhaus in Zürich. – Mitteilungen: Technische Hygiene. Photozellen-Reibungswaage. 2200 PSe-Dieselmotor für Schleppboote. Die Verarbeitung von Steinkohlen und Braunkohlenleichtölen. Tarnscheinwerfer und luftschutzsichere Arbeitsplatzbeleuchtung. Eidg. Technische Hochschule. — Nekrologe: Alfred Sachs. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Band 121 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 20

Allgemeine Dimensionierung und Spannungsberechnung vorgespannter Eisenbetonträger

Von Ing. Dr. PIERRE LARDY, Zürich

In einem Aufsatz: «Eigenspannungen und vorgespannter Beton»[1]) hat der Verfasser eine allgemeine, vereinfachte Theorie der Eigenspannungen mit Hilfe fiktiver Kräfte und als wichtigste Anwendung davon die Berechnung der vorgespannten Eisenbetonbalken unter voller Berücksichtigung des Schwindens und der Plastizität des Betons erläutert. Wir wollen die dort gewonnenen Spannungsgleichungen für den praktischen Gebrauch etwas umformen und an einem Beispiel zeigen, wie einfach und übersichtlich die Spannungsberechnung damit wird. Sodann wird als Hauptproblem dieser Arbeit das *Dimensionierungs-* oder *Bemessungsproblem* von vorgespannten Eisenbetonträgern behandelt. Dazu gehen wir von der allgemeinen Spannungsgleichung für Eigenspannungen [siehe Fussnote [1])] sowie den Gleichgewichtsbedingungen aus und gelangen zu bemerkenswert einfachen Dimensionierungsformeln, die auch in komplizierten, praktisch vorkommenden Fällen eine rasche und genaue Dimensionierung erlauben und sich daher für die Praxis gut eignen dürften. Das Dimensionierungsproblem ist u. W. bis heute noch nicht gelöst worden[2]); eine Lösung im Sinne der bisher üblichen Berechnungsweise würde an der verwickelten und kaum zu bewältigenden Rechenarbeit scheitern.

Nach der Behandlung des allgemeinen Dimensionierungs-Problems, das durch ein Beispiel illustriert wird, führen wir noch einige Spezialfälle an.

I. Die Spannungsberechnung

Bezeichnet in einem symmetrischen Querschnitt z die Ordinate, gemessen von der ideellen Schweraxe aus ($\int E z\, dF = 0$), $\varepsilon(z)$ das Schwindmass, $E(z)$ den Elastizitätsmodul (beide mit z variierend) und σ die Eigenspannung in der Faser z, so folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\int \sigma\, dF = 0 \quad . \; . \quad (1) \quad \text{und} \quad \int \sigma z\, dF = 0 \quad . \; . \quad (2)$$

sowie aus der Navier-Bernoulli'schen Hypothese des Ebenbleibens der Querschnitte folgende Spannungsgleichung:

$$\boxed{\frac{\sigma}{E} + \varepsilon = \frac{N}{(EF)} + z\,\frac{M}{(EJ)}} \quad . \; . \; . \; . \quad (I)$$

Darin ist N eine fiktive Normalkraft: $N = \int \varepsilon E\, dF = \sum_i \varepsilon_i E_i F_i$, M das Moment von N bezogen auf die ideelle Schweraxe: $M = \int \varepsilon E z\, dF = \sum_i \varepsilon_i E_i F_i z_i$; die Nennergrössen bedeuten: $(EF) = \int E\, dF = \sum_i E_i F_i$, $(EJ) = \int E z^2\, dF = \sum_i E_i J_i$. Sämtliche Integrale erstrecken sich über den ganzen Querschnitt (Stadium 1). $\frac{N}{(EF)} = \varepsilon_t$ ist die «spezifische» Axdehnung und $\frac{M\, ds}{(EJ)} = d\varphi$ die Winkeldrehung des Querschnittes. Mit Hilfe der Gl. (I) können beliebig komplizierte Verhältnisse einfach behandelt werden.

Für die Anwendung auf den vorgespannten Beton ist es zweckmässig, Gl. (I) etwas umzuformen. Das Schwindmass ε für die vorgespannten Eisen F_{ei} (es können mehrere Lagen mit verschiedenen Vorspannungen vorhanden sein) wird definiert als:

$$\varepsilon_{ei} = -\frac{\sigma^v_{ei}}{E_e} \quad (\sigma^v_{ei} < 0)$$

Unter Berücksichtigung des Schwindens im Beton ist $\varepsilon_b = \varepsilon_s$. Damit folgt für die fiktiven Kräfte:

$$N = \varepsilon_s E_b F_b - \sum_i \sigma^v_{ei} F_{ei}$$

$$M = \varepsilon_s E_b F_b z_s - \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} z_{ei}$$

(z_s = Abstand von $S_{id.}$ und S_b, $z_s = -kn \sum \mu_i z_{ei}$).

