

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 121/122 (1943)
Heft: 20

Artikel: Allgemeine Dimensionierung und Spannungsberechnung
vorgespannter Eisenbetonträger
Autor: Lardy, Pierre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-53097>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

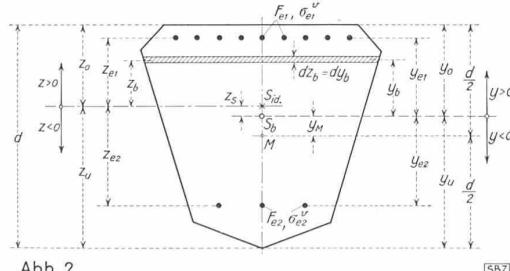
II. Das Dimensionierungsproblem

1. Einführung

Ebenso wichtig wie das Spannungsproblem erscheint heute das Dimensionierungsproblem der vorgespannten Eisenbetonträger. Im Gegensatz zum gewöhnlichen Eisenbeton muss das Dimensionierungsproblem etwas anders formuliert werden. Ein Unterschied besteht schon in der Wahl des Querschnittstyps; denn, da ein vorgespannter Eisenbetonquerschnitt nach Stadium 1 berechnet wird, solange der Einfluss der Vorspannkräfte durch die äusseren Kräfte nicht aufgehoben wird, kommen vor allem Querschnitte in Betracht, wie sie für homogene Baustoffe üblich sind, nämlich T-, Doppel-T-Querschnitte und solche, die sich daraus ableiten. Was die Dimensionierung selbst anbelangt, so handelte es sich früher darum, aus den gegebenen zulässigen Spannungen σ_e und σ_u die Nutzhöhe h und die Armierung F_e zu bestimmen, während für vorgespannte Eisenbetonträger das Problem folgendermassen lautet: Gegeben sind der Betonquerschnitt und die durch die Vorspannkräfte erzeugten Randspannungen σ_0 und σ_u (über deren Wahl in praktischen Fällen weiter unten einige Andeutungen gemacht sind). Gegeben ist ferner die genaue Lage (z_{ei}) der Armierungen F_{ei} im Querschnitt (der Querschnittsform angepasst) und die zugehörigen Vorspannungen σ_{ei}^v . Gesucht sind die Armierungen F_{ei} , so dass die beiden «Randbedingungen», die sich auf σ_0 und σ_u beziehen, erfüllt sind. Daraus ist ersichtlich, dass zwei Armierungen, z. B. F_{e1} und F_{e2} , die Unbekannten des Problems sind, während die andern, falls vorhanden, frei gewählt werden können, da ja nur zwei Bedingungen zur Verfügung stehen. Die beiden Armierungen F_{e1} und F_{e2} sind die «Hauptarmierungen», durch deren Vorspannen die «induzierten» Randspannungen σ_0 und σ_u im Beton entstehen. (In vielen Fällen kann auf weitere Armierungen, die «Nebenarmierungen», verzichtet werden).

Es bleibt noch die Frage offen, wie, bei gegebenen äusseren Kräften (Momenten und Querkräften), sowohl der Betonquerschnitt als auch die Randspannungen σ_0 und σ_u gewählt werden sollen. Prinzipiell kann man folgendermassen vorgehen: Man wählt vorerst den Querschnittstypus, z. B. einen Doppel-T-Querschnitt, dessen Nutzhöhe d sich nach den Momenten richtet; die Randspannungen werden nach der Spannungsberechnung für homogene Querschnitte berechnet zu $\sigma_{0,u} = \pm \frac{M}{W}$; um in jedem Falle eine genügende Sicherheit gegen Risse gewährleisten zu können, wird man z. B. verlangen, dass die Randspannungen infolge Eigengewicht plus anderthalbfacher oder doppelter Nutzlast diejenigen infolge der Vorspannung gerade aufheben, d. h. dass in diesem Falle $\sigma_u^v + \sigma_u = 0$ ist. Damit ist die eine der Randspannungen festgelegt; für die andere wählt man, ebenfalls aus Sicherheitsgründen (für den Zustand vor dem Aufbringen der äusseren Belastung), einen kleinen positiven Wert. Es sei noch bemerkt, dass im Interesse einer möglichst wirtschaftlichen Armierung die Vorspannungen möglichst hoch gewählt werden sollen, was ohne weiteres einleuchtet und im Folgenden in den Formeln zum Ausdruck kommt. Die Dimensionierung wird, genau wie die Spannungsberechnung, unter voller Berücksichtigung des Schwindens und der Plastizität durchgeführt.

