

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 119/120 (1942)
Heft: 21

Artikel: Modellversuche an Scheiben mit stetiger Bandbeanspruchung
Autor: Baud, R.V.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-52476>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Modellversuche an Scheiben mit stetiger Randbeanspruchung. — Wettbewerb für Bebauungsvorschläge und Wohnhaustypen in billiger Preislage bei Luzern. — Nachkriegsprobleme des Schweiz. Ver-

kehr-Flugwesens und schweizerische Flugplatzfragen. — Mitteilungen: Eidg. Technische Hochschule. — Nekrolog: Albert Meyer. — Mitteilungen der Vereine. — Vortragskalender.

Modellversuche an Scheiben mit stetiger Randbeanspruchung

Nach einem Manuskript von Ing. Dr. R. V. BAUD, Abteilungsvorsteher der EMPA, Zürich

1. Einleitung

Mathematische Scheibenprobleme bestehen im Auffinden der Randbedingungen angepassten Airy'schen Spannungsfunktion $F(x, y)$ [1], eine bei unregelmässiger Scheibenform und ungleichmässiger Randbelastung langwierige Rechenaufgabe. Das Experiment an der fertigen Scheibe — deren Herstellung im allgemeinen keinerlei Schwierigkeiten bereitet — enthebt uns dieser Integration; die Schwierigkeit liegt hier in der exakten Verwirklichung der Randbedingungen. Selbst die gleichmässige Normalbelastung, etwa des inneren Randes einer gelochten Scheibe nach Abb. 1 — mit welchem Belastungsfall sich die vorliegende Studie im wesentlichen befasst — hat man lange als nur mit grossen Schwierigkeiten durchführbar betrachtet.

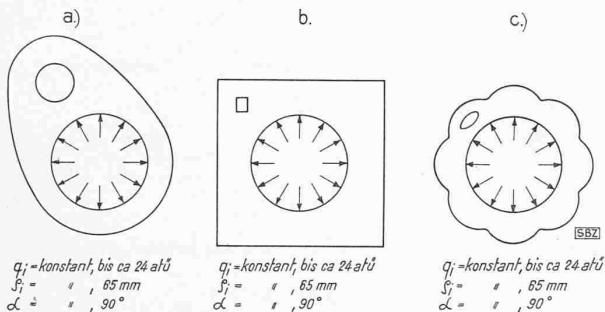


Abb. 1. Scheiben, deren experimentelle Untersuchung mit Hilfe der beschriebenen Apparatur ohne weiteres möglich ist

Im ersten Augenblick ist man versucht, die versuchstechnische Lösung der Aufgabe in der Einführung eines festen elastischen Körpers (Eindrücken eines leicht konischen Dornen in die leicht konische Bohrung der Scheibe, Aufschrumpfen u. dgl.) zu erblicken. Dieser Weg führt aber, vom einfachsten Fall (vollwandige Kreisringscheibe) abgesehen, nicht zum gewünschten Ziel, weil sich die Scheibe infolge des Dornen nicht so deformeit, wie es der vorgeschriebenen Randbedingung entspricht, sondern nur so, wie es die Eigen-Elastizität des Dornen in Verbindung mit jener der Scheibe zulässt. Dieser Uebelstand kann offenbar nur bei Verwendung von Flüssigkeiten oder Gasen (Luft) als Druckmittel vermieden werden. Diese Lösung bringt aber andere Schwierigkeiten, nämlich die der Dichtung und der dadurch notwendig werdenden Eichung mit sich; indessen können nach den neuesten, in der EMPA ausgeführten Versuchen diese Schwierigkeiten als überwunden betrachtet werden.