Darin berücksichtigt das erste Glied das Schwinden, das zweite die Vorspannungen. Die Plastizität des Betons kommt im Verhältnis $\frac{E_e}{E_b} = kn$ zur Geltung (k = Plastizitätsfaktor). Werden obige Ausdrücke in Gl. (I) eingesetzt, so ergeben sich daraus die Betonspannung σ_b in der Faser z_b und die Eisenspannung σ_{ei} in der Faser z_{ei}:

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \sigma_b &= -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id.}} + z_b\,\frac{M}{J_{id.}} \quad . \; . \quad (3) \\ \sigma_{ei} &= \sigma^v_{ei} + kn\,\frac{N}{F_{id.}} + kn\, z_{ei}\,\frac{M}{J_{id.}} \quad . \; . \quad (4) \end{aligned}}\right\} \text{Allgemeine Gleichungen des Spannungsproblems}$$

mit: $N = \varepsilon_s E_b F_b - \sum_i \sigma^v_{ei} F_{ei}$

$M = \varepsilon_s E_b F_b z_s - \sum_i \sigma^v_{ei} F_{ei} z_{ei}$

$F_{id.} = F_b + kn \sum_i F_{ei}$

$J_{id.} = J_b + kn \sum_i J_{ei}$

z, $J_{id.}$ und M bzgl. der ideellen Schweraxe

$\sigma > 0$: Druck, $\sigma < 0$: Zug.

Mit diesen aus Gl. (I) entstandenen Gleichungen ist das Spannungsproblem des vorgespannten Betons gelöst. Zur Kontrolle der Berechnung muss Gl. (1) erfüllt sein:

$$\int \sigma_b\, dF_b + \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} = 0$$

Beispiel:

Gegeben sei ein Rechteckquerschnitt 12 × 20 cm, mit den Armierungen und Vorspannungen:

$F_{e1} = 5 \varnothing 6 = 1{,}414$ cm², $\mu_1 = 0{,}590$ %, $\sigma^v_{e1} = -14\,000$ kg/cm²

$F_{e2} = 3 \varnothing 6 = 0{,}850$ cm², $\mu_2 = 0{,}354$ %, $\sigma^v_{e2} = -14\,000$ kg/cm²

$F_{e3} = 3 \varnothing 4 = 0{,}377$ cm², $\mu_3 = 0{,}157$ %, $\sigma^v_{e3} = -6\,000$ kg/cm²

Ferner wird angenommen: $E_e = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm², $kn = 20$, also $E_b = 1{,}05 \cdot 10^5$ kg/cm². $\varepsilon_s = 0{,}0004$.

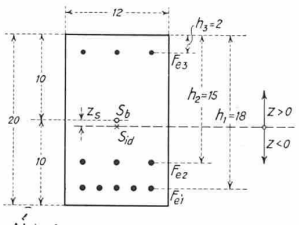

Abb. 1

Aus Abb. 1 und aus dem Flächenmoment für S_b folgt:

$$(E_b F_b + E_e \sum_i F_{ei})\, z_s = E_e \sum_i F_{ei}(h_i - 10)$$

oder

$$z_s = kn\,\frac{\sum_i F_{ei}(h_i - 10)}{F_{id.}} = 0{,}858 \text{ cm}$$

und daraus nach Definition:

$F_{id.} = 292{,}8$ cm², $J_{id.} = 10\,500$ cm⁴

Die fiktiven Kräfte sind:

$$N = N_s + N_e = 10\,080 + 33\,960 = 44\,040 \text{ kg}$$

$$M = M_s + M_e = -161\,960 \text{ cm kg}$$

Eingesetzt folgt:

$$\sigma_b = -42 + \frac{44\,040}{292{,}8} - z_b\,\frac{161\,960}{10\,500} = 108{,}5 - 15{,}42\, z_b$$

und für die Randspannungen σ_u ($z_u = -9{,}142$ cm) und σ_0 ($z_0 = +10{,}858$ cm):

$\sigma_u = +249{,}5$ kg/cm² Druck, $\sigma_0 = -58{,}8$ kg/cm² Zug.

Die Eisenspannungen ergeben:

$$\sigma_{ei} = \sigma^v_{ei} + 20\,\frac{44\,040}{292{,}8} - 20\,\frac{161\,960}{10\,500}\, z_{ei} = \sigma^v_{ei} + 3010 - 308{,}4\, z_{ei}$$

und daraus:

$\sigma_{e1} = -8790$ kg/cm², $\sigma_{e2} = -9713$ kg/cm², $\sigma_{e3} = -5720$ kg/cm²

Die Kontrolle bestätigt obiges Resultat:

$$\int \sigma_b\, dF_b + \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} = \frac{\sigma_0 + \sigma_u}{2} F_b + \sum_i \sigma_{ei} F_{ei} = 22\,870 \text{ kg} - 22\,860 \text{ kg} \simeq 0$$

Es dürfte noch von Interesse sein, den Einfluss des Schwindens getrennt zu bestimmen. Dafür setzen wir $\varepsilon_s = 0$, d. h. wir bekommen den Zustand der «reinen» Vorspannung. Es wird:

$$N = 33\,960 \text{ kg}, \quad M = -170\,600 \text{ cm kg}$$

$$\sigma_b = 116 - 16{,}25\, z_b \text{ und daraus: } \begin{cases} \sigma_u = 264{,}6 & \text{kg/cm}^2 \\ \sigma_0 = -60{,}3 & \text{kg/cm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_{ei} = \sigma^v_{ei} + 2320 - 325\, z_{ei} \text{ und: } \begin{cases} \sigma_{e1} = -9\,360 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{e2} = -10\,334 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{e3} = -6\,560 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$$

Sämtliche Spannungen sind in diesem Falle grösser; ein Teil der Vorspannung geht durch das Schwinden verloren.

[1]) SBZ vom 30. Januar 1943, Bd. 121, S. 51*.

[2]) *E. Mörsch* gibt im «Spannbetonträger» am Schlusse einige Kurven-Tafeln an, die jedoch nur für einen ganz bestimmten Querschnitt des Trägers mit bestimmten Armierungen gelten.