Nach dem allgemeinen Fall behandeln wir als Spezialfall denjenigen mit einer einzigen Armierung, sowie denjenigen der «zentrischen» Vorspannung.



2. Der allgemeine Fall

Es liege ein einfach-symmetrischer, im Uebrigen allgemeiner Querschnitt zugrunde (Bezeichnungen und Einzelheiten siehe Abb. 2). Es sind Armierungen vorgesehen, von denen der Einfachheit halber nur zwei, nämlich F_{e1} und F_{e2} eingezeichnet sind.

Die Daten des Problems sind die folgenden:

1. Die beiden Randspannungen σ_0 und σ_u .
2. Die Vorspannungen σ_{ei}^v , σ_{e2}^v , ..., σ_{em}^v .

3. Die Lage der Armierungen, gegeben durch y_{e1} , y_{e2} , ..., y_{em} , bezogen auf den Schwerpunkt S_b der Betonfläche.

4. Die «Nebenarmierungen» F_{e3} , F_{e4} , ..., F_{en} .

Gesucht sind die beiden Hauptarmierungen F_{e1} und F_{e2} . Es ist zweckmässig, statt der Ordinaten z_{ei} bzgl. S_b die Ordinaten y_{ei} bzgl. S_b einzuführen; zwischen beiden besteht folgende allgemeine Beziehung:

$$y_i = z_i - z_s \quad \dots \quad (5)$$

Damit wird der früher schon definierte Abstand z_s zwischen S_b und S_d :

$$z_s = -k n \sum \mu_i z_{ei} = -\frac{k n \sum \mu_i y_{ei}}{1 + k n \sum \mu_i} \quad \dots \quad (6)$$

$$(\mu_i = \frac{F_{ei}}{F_b}; \text{ alle } \Sigma \text{ bzgl. des Index } \langle i \rangle).$$

Wir führen noch die Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} \sigma_0 + \sigma_u = S \\ \sigma_0 - \sigma_u = D \end{cases} \quad \dots \quad (7)$$

Nun können wir die Gl. (3) für σ_0 und σ_u anschreiben:

$$\begin{cases} \sigma_0 = -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id}} + z_0 \frac{M}{J_{id}} \\ \sigma_u = -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id}} + z_u \frac{M}{J_{id}} \end{cases} \quad \dots \quad (8)$$

Wollte man aus diesen beiden Gleichungen die Unbekannten μ_1 und μ_2 berechnen, so würde man rechnerisch auf sehr grosse Schwierigkeiten gestossen, da μ_1 und μ_2 in N , M , F_{id} und J_{id} enthalten sind. Das Resultat, in Form von nichtlinearen, impliziten Gleichungen in μ_1 und μ_2 ist praktisch unbrauchbar, und es wird sich darum handeln, einen andern Weg zu suchen. Aus den Gl. (8) lassen sich jedoch zwei wichtige Beziehungen gewinnen. Wir bilden:

$$\sigma_0 - \sigma_u = D = (z_0 - z_u) \frac{M}{J_{id}}$$

und wegen $z_0 - z_u = d$ ist

$$\frac{M}{J_{id}} = \frac{D}{d} \quad \dots \quad (9)$$

und weiter:

$$\sigma_0 + \sigma_u = S = 2 \left[-\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id}} + \frac{(z_0 + z_u)}{2} \frac{D}{d} \right]$$

Nun ist:

$$\frac{z_0 + z_u}{2} = \frac{y_0 + y_u}{2} + z_s = y_M + z_s$$

$$y_0 = \frac{d}{2} + y_M \quad y_u = -\left(\frac{d}{2} - y_M\right)$$

wo y_M der Abstand von S_b zum Mittelpunkt M in halber Höhe und ein Festwert des Querschnittes ist ($y_M = 0$ bei Doppelsymmetrie des Querschnittes). Es wird:

$$\frac{S}{2} = -\varepsilon_s E_b + \frac{N}{F_{id}} + (y_M + z_s) \frac{D}{d}$$

$$\text{oder } \frac{N}{F_{id}} = \frac{S}{2} + \varepsilon_s E_b - (y_M + z_s) \frac{D}{d} \quad (10)$$