2. Beschreibung der Vorrichtung

Die vom Verfasser bei den spannungsoptischen Versuchen [2] verwendete Vorrichtung ist in Abb. 2 dargestellt. Sie besteht im wesentlichen aus einer Scheibe 1, an deren Umfang eine Gummimembran 7 aufgezogen ist. Hierzu wird zweckmässig ein zylindrisches Stück eines Gummischlauchs von wesentlich kleinerem Durchmesser verwendet, sodass die Gummimembran — insbesondere deren dem Modell 9 nächstliegender Teil — sich in diesem Zustand der Montage unter Zugspannung befindet. Sie wird dadurch wieder aufgehoben, dass man mittels der Pressringe 5 die umgebogenen Enden der Membran seitlich sehr stark zusammendrückt. Durch genügend Spiel zwischen Membran und Modell wird Anliegen und damit anfänglicher Druck vermieden¹⁾.

Der auf der einen Seite der Scheibe 1 angeordnete Halter 2 dient zur Lagerung der Vorrichtung, derart, dass sie nach Wunsch gedreht werden kann, um Stück für Stück nicht zu grosser Modelle unter Innendruck in das Lichtstrahlenbündel zu bringen.

Damit ist die Vorrichtung montiert; bei ihrer Inbetriebnahme wird das Druckmittel der Scheibe 1 durch den zentralen Stutzen 1a zugeführt und mittels der Radialbohrung 8 unter die Membran geleitet. Die Rille 6, in die der Gummihineinknillt, gewährleistet Dichtbleiben bis zu relativ hohem Druck. Hoher Druck ist er-

wünscht, weil dadurch die Genauigkeit der Messungen am Modell günstig beeinflusst wird.

Bei den nachfolgend beschriebenen Versuchen wurde als Druckmittel Pressluft verwendet. Sie besitzt den Vorteil, dass bei allfälligen Bersten der Membran Beschädigungen der Mess-Einrichtungen praktisch völlig vermieden werden. Der beschriebenen Vorrichtung kommt eine Brutto-Innendruck ($q_{i,br}$) bis zu maximal 25,5 atü zugeführt werden²⁾. Abb. 3 zeigt die geschilderte Vorrichtung schematisch in Verbindung mit den verwendeten Druckflaschen, Ventilen usw. Abb. 4 gibt eine photographische Aufnahme der Vorrichtung zusammen mit der verwendeten Messapparatur und Zubehör wieder.

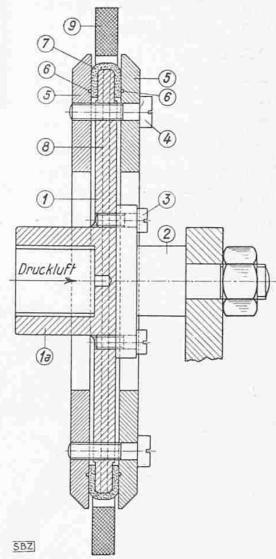


Abb. 2. Vorrichtung für Innendruckversuche

3. Eichung

a) *Bemerkungen.* Eine Eichung der beschriebenen Art muss einer einwandfreien Eichung zugänglich sein. Demgemäß ist also im vorliegenden Fall festzustellen, welcher Betrag $q_{i,eff}$ von dem total unter die Membran geleiteten Druck $q_{i,br}$ effektiv auf das Modell selbst gelangt. Zu diesem Zweck wurde vorgängig der eigentlichen Versuche ein Eichversuch an einem Eichmodell vorgenommen, nämlich an einem vollwandigen Kreisring aus Bakelit, Abb. 5. Für dessen Spannungen gelten die zuerst von Lamé abgeleiteten Formeln (1), für die Verformung die Formel (11)³⁾.