II. Das Dimensionierungsproblem

1. Einführung

Ebenso wichtig wie das Spannungsproblem erscheint heute das Dimensionierungsproblem der vorgespannten Eisenbetonträger. Im Gegensatz zum gewöhnlichen Eisenbeton muss das Dimensionierungsproblem etwas anders formuliert werden. Ein Unterschied besteht schon in der Wahl des Querschnittstypus; denn, da ein vorgespannter Eisenbetonquerschnitt nach Stadium 1 berechnet wird, solange der Einfluss der Vorspannkräfte durch die äusseren Kräfte nicht aufgehoben wird, kommen vor allem Querschnitte in Betracht, wie sie für homogene Baustoffe üblich sind, nämlich T-, Doppel-T-Querschnitte und solche, die sich daraus ableiten. Was die Dimensionierung selbst anbelangt, so handelte es sich früher darum, aus den gegebenen zulässigen Spannungen σ_e und σ_b die Nutzhöhe h und die Armierung F_e zu bestimmen, während für vorgespannte Eisenbetonträger das Problem folgendermassen lautet: Gegeben sind der Betonquerschnitt und die durch die Vorspannkräfte erzeugten Randspannungen σ_0 und σ_u (über deren Wahl in praktischen Fällen weiter unten einige Andeutungen gemacht sind). Gegeben ist ferner die genaue Lage (z_{ei}) der Armierungen F_{ei} im Querschnitt (der Querschnittsform angepasst) und die zugehörigen Vorspannungen σ_{ei}^v. Gesucht sind die Armierungen F_{ei}, so dass die beiden «Randbedingungen», die sich auf σ_0 und σ_u beziehen, erfüllt sind. Daraus ist ersichtlich, dass *zwei* Armierungen, z. B. F_{e1} und F_{e2}, die Unbekannten des Problems sind, während die andern, falls vorhanden, frei gewählt werden können, da ja nur zwei Bedingungen zur Verfügung stehen. Die beiden Armierungen F_{e1} und F_{e2} sind die «Hauptarmierungen», durch deren Vorspannen die «induzierten» Randspannungen σ_0 und σ_u im Beton entstehen. (In vielen Fällen kann auf weitere Armierungen, die «Nebenarmierungen», verzichtet werden).

Es bleibt noch die Frage offen, wie, bei gegebenen äusseren Kräften (Momenten und Querkräften), sowohl der Betonquerschnitt als auch die Randspannungen σ_0 und σ_u gewählt werden sollen. Prinzipiell kann man folgendermassen vorgehen: Man wählt vorerst den Querschnittstypus, z. B. einen Doppel-T-Querschnitt, dessen Nutzhöhe d sich nach den Momenten richtet; die Randspannungen werden nach der Spannungsberechnung für homogene Querschnitte berechnet zu $\sigma_{0,u} = \pm \frac{M}{W}$; um in jedem Falle eine genügende Sicherheit gegen Risse gewährleisten zu können, wird man z. B. verlangen, dass die Randspannungen infolge Eigengewicht plus anderthalbfacher oder doppelter Nutzlast diejenigen infolge der Vorspannung gerade aufheben, d. h. dass in diesem Falle $\sigma_u^v + \sigma_u = 0$ ist. Damit ist die eine der Randspannungen festgelegt; für die andere wählt man, ebenfalls aus Sicherheitsgründen (für den Zustand vor dem Aufbringen der äusseren Belastung), einen kleinen positiven Wert. Es sei noch bemerkt, dass im Interesse einer möglichst wirtschaftlichen Armierung die Vorspannungen möglichst hoch gewählt werden sollen, was ohne weiteres einleuchtet und im Folgenden in den Formeln zum Ausdruck kommt. Die Dimensionierung wird, genau wie die Spannungsberechnung, unter voller Berücksichtigung des Schwindens und der Plastizität durchgeführt.

Nach dem allgemeinen Fall behandeln wir als Spezialfall denjenigen mit einer einzigen Armierung, sowie denjenigen der «zentrischen» Vorspannung.

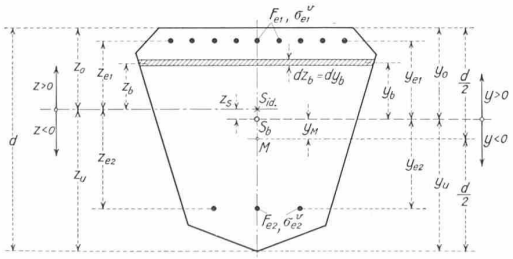

Abb. 2 SBZ

2. Der allgemeine Fall

Es liege ein einfach-symmetrischer, im Uebrigen allgemeiner Querschnitt zugrunde (Bezeichnungen und Einzelheiten siehe Abb. 2). Es sind Armierungen vorgesehen, von denen der Einfachheit halber nur zwei, nämlich F_{e1} und F_{e2} eingezeichnet sind.

Die Daten des Problems sind die folgenden:

1. Die beiden Randspannungen σ_0 und σ_u.
2. Die Vorspannungen $\sigma_{e1}^v, \sigma_{e2}^v, \ldots, \sigma_{em}^v$.
3. Die Lage der Armierungen, gegeben durch $y_{e1}, y_{e2}, \ldots, y_{em}$, bezogen auf den Schwerpunkt S_b der Betonfläche.
4. Die «Nebenarmierungen» $F_{e3}, F_{e4}, \ldots, F_{em}$.

Gesucht sind die beiden Hauptarmierungen F_{e1} und F_{e2}.