Die Lösung des Problems entspringt den beiden Gleichgewichtsbedingungen (1) und (2):

$$\int \sigma_b dF_b + \sum F_{ei} \sigma_{ei} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{und } \int \sigma_b z_b dF_b + \sum F_{ei} z_{ei} \sigma_{ei} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Da die Randspannungen σ_0 und σ_u bekannt sind, kann die Betonspannung σ_b für irgend eine Faser z_b als lineare Funktion von z_b und den Randspannungen ausgedrückt werden. Wie man leicht einsieht, ist:

$$\sigma_b = \sigma_0 + (z - z_0) \frac{\sigma_0 - \sigma_u}{d}$$

oder, in den Koordinaten y :

$$\sigma_b = \sigma_0 + (y - y_0) \frac{\sigma_0 - \sigma_u}{d} = \sigma_0 + (y - y_0) \frac{D}{d}$$

Weiter ist $dF_b = b dz_b = b dy_b$ (b ist i. A. eine Funktion von z_b , bzw. von y_b). Mit den Werten für σ_b und dF_b können die Integrale, in denen y_b von y_u bis y_0 variiert, ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \int \sigma_b dF_b &= \int_{y_u}^{y_0} \left[\sigma_0 + \frac{D}{d} (y_b - y_0) \right] b dy_b = \\ &= \left(\sigma_0 - \frac{D}{d} y_0 \right) \int b dy_b + \frac{D}{d} \int b y_b dy_b \end{aligned}$$

$\int b dy_b = F_b$ = Betonfläche, $\int b y_b dy_b = 0$ = statisches Moment der Betonfläche bzgl. der Axe durch S_b . Wird noch $y_0 = \frac{d}{2} + y_M$ eingesetzt, so folgt:

$$\int \sigma_b dF_b = \left(\frac{S}{2} - \frac{D}{d} y_M \right) F_b \quad \dots \quad (11)$$

3. Sonderfälle.

a. Der Fall mit einer Armierung kann aus den allgemeinen Dimensionierungsgleichungen sowie ausnahmsweise auch aus den Gl. (3) für σ_0 und σ_u abgeleitet werden. Zum Unterschied mit früher ist die Lage der Armierung nicht mehr beliebig; y_e ist hier vielmehr die zweite Unbekannte des Problems und hängt, wie die Formel zeigt, nur von den Randspannungen σ_0 und σ_u und von i_0^2 ab (analog wie bei den homogenen Querschnitten im Falle der Biegung mit Axialkraft). Es sei hier lediglich das Resultat angegeben, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\eta_e = y_e/d, \quad \eta_M = y_M/d, \quad \frac{i_0^2}{d^2} = t^2$$

Dann ist:

$$\eta_e = \frac{t^2}{2D - \eta_M} \quad \text{und} \quad \mu = - \frac{1}{kn \left[1 + \left(\frac{\eta_e}{t} \right)^2 \right] + \frac{\eta_e}{D t^2} (\varepsilon_s E_e + \sigma_e^v)} \quad (\mu > 0, \text{ da } \sigma_e^v < 0)$$

b. Der «zentrische» Fall liegt vor, wenn $M = 0$ ist; dies hat zur Folge, dass $D = 0$ und $\sigma_0 = \sigma_u = \sigma_m$ ist, d. h. dass die Spannungsverteilung im Querschnitt infolge der Vorspannung eine gleichmässige ist. Für die Berechnung der Unbekannten gelten die allgemeinen Dimensionsformeln, in denen $D = 0$ ist.

Ein Unterschied besteht nur im Falle einer einzigen Armierung. Wie im Falle a. ist dann die Lage dieser Armierung gegeben, nämlich $y_e = 0$, was $z_s = z_e = 0$ nach sich zieht, und zur Folge hat, dass $S_{id.}$ mit S_b zusammenfällt. Die einzige Unbekannte ist der Armierungsgehalt μ nach der Formel:

$$\mu = - \frac{\sigma_m}{kn \sigma_m + \varepsilon_s E_e + \sigma_e^v} = - \frac{\sigma_m}{\sigma_e}$$