Die Eichung kann auf Grund sowohl des in einem solchen Ring erzeugten Spannungszustandes, als auch des auftretenden Verzerrungszustandes erfolgen.

b) *Die Eichung auf Grund des Spannungszustandes.* Der Eichung auf Grund des Spannungszustandes liegen die Formeln:

$$\sigma_{\circ}^{(2)} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) q_i = \frac{1}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) q_i \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) q_i = \frac{1}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) q_i \quad (2)$$

vgl. Abb. 5, zu Grunde, die folgende Extremalwerte liefern:
Innenrand ($r = a$):

$$(\sigma_{\circ})_{r=a} = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} q_i ; \quad (\sigma_r)_{r=a} = -q_i \quad \dots \quad (3)$$

Aussenrand ($r = b$):

$$(\sigma_{\circ})_{r=b} = \frac{2}{k^2 - 1} q_i ; \quad (\sigma_r)_{r=b} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

wobei unter q_i der Absolutbetrag des wirkenden Druckes zu verstehen ist.

In der Regel ergeben sich bei den spannungsoptischen und pseudospnungsoptischen Messmethoden primär nicht die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 , sondern meist ihre Differenzen ($\sigma_1 - \sigma_2$) und Summen ($\sigma_1 + \sigma_2$) vgl. [1]. Dafür bekommt man aus (1) und (2), mit $\varphi = r/a$:

$$\sigma_{\circ} - \sigma_r = \frac{2k^2}{k^2 - 1} \frac{1}{\varphi^2} q_i \quad \dots \quad (5)$$

$$\sigma_{\circ} + \sigma_r = \frac{2}{k^2 - 1} q_i \quad \dots \quad (6)$$

Während die Differenz — wie zu erwarten — von φ bzw. r abhängig ist und die Extremalwerte:

Innenrand ($r = a$, $\varphi = 1$):

$$(\sigma_{\circ} - \sigma_r)_{r=a} = \frac{2k^2}{k^2 - 1} q_i \quad \dots \quad (7)$$

Aussenrand ($r = b$, $\varphi = k$):

$$(\sigma_{\circ} - \sigma_r)_{r=b} = \frac{2}{k^2 - 1} q_i = (\sigma_{\circ})_{r=b} \quad (8)$$

¹⁾ Alle Anmerkungen stehen am Schluss, Seite 242.

²⁾ Das Zeichen \circ ersetzt ein im Setzkasten fehlendes Φ .

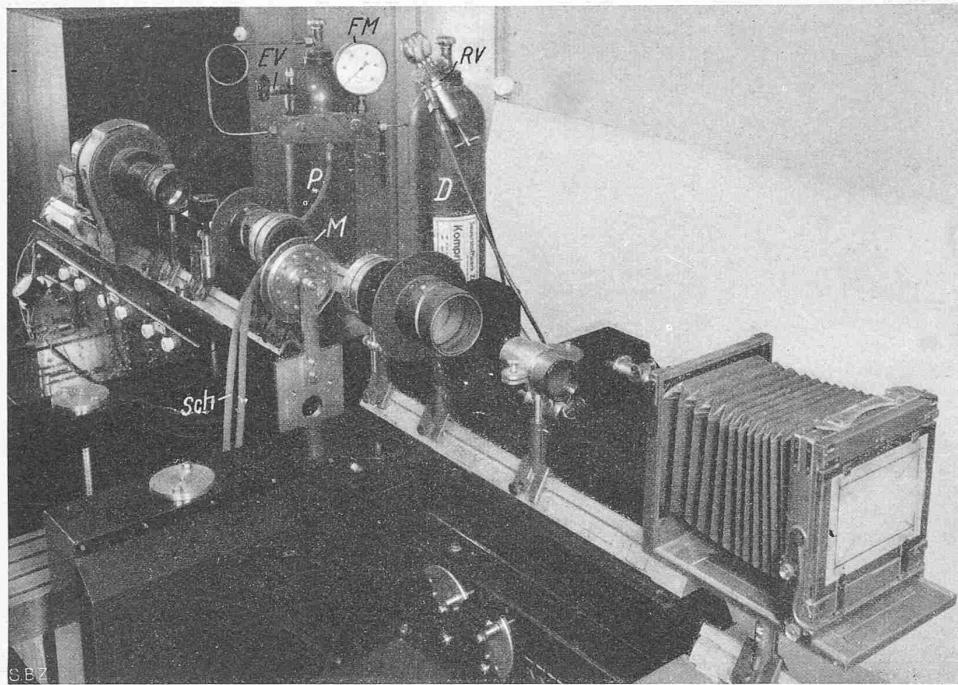


Abb. 4. Polarisationsoptische Apparatur mit Modell und Druckvorrichtung, Druckflaschen usw. S.BZ.