Es ist zweckmässig, statt der Ordinaten z_{ei} bzgl. $S_{id.}$ die Ordinaten y_{ei} bzgl. S_b einzuführen; zwischen beiden besteht folgende allgemeine Beziehung:

$$y_i = z_i - z_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Damit wird der früher schon definierte Abstand z_s zwischen $S_{id.}$ und S_b:

$$z_s = -kn\Sigma\mu_i z_{ei} = -\frac{kn\Sigma\mu_i y_{ei}}{1 + kn\Sigma\mu_i} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\left(\mu_i = \frac{F_{ei}}{F_b}\text{; alle } \Sigma \text{ bzgl. des Index «}i\text{»}\right).$$

Wir führen noch die Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0 + \sigma_u &= S \\ \sigma_0 - \sigma_u &= D \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Nun können wir die Gl. (3) für σ_0 und σ_u anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0 &= -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id.}} + z_0 \frac{M}{J_{id.}} \\ \sigma_u &= -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id.}} + z_u \frac{M}{J_{id}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wollte man aus diesen beiden Gleichungen die Unbekannten μ_1 und μ_2 berechnen, so würde man rechnerisch auf sehr grosse Schwierigkeiten stossen, da μ_1 und μ_2 in N, M, $F_{id.}$ und $J_{id.}$ enthalten sind. Das Resultat, in Form von nichtlinearen, impliziten Gleichungen in μ_1 und μ_2 ist praktisch unbrauchbar, und es wird sich darum handeln, einen andern Weg zu suchen. Aus den Gl. (8) lassen sich jedoch zwei wichtige Beziehungen gewinnen. Wir bilden:

$$\sigma_0 - \sigma_u = D = (z_0 - z_u)\frac{M}{J_{id.}}$$

und wegen $z_0 - z_u = d$ ist

$$\frac{M}{J_{id.}} = \frac{D}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und weiter:

$$\sigma_0 + \sigma_u = S = 2\left[-\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id.}} + \frac{(z_0 + z_u)}{2}\frac{D}{d}\right]$$

Nun ist:

$$\frac{z_0 + z_u}{2} = \frac{y_0 + y_u}{2} + z_s = y_M + z_s$$

$$y_0 = \frac{d}{2} + y_M \qquad y_u = -\left(\frac{d}{2} - y_M\right)$$

wo y_M der Abstand von S_b zum Mittelpunkt M in halber Höhe und ein Festwert des Querschnittes ist ($y_M = 0$ bei Doppelsymmetrie des Querschnittes). Es wird:

$$\frac{S}{2} = -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id.}} + (y_M + z_s)\frac{D}{d}$$

$$\text{oder } \frac{N}{F_{id.}} = \frac{S}{2} + \varepsilon_s E_b - (y_M + z_s)\frac{D}{d} \quad (10)$$

Die Lösung des Problems entspringt den beiden Gleichgewichts-Bedingungen (1) und (2):

$$\int \sigma\, dF = 0 \qquad \text{und} \qquad \int \sigma z\, dF = 0$$

oder:

$$\int \sigma_b\, dF_b + \Sigma F_{ei}\sigma_{ei} = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{und } \int \sigma_b z_b\, dF_b + \Sigma F_{ei} z_{ei}\sigma_{ei} = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Da die Randspannungen σ_0 und σ_u bekannt sind, kann die Betonspannung σ_b für irgend eine Faser z_b als lineare Funktion von z_b und den Randspannungen ausgedrückt werden. Wie man leicht einsieht, ist:

$$\sigma_b = \sigma_0 + (z - z_0)\frac{\sigma_0 - \sigma_u}{d}$$

oder, in den Koordinaten y:

$$\sigma_b = \sigma_0 + (y - y_0)\frac{\sigma_0 - \sigma_u}{d} = \sigma_0 + (y - y_0)\frac{D}{d}$$

Weiter ist $dF_b = b\, dz_b = b\, dy_b$ (b ist i. A. eine Funktion von z_b, bzw. von y_b). Mit den Werten für σ_b und dF_b können die Integrale, in denen y_b von y_u bis y_0 variiert, ausgewertet werden:

$$\int \sigma_b\, dF_b = \int_{y_u}^{y_0}\left[\sigma_0 + \frac{D}{d}(y_b - y_0)\right] b\, dy_b =$$

$$= \left(\sigma_0 - \frac{D}{d}y_0\right)\int b\, dy_b + \frac{D}{d}\int b\, y_b\, dy_b$$

$\int b\, dy_b = F_b =$ Betonfläche, $\int b\, y_b\, dy_b = 0 =$ statisches Moment der Betonfläche bzgl. der Axe durch S_b. Wird noch $y_0 = \frac{d}{2} + y_M$ eingesetzt, so folgt:

$$\int \sigma_b\, dF_b = \left(\frac{S}{2} - \frac{D}{d}y_M\right)F_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Analog wird:

$$\int \sigma_b z_b \, d F_b = \int_{y_0}^{y_u} \left[\sigma_0 + \frac{D}{d} (y_b - y_0) \right] (y_b + z_s) \, b \, d y_b$$

und nach ähnlichen Umformungen wie oben und mit

$$J_b{}^0 = \int_{y_0}^{y_u} b \, y_b{}^2 \, d y_b \text{ folgt:}$$

$$\int \sigma_b z_b \, d F_b = F_b z_s \left(\frac{S}{2} - \frac{D}{d} y_M \right) + \frac{D}{d} J_b{}^0 \quad . \quad . \quad (12)$$