Start und Landung hochbelasteter Flugzeuge

Als gegen Ende des ersten Weltkrieges vereinzelte Flugzeuge mit einer Flächenbelastung von 50 kg/m^2 eingeführt wurden, betrachtete man diesen Wert als äusserste tragbare Grenze. Heute stehen bereits Langstreckenbomber im Betrieb, die Flächenbelastungen von über 250 kg/m^2 aufweisen! Es ist klar, dass die Start- und Landerollstrecken solcher Flugzeuge ganz erhebliche Ausmassen annehmen und ausgedehnte Rollbahnen bedingen. Nun sind Flugplätze von über 1 km Durchmesser nicht ohne weiteres zu erstellen, besonders nicht unter kriegsmässigen Verhältnissen oder in gebirgigen Gegenden. Man ist daher bestrebt, sowohl die Startstrecke als auch den Auslauf der Flugzeuge zu vermindern und hat hiefür verschiedene Methoden entwickelt.

Auf eine besonders aussichtsreiche Methode der Landebremsung, die Bremsung mit dem auf negative Blatteinstellwinkel gebrachten Verstellpropeller, wurde in dieser Zeitschrift schon sehr früh hingewiesen¹⁾. Nunmehr sind auch Ergebnisse der in der Schweiz durchgeföhrten systematischen Versuche mit der Propellerbremsung bekannt geworden, die die Erwartungen vollauf bestätigen²⁾. Die Auslaufstrecke beträgt darnach nur noch $\frac{1}{3}$ des Wertes bei Anwendung der normalen Radbremsung und sogar nur $\frac{1}{6}$ des ungebremsten Auslaufes! Dieser auf breiter Basis erreichte Erfolg wurde durch die Schaffung des hydraulisch betätigten, innerhalb eines grossen Drehzahlbereichs automatisch auf eine gewünschte Drehzahl regulierenden Escher-Wyss-Verstellpropellers ermöglicht. Das hydraulische System erlaubt die Anwendung hoher Verstellgeschwindigkeiten der Propellerblätter — im vorliegenden Fall etwa $20^\circ/\text{sec}$ —, wobei die vom Regler gelieferte Leistung nicht mehr ausreicht und durch Energiespeicherung in einem Akkumulator ersetzt wird. Eine besondere Einrichtung schaltet den Druckspeicher beim Uebergang auf negative Blattwinkel direkt auf den Verstellzylinder, wodurch die Blätter so rasch in die Bremsstellung gebracht werden, dass ein Durchbrennen des Motors unmöglich ist. Um die Bedienung der Triebwerkseinheit besonders einfach zu gestalten, wurde von Escher-Wyss eine Einhebelbedienanlage entwickelt, die die Leistungsregulierung und die Umstellung auf den Bremsbereich mittels eines einzigen Hebels gestattet. Damit ist die betriebsichere Landebremsung möglich, denn der Pilot kann im Bedarfsfall ohne weiteres durchstarten.

Von der Mühll kommt schliesslich noch auf die Sturzflugbremsung mit dem Verstellpropeller zu sprechen. Der Umstand, dass die bisher im Ausland angestellten diesbezüglichen Versuche nicht befriedigten, ist darauf zurückzuführen, dass viel zu geringe Verstellgeschwindigkeiten angewandt wurden. Es sind in diesem Fall sogar Werte von etwa $40^\circ/\text{sec}$ erforderlich, die

¹⁾ Ackeret, SBZ Bd. 112, Seite 1 (1938).

²⁾ Von der Mühll, Flugwehr- und Technik 1943, Februarheft, Seite 51. Siehe hiezu auch die im Aufsatz von E. Amstutz enthaltene Abb. 5 (SBZ Bd. 121, 1943, Seite 170).