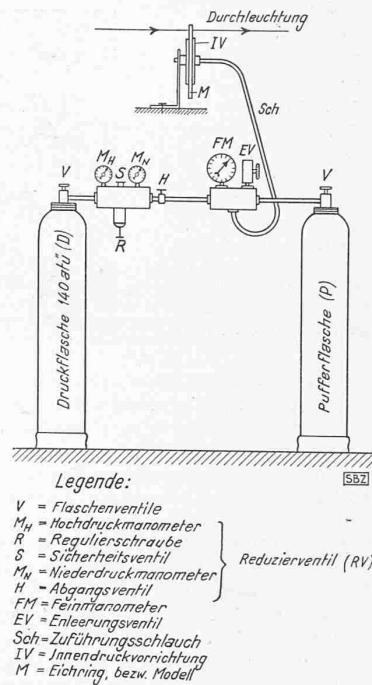
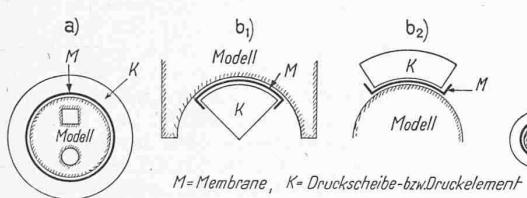


Abb. 3. Schema der Versuchsanordnung S.BZ.

Abb. 10. Schematische Darstellung von Vorrichtungen für: a) Aussendruck auf kreisrunde Scheibe; b₁) Innendruck und b₂) Aussendruck auf begrenzter Strecke; c) Druck auf Ränder mit variablem Krümmungsmass; d) Variabler Druck S.BZ.

betreffenden Zeitpunkt nicht zur Verfügung stand. Eine approximative Messung lieferte die in der Tabelle angegebenen Werte. Sie enthält außerdem die genauen, an Hand der Formeln (12) und (13) errechneten Werte, wobei die auf Grund der spannungsoptischen Eichung ermittelten Drücke eingesetzt wurden.

Berechnete und grob gemessene Ausweiterungen des Eichringes

Material: Bakelit $E = 45600 \text{ kg/cm}^2$
 $\nu = 0,36$

Druck	Berechnet		Gemessen
$q_{i \text{ eff}}$	$(u)_{r=a}$	$(u)_{r=b}$	$(u)_{r=b}$
atü	10^{-2} mm	10^{-2} mm	10^{-2} mm
6,17	3,60	3,14	5
13,72	8,02	6,98	10
22,85	13,13	11,63	15

4. Durchgeführte Messungen

Mit der neuen Vorrichtung sind mehrere, durchwegs wertvolle Ergebnisse liefernde Untersuchungen durchgeführt worden, worunter die im Auftrage der Industrie an sternförmigen Scheiben vorgenommenen Versuche besonders zu erwähnen sind. Da über diese gesondert zu berichten sein wird, begnügen wir uns in diesem Zusammenhang mit der Wiedergabe eines einzelnen Interferenzbildes, Abb. 8. Solche Aufnahmen können leicht weiter ausgewertet werden. Abb. 9 zeigt die $(\sigma_1 - \sigma_2)$ -Verteilung am Innen- und Außenrand und in den beiden Symmetrieschnitten. Da am Außenrand $\sigma_2 = 0$, so stellt hier die Kurve direkt die vorhandene Randspannung σ_1 dar; da ferner am Innenrand $\sigma_2 = -q_i$, ist auch für diesen Rand die Verteilung der Randspannung σ_1 direkt ermittelbar.