Diese Integralwerte werden in die beiden Gl. (1) und (2) eingesetzt:

$$\left(\frac{S}{2} - \frac{D}{d} y_M \right) F_b + \Sigma F_{ei} \sigma_{ei} = 0 = \frac{S}{2} - \frac{D}{d} y_M + \Sigma \mu_i \sigma_{ei} \quad (13)$$

$$\left(\frac{S}{2} - \frac{D}{d} y_M \right) F_b z_s + \frac{D}{d} J_b{}^0 + \Sigma F_{ei} \sigma_{ei} (y_{ei} + z_s) = 0 =$$

$$= \frac{D}{d} i_0{}^2 + \Sigma \mu_i \sigma_{ei} y_{ei} + z_s \left(\frac{S}{2} - \frac{D}{d} y_M + \Sigma \mu_i \sigma_{ei} \right)$$

$$\text{mit } i_0{}^2 = \frac{J_b{}^0}{F_b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Wegen Gl. (13) verschwindet der Faktor von z_s in Gl. (14) und die beiden Gleichgewichtsbedingungen erhalten die einfache Form:

$$\frac{S}{2} - \frac{D}{d} y_M + \Sigma \mu_i \sigma_{ei} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\frac{D}{d} i_0{}^2 + \Sigma \mu_i \sigma_{ei} y_{ei} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Die Gleichungen (15) und (16), die man leicht lösen kann, sind die Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten μ_1 und μ_2, sobald die Eisenspannungen σ_{ei} bekannt sind.

Es fehlt jetzt nur noch eine Beziehung zwischen den Eisen-Spannungen σ_{ei} und den gegebenen Grössen. Um diese zu erhalten, gehen wir von der Gl. (3) für die Eisenspannungen aus:

$$\sigma_{ei} = \sigma_{ei}^v + k n \frac{N}{F_{id.}} + k n z_{ei} \frac{M}{J_{id.}}$$

und infolge der Gl. (9):

$$\sigma_{ei} = \sigma_{ei}^v + k n \frac{N}{F_{id.}} + k n \frac{D}{d} z_{ei}$$

Wird darin für $\frac{N}{F_{id.}}$ der Wert aus Gl. (10) eingesetzt, so folgt eine einfache Beziehung für σ_{ei}:

$$\sigma_{ei} = \sigma_{ei}^v + \varepsilon_s E_e + k n \left[\frac{S}{2} + \frac{D}{d} (y_{ei} - y_M) \right] \quad . \quad (17)$$

Es ist bemerkenswert, dass, bei gegebenen Randspannungen, die Eisenspannung σ_{ei} nur von den gegebenen Grössen mit demselben Index abhängt, wobei der Armierungsgehalt μ_i nicht vorkommt.

Damit ist das Dimensionierungsproblem gelöst; wie man sieht, führt der eingeschlagene Weg zu einem einfachen und genauen Resultat. Sobald die Eisenspannungen σ_{ei} aus den Gleichungen (17) bekannt sind, setzt man sie in die Gl. (15) und (16) ein und berechnet daraus die Werte μ_1 und μ_2.

Das Dimensionierungsproblem und seine Lösung seien zusammenfassend noch kurz zusammengestellt in folgendem *Schema:*

Gegeben sind: 1. Der Betonquerschnitt und die Randspannungen σ_0 und σ_u (deren Wahl siehe in der Einleitung zu diesem Abschnitt).
2. Die «Nebenarmierungen» F_{e3}, F_{e4}, ... F_{em}.
3. Die Lage sämtlicher Armierungen bezogen auf die Axe durch S_b: y_{e1}, y_{e2}, y_{e3}, ..., y_{em}.
4. Die zugehörigen Vorspannungen σ_{e1}^v, σ_{e2}^v ...., σ_{em}^v.

Gesucht sind: Die beiden «Hauptarmierungen» F_{e1} und F_{e2}, bzw. μ_1 und μ_2.

Lösung: Man berechnet die σ_{ei} aus den Beziehungen:

$$\boxed{\sigma_{ei} = \sigma_{ei}^v + \varepsilon_s E_e + k n \left[\frac{S}{2} + \frac{D}{d} (y_{ei} - y_M) \right]}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

und setzt sie in die beiden Bestimmungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_1 \sigma_{e1} + \mu_2 \sigma_{e2} &= - \frac{S}{2} + \frac{D}{d} y_M - (\mu_3 \sigma_{e3} + \ldots + \mu_m \sigma_{em}) \\ \mu_1 \sigma_{e1} y_{e1} + \mu_2 \sigma_{e2} y_{e2} &= - \frac{D}{d} i_0{}^2 - \\ &\quad - (\mu_3 \sigma_{e3} y_{e} + \ldots + \mu_m \sigma_{em} y_{em}) \end{aligned}}$$

ein. Daraus ergeben sich μ_1 und μ_2.

Bezeichnungen:

$$S = \sigma_0 + \sigma_u \qquad y_M = \frac{y_0 + y_u}{2} = y_0 - \frac{d}{2} . \qquad i_0{}^2 = \frac{J_b{}^0}{F_b} .$$

$$D = \sigma_0 - \sigma_u \qquad (y_M = 0 \text{ bei Doppelsymmetrie}).$$

Bemerkung: Anstatt dass die Vorspannungen gegeben und die Armierungen gesucht sind, kann das Problem auch umgekehrt gestellt und gelöst werden. Die Berechnung erfolgt aus den oben abgeleiteten Formeln in analoger Weise. Es wird sich jedoch in der Praxis eher darum handeln, die Armierungen aus den Vorspannungen zu bestimmen, da je nach Eisenmaterial und Vorspanneinrichtung die günstige Wahl der Vorspannungen sofort getroffen werden kann, was umgekehrt bei der Armierung nicht der Fall ist.