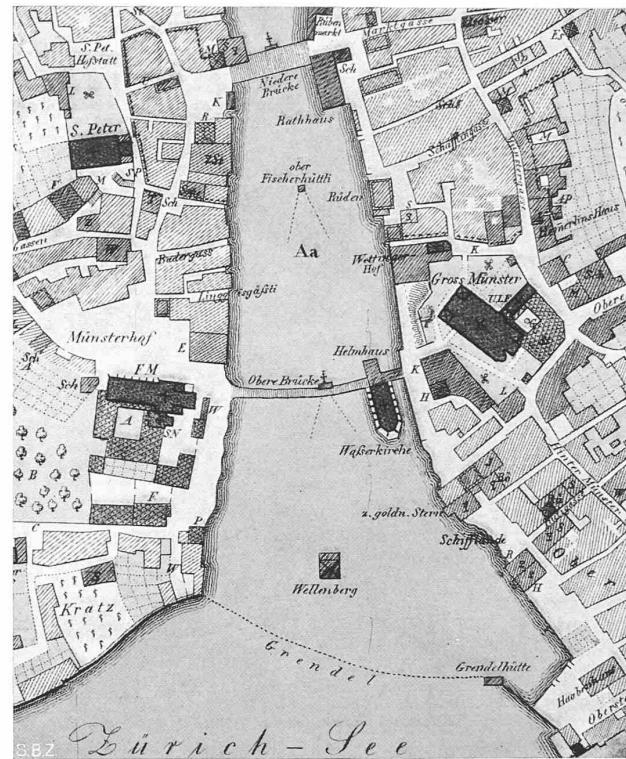


Abb. 1. Altstadtkern von Zürich, Zustand um 1500

nur mit hydraulischen Systemen mit Energiespeicherung erreicht werden können. Es ist deshalb zu hoffen, dass unser Land auch auf diesem Gebiet führend vorangehen wird, nachdem die bisher erreichten Erfolge zur Annahme berechtigen, dass auch die noch zu lösenden Probleme der Sturzflugbremsung — beispielsweise die Synchronisierung mehrerer Luftschrauben — gemeistert werden können.

Nachdem die Verkürzung der Landestrecke auf $\frac{1}{3}$ des bisherigen Wertes praktisch verwirklicht wurde, steht man vor der Tatsache, dass die Startstrecke, die sonst $\frac{1}{3}$ der Auslaufstrecke betrug, nun etwa das Doppelte derselben ausmacht. Es sind deshalb konsequenterweise Massnahmen zu studieren, die eine Reduktion der Startlänge auf die Hälfte ermöglichen. Unter den verschiedenen Möglichkeiten, die zum Teil grössere maschinelle Einrichtungen erfordern und an sich das rasche Hintereinanderstarten vieler Flugzeuge nicht gestatten (Katapult und Startwinden), scheint die Steilhangstartmethode die geeignetste zu sein, da sie die genannten Nachteile nicht aufweist. Nachdem bereits im Ausland diesbezügliche Untersuchungen und Versuche angestellt, in der Folge aber nicht weiter verfolgt wurden, liegen nun theoretische Grundlagen für die Berechnung des Startes auf geneigten und gekrümmten Rollbahnen vor³⁾. Es geht daraus hervor, dass der im Ausland angestrebte Start auf einer geneigten geraden Bahn nicht die gewünschte Verbesserung ergibt, obwohl bereits bei geringen Bahnneigungen die Rollstrecke stark verkürzt wird. Dies ist dadurch bedingt, dass das Flugzeug nach dem Verlassen des geneigten Hanges eine grössere Strecke und eine nicht unbeträchtliche Höhe benötigt, um in den Horizontalflug überzugehen. In der erwähnten Arbeit wird deshalb der Vorschlag gemacht, Steilhangstartbahnen mit S-förmigem Profil anzulegen, die sich aus einem konvexen Anfangsbogen, einem geradlinigen Zwischenstück und einem konkaven Endbogen mit horizontaler Endtangente zusammensetzen. Anhand eines Beispiels wird nachgewiesen, dass die erwünschte Verkürzung der Gesamtstartstrecke auf die Hälfte bereits bei Hangneigungen von 20° erreicht wird. Es ist aber ohne Gefahr möglich, noch steilere Bahnen anzulegen und damit die Piste dem vorhandenen Hangprofil anzupassen, denn ein Ueberschlag ist auf keinem Punkt der Bahn zu befürchten, sofern die Bodenbeschaffenheit dem üblichen Mass entspricht. Die S-förmigen Pisten sind für die schwersten Flugzeuge auszulegen, die auf ihnen starten sollen; leichtere Flugzeuge können dann vor dem Endpunkt der Bahn abheben; die Gefahr bei einem Wiederberühren der Piste ist nicht gross, da die geflogenen Uebergangsbogen, analog wie bei einer Skisprungbahn, praktisch tangential an die Piste verlaufen.

³⁾ Studer und Widmer, Flugwehr und -Technik 1943 (Februar und März), Seite 48 und Seite 75.