5. Weiterentwicklung

Die beschriebene Vorrichtung gestattet die experimentelle Spannungsuntersuchung in allen jenen Fällen, die charakterisiert sind durch: a) Beanspruchung der Scheibe an deren Innen-

rand, b) der ganze Innenrand ist beansprucht, c) kreisrunde Form des Innenrandes ($\varphi_i = \text{konstant}$), d) Beanspruchung gleichmäßig ($q_i = \text{konstant}$), e) Beanspruchung normal zum Rand ($\alpha = 0$).

Zu a): Eine der beschriebenen analogen Vorrichtung kann auch für am Außenrand wirkenden Druck hergestellt werden, vgl. Abb. 10. Die Scheibe 1 ist in diesem Fall als Kreisring (K) auszubilden, über dessen Innenrand (Durchmesser \varnothing_i) die Membran (M) aufgezogen wird; hierfür ist es zweckmäßig, ein Stück eines zylindrischen Schlauches zu wählen, dessen Durchmesser \varnothing_i etwas übersteigt.

Zu b): Ebenso ist es durchaus möglich, auf gleicher Konstruktionsbasis eine Vorrichtung herzustellen, die gestattet, gleichmässigen Druck auf begrenzte, in sich nicht geschlossene Strecken wirken zu lassen. Die Scheibe 1 ist in diesem Fall als Kreisbzw. Kreisring-Abschnitt auszubilden und die Membran entsprechend aufzuziehen, vgl. Abb. 10 b. Hierbei muss vielleicht mit gewissen, vermutlich geringen Abweichungen des von der Membran aufgenommenen Druckes Δq_i gegen die beiden Enden zu gerechnet werden.

Zu c): Bis anhin wurde angenommen, dass die auf Druck zu beanspruchenden Ränder konstantes Krümmungsmass aufweisen. Grundsätzlich können aber auf gleicher Konstruktionsbasis beruhende Vorrichtungen auch für Ränder hergestellt werden, für die φ nicht konstant ist, vgl. Abb. 10 c. In solchen Fällen ist die aufgezogene Membran lediglich etwas ungleich vorgespannt, was vermutlich ein etwas ungleiches Δq_i und damit eine geringfügige Abminderung der Genauigkeit zur Folge haben dürfte.

Zu d): Wesentlich komplizierter sind alle jene Fälle, wo es gilt, Vorrichtungen zu konstruieren, die ungleiche Druckverteilung ergeben. Bei relativ geringen Abweichungen des Druckes von einem Mittel führt möglicherweise die Verwendung von Membranen ungleicher Elastizität zum Ziel. Bei grösseren Abweichungen dürfte dagegen nur eine Unterteilung der Vorrichtung in mehrere aneinandergereihte Druckelemente in Frage kommen, vgl. Abb. 10 d. Je grösser die Zahl der Elemente, eine umso bessere Abstufung ist erreichbar.