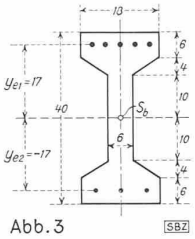

Abb. 3

Beispiel:

Es soll ein einfacher Balken von 6,2 m Spannweite mit einer Nutzlast von p = 0,5 t/m' dimensioniert werden. Wir wählen dazu einen I-ähnlichen Querschnitt. Es sei hochwertiger Beton mit einer zulässigen Kantenpressung von 100 kg/cm² vorausgesetzt. Vorgesehen sind zwei Armierungen, die «Hauptarmierungen», F_{e1} oben und F_{e2} unten. Wir wählen die Randspannungen infolge Vorspannung zu $\sigma_0 = 100$ kg/cm² und $\sigma_u = 10$ kg pro cm². Die Querschnittshöhe wird aus Gründen der Rissesicherheit so bestimmt, dass die Randspannungen infolge Eigengewicht plus anderthalbfacher Nutzlast die gewählte Vorspannung $\sigma_0 = 100$ kg/cm² ausgleichen, d. h. dass $\sigma_0{}^q + \sigma_0{}^v \cong 0$ ist. Beim vorliegenden Querschnitt (Abb. 3) ist:

$$g = 0{,}11 \text{ t/m'}$$
$$1\,{}^1/_2\ p = 0{,}75 \text{ t/m'}$$

$$q = 0{,}86 \text{ t/m'} \qquad \text{und daraus: } M_0 = \frac{0{,}86 \cdot 6{,}2^2}{8} = 4{,}13 \text{ mt}$$

Mit $W_0 = 4\,090$ cm³ werden die Randspannungen infolge q:

$$\sigma_R = \pm 101 \text{ kg/cm}^2$$

Wir rechnen mit:

$$\varepsilon_s = 0{,}0004 , \; E_e = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 , \; k n = 20$$

und folgen dem oben angegebenen Schema:

Gegeben sind:

1. $F_b = 432$ cm², $J_b{}^0 = 81\,800$ cm⁴ $\longrightarrow i_0{}^2 = 189{,}3$ cm²
   $d = 40$ cm, $y_M = 0$. Ferner $\sigma_0 = 100$ kg/cm², $\sigma_u = 10$ kg pro cm² und daraus $S = 110$ kg/cm² und $D = 90$ kg/cm²
2. Nebenarmierungen nicht vorhanden.
3. $y_{e1} = +17$ cm, $y_{e2} = -17$ cm
4. $\sigma_{e1}^v = -14\,000$ kg/cm², $\sigma_{e2}^v = -9\,000$ kg/cm²

Gesucht sind: μ_1 und μ_2.

Lösung: Es folgt:

$$\sigma_{e1} = -14\,000 + 840 + 20 \left[55 + \frac{90}{40} \cdot 17 \right] = -11\,300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{e2} = -9\,000 + 840 + 20 \left[55 - \frac{90}{40} \cdot 17 \right] = -7\,820 \text{ kg/cm}^2$$

Die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$-11\,300\,\mu_1 - 7\,820\,\mu_2 = -55 \longrightarrow 11\,300\,\mu_1 + 7\,820\,\mu_2 = 55$$

$$-11\,300 \cdot 17\,\mu_1 - 7\,820 \cdot 17\,\mu_2 = -\frac{90}{40} \cdot 189{,}3 \longrightarrow 11\,300\,\mu_1 - 7\,820\,\mu_2 = 25$$

Die Summe der Gl. ergibt . . . . . $\mu_1 = 0{,}00354 = 0{,}354\ \%$
die Differenz . . . . . $\mu_2 = 0{,}00192 = 0{,}192\ \%$
und die Hauptarmierungen sind bestimmt.

Zur Kontrolle können mit diesen Werten von μ_1 und μ_2 die Randspannungen σ_0 und σ_u nach den Gl. (3) berechnet werden: Es ist:

$$z_s = -0{,}496 \text{ cm}, \quad \begin{aligned} z_0 &= y_0 + z_s = 19{,}504 \text{ cm}, \quad z_{e1} = 16{,}504 \text{ cm} \\ z_u &= y_u + z_s = -20{,}496 \text{ cm}, \quad z_{e2} = -17{,}496 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\frac{N}{F_{id.}} = \frac{\varepsilon_s E_b - \mu_1 \sigma_{e1}^v - \mu_2 \sigma_{e2}^v}{1 + 20 (\mu_1 + \mu_2)} = 98 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{M}{J_{id.}} = \frac{\varepsilon_s E_b z_s - \mu_1 \sigma_{e1}^v z_{e1} - \mu_2 \sigma_{e2}^v z_{e2}}{i_0{}^2 + z_s{}^2 + 20 (\mu_1 z_{e1}{}^2 + \mu_2 z_{e2}{}^2)} = 2{,}245 \text{ kg/cm}^3$$

Daraus folgt: $\sigma_0 = 100$ kg/cm² und $\sigma_u = 10$ kg/cm²
Damit ist das Resultat der Dimensionierung bestätigt.

Ist noch eine 3. Armierung vorgesehen, so muss sie frei gewählt werden. Es sei:

$$\mu_3 = 0{,}00150 , \; y_{e3} = +15 \text{ cm} \qquad \sigma_{e3}^v = -11\,000 \text{ kg/cm}^2$$

Dann wird: $\sigma_{e3} = -8985$ kg/cm²
und die Bestimmungsgleichungen:

$$11\,300\,\mu_1 + 7\,820\,\mu_2 = 55 - 13{,}5 = 41{,}5$$
$$11\,300\,\mu_1 - 7\,820\,\mu_2 = 25 - 11{,}9 = 13{,}1$$

Es folgt:

$$\mu_1 = 0{,}00242 , \; \mu_2 = 0{,}00182$$

3. Sonderfälle.

a. Der Fall mit einer Armierung kann aus den allgemeinen Dimensionierungsgleichungen sowie ausnahmsweise auch aus den Gl. (3) für σ_0 und σ_u abgeleitet werden. Zum Unterschied mit früher ist die Lage der Armierung nicht mehr beliebig; y_e ist hier vielmehr die zweite Unbekannte des Problems und hängt, wie die Formel zeigt, nur von den Randspannungen σ_0 und σ_u und von i_0^2 ab (analog wie bei den homogenen Querschnitten im Falle der Biegung mit Axialkraft). Es sei hier lediglich das Resultat angegeben, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\eta_e = y_e/d, \quad \eta_M = y_M/d, \quad \frac{i_o^2}{d^2} = t^2$$

Dann ist:

$$\eta_e = \frac{t^2}{\frac{S}{2D} - \eta_M} \text{ und } \mu = -\frac{1}{k n \left[1 + \left(\frac{\eta_e}{t}\right)^2\right] + \frac{\eta_e}{D t^2}\left(\varepsilon_s E_e + \sigma_e^v\right)}$$

$$(\mu > 0, \text{ da } \sigma_e^v < 0)$$

b. Der «zentrische» Fall liegt vor, wenn $M = 0$ ist; dies hat zur Folge, dass $D = 0$ und $\sigma_0 = \sigma_u = \sigma_m$ ist, d. h. dass die Spannungsverteilung im Querschnitt infolge der Vorspannung eine gleichmässige ist. Für die Berechnung der Unbekannten gelten die allgemeinen Dimensionsformeln, in denen $D = 0$ ist.

Ein Unterschied besteht nur im Falle einer einzigen Armierung. Wie im Falle *a.* ist dann die Lage dieser Armierung gegeben, nämlich $y_e = 0$, was $z_s = z_e = 0$ nach sich zieht, und zur Folge hat, dass $S_{id.}$ mit S_b zusammenfällt. Die einzige Unbekannte ist der Armierungsgehalt μ nach der Formel:

$$\mu = -\frac{\sigma_m}{k n \sigma_m + \varepsilon_s E_e + \sigma_e^v} = -\frac{\sigma_m}{\sigma_e}$$

Start und Landung hochbelasteter Flugzeuge

Als gegen Ende des ersten Weltkrieges vereinzelte Flugzeuge mit einer Flächenbelastung von 50 kg/m² eingeführt wurden, betrachtete man diesen Wert als äusserste tragbare Grenze. Heute stehen bereits Langstreckenbomber im Betrieb, die Flächenbelastungen von über 250 kg/m² aufweisen! Es ist klar, dass die Start- und Landerollstrecken solcher Flugzeuge ganz erhebliche Ausmasse annehmen und ausgedehnte Rollpisten bedingen. Nun sind Flugplätze von über 1 km Durchmesser nicht ohne weiteres zu erstellen, besonders nicht unter kriegsmässigen Verhältnissen oder in gebirgigen Gegenden. Man ist daher bestrebt, sowohl die Startstrecke als auch den Auslauf der Flugzeuge zu vermindern und hat hiefür verschiedene Methoden entwickelt.

Auf eine besonders aussichtsreiche Methode der Landebremsung, die Bremsung mit dem auf negative Blatteinstellwinkel gebrachten Verstellpropeller, wurde in dieser Zeitschrift schon sehr früh hingewiesen[1]). Nunmehr sind auch Ergebnisse der in der Schweiz durchgeführten systematischen Versuche mit der Propellerbremsung bekannt geworden, die die Erwartungen vollauf bestätigen[2]). Die Auslaufstrecke beträgt darnach nur noch ⅓ des Wertes bei Anwendung der normalen Radbremsung und sogar nur $^1/_6$ des ungebremsten Auslaufes! Dieser auf breiter Basis erreichte Erfolg wurde durch die Schaffung des hydraulisch betätigten, innerhalb eines grossen Drehzahlbereiches automatisch auf eine gewünschte Drehzahl regulierenden Escher-Wyss-Verstellpropellers ermöglicht. Das hydraulische System erlaubt die Anwendung hoher Verstellgeschwindigkeiten der Propellerblätter — im vorliegenden Fall etwa 20°/sec —, wobei die vom Regler gelieferte Leistung nicht mehr ausreicht und durch Energiespeicherung in einem Akkumulator ersetzt wird. Eine besondere Einrichtung schaltet den Druckspeicher beim Uebergang auf negative Blattwinkel direkt auf den Verstellzylinder, wodurch die Blätter so rasch in die Bremsstellung gebracht werden, dass ein Durchbrennen des Motors unmöglich ist. Um die Bedienung der Triebwerkanlage besonders einfach zu gestalten, wurde von Escher-Wyss eine Einhebelbedienanlage entwickelt, die die Leistungsregulierung und die Umstellung auf den Bremsbereich mittels eines einzigen Hebels gestattet. Damit ist die betriebsichere Landebremsung möglich, denn der Pilot kann im Bedarfsfall ohne weiteres durchstarten.