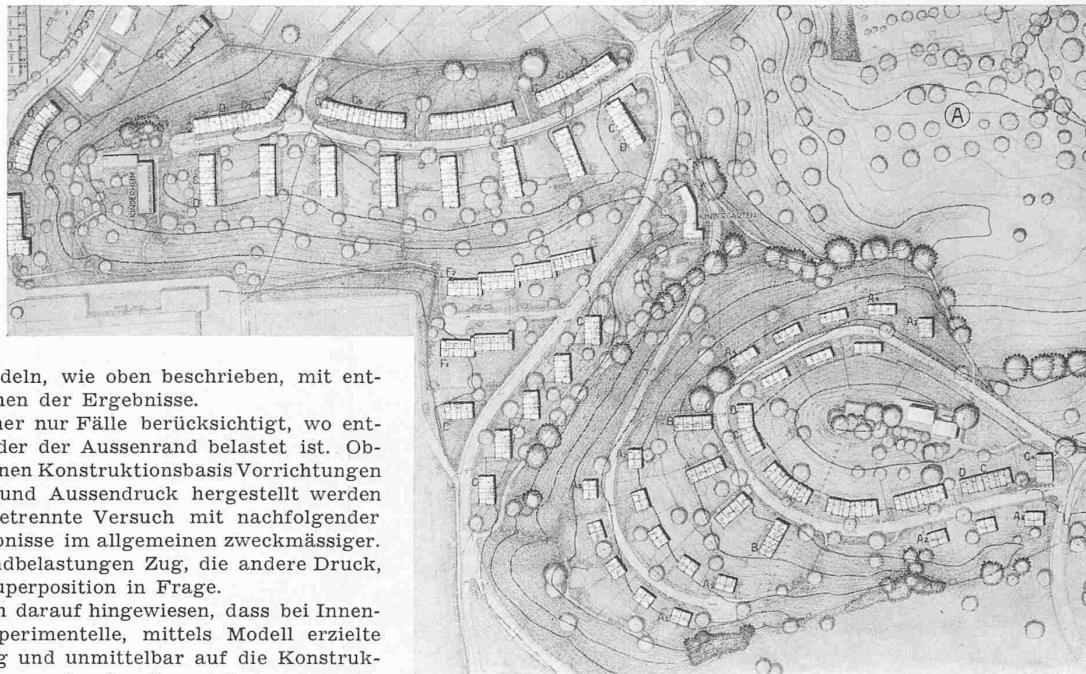
Zu e): Fast hoffnungslos ist lediglich der Fall, wo es gilt, den Rand auf Schub bzw. zusätzlich auf Schub zu beanspruchen. Ruhende Flüssigkeiten oder Gase kommen nicht in Frage, dagegen mag unter Umständen, in Sonderfällen, die Verwendung flüssender Medien zum Ziele führen.

In den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, dass es sich um Belastungen handelt, die gegen die Oberfläche gerichtet sind. Der entgegengesetzte Fall (Zug) ist experimentell

Situation A

1. Rang (1000 Fr.)
 Entwurf Nr. 20
 C. F. KREBS und
 H. v. WEISSENFLUH,
 Architekten, Luzern
 Lageplan 1 : 4000

Die Lagepläne 1 : 4000
 der fünf Situationen
 behördlich bewilligt
 am 3. November 1942
 gemäss BRB 3. X. 39



genau gleich zu behandeln, wie oben beschrieben, mit entgegengesetzten Vorzeichen der Ergebnisse.

Ferner wurden bisher nur Fälle berücksichtigt, wo entweder der Innenrand oder der Außenrand belastet ist. Obwohl auf der beschriebenen Konstruktionsbasis Vorrichtungen gleichzeitig für Innen- und Außendruck hergestellt werden können, ist doch der getrennte Versuch mit nachfolgender Superposition der Ergebnisse im allgemeinen zweckmässiger. Ist eine der beiden Randbelastungen Zug, die andere Druck, kommt ohnehin nur Superposition in Frage.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass bei Innen-Druckversuchen die experimentelle, mittels Modell erzielte Lösung nur dann fertig und unmittelbar auf die Konstruktion übertragbar ist, wenn entweder die am Außenrand wirkende Beanspruchung in sich im Gleichgewicht ist, oder aber die Poisson'sche Konstante des Modellmaterials mit derjenigen der wirklichen Konstruktion übereinstimmt. Andernfalls muss ein die notwendigen Korrekturen liefernder Ergänzungsversuch ausgeführt werden, vgl. [1].

Anmerkungen

¹⁾ Bei den ersten, hier beschriebenen Versuchen betrug der Außendurchmesser der Scheibe 1 \varnothing_a 122 mm, der Pressringe 5 131 mm. Als Membran wurde ein Stück eines Motorradschlauches mit einem mittleren Durchmesser $\varnothing_m = 67$ mm, einer Breite $b = 25$ mm und einer