Von der Mühll kommt schließlich noch auf die Sturzflugbremsung mit dem Verstellpropeller zu sprechen. Der Umstand, dass die bisher im Ausland angestellten diesbezüglichen Versuche nicht befriedigten, ist darauf zurückzuführen, dass viel zu geringe Verstellgeschwindigkeiten angewandt wurden. Es sind in diesem Fall sogar Werte von etwa 40°/sec erforderlich, die nur mit hydraulischen Systemen mit Energiespeicherung erreicht werden können. Es ist deshalb zu hoffen, dass unser Land auch auf diesem Gebiet führend vorangehen wird, nachdem die bisher erreichten Erfolge zur Annahme berechtigen, dass auch die noch zu lösenden Probleme der Sturzflugbremsung — beispielsweise die Synchronisierung mehrerer Luftschrauben — gemeistert werden können.

[1]) *Ackeret*, SBZ Bd. 112, Seite 1 (1938).

[2]) *Von der Mühll*, Flugwehr- und Technik 1943, Februarheft, Seite 51. Siehe hiezu auch die im Aufsatz von E. Amstutz enthaltene Abb. 5 (SBZ Bd. 121, 1943, Seite 170).

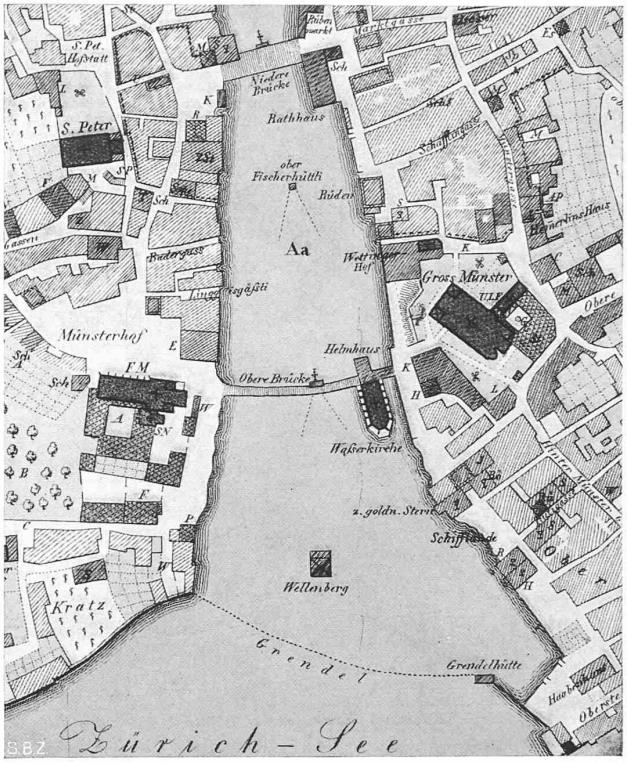

Abb. 1. Altstadtkern von Zürich, Zustand um 1500

Nachdem die Verkürzung der Landestrecke auf ⅓ des bisherigen Wertes praktisch verwirklicht wurde, steht man vor der Tatsache, dass die Startstrecke, die sonst ⅔ der Auslaufstrecke betrug, nun etwa das Doppelte derselben ausmacht. Es sind deshalb konsequenterweise Massnahmen zu studieren, die eine Reduktion der Startlänge auf die Hälfte ermöglichen. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, die zum Teil grössere maschinelle Einrichtungen erfordern und an sich das rasche Hintereinanderstarten vieler Flugzeuge nicht gestatten (Katapulte und Startwinden), scheint die Steilhangstartmethode die geeignetste zu sein, da sie die genannten Nachteile nicht aufweist. Nachdem bereits im Ausland diesbezügliche Untersuchungen und Versuche angestellt, in der Folge aber nicht weiter verfolgt wurden, liegen nun theoretische Grundlagen für die Berechnung des Startes auf geneigten und gekrümmten Rollbahnen vor[3]). Es geht daraus hervor, dass der im Ausland angestrebte Start auf einer geneigten geraden Bahn nicht die gewünschte Verbesserung ergibt, obwohl bereits bei geringen Bahnneigungen die Rollstrecke stark verkürzt wird. Dies ist dadurch bedingt, dass das Flugzeug nach dem Verlassen des geneigten Hanges eine grössere Strecke und eine nicht unbeträchtliche Höhe benötigt, um in den Horizontalflug überzugehen. In der erwähnten Arbeit wird deshalb der Vorschlag gemacht, Steilhangstartbahnen mit S-förmigem Profil anzulegen, die sich aus einem konvexen Anfangsbogen, einem geradlinigen Zwischenstück und einem konkaven Endbogen mit horizontaler Endtangente zusammensetzen. Anhand eines Beispiels wird nachgewiesen, dass die erwünschte Verkürzung der Gesamtstartstrecke auf die Hälfte bereits bei Hangneigungen von 20° erreicht wird. Es ist aber ohne Gefahr möglich, noch steilere Bahnen anzulegen und damit die Piste dem vorhandenen Hangprofil anzupassen, denn ein Ueberschlag ist auf keinem Punkt der Bahn zu befürchten, sofern die Bodenbeschaffenheit dem üblichen Mass entspricht. Die S-förmigen Pisten sind für die schwersten Flugzeuge auszulegen, die auf ihnen starten sollen; leichtere Flugzeuge können dann vor dem Endpunkt der Bahn abheben; die Gefahr bei einem Wiederberühren der Piste ist nicht gross, da die geflogenen Uebergangsbogen, analog wie bei einer Skisprungbahn, praktisch tangential an die Piste verlaufen.

[3]) *Studer* und *Widmer*, Flugwehr und -Technik 1943 (Februar und März), Seite 48 und Seite 75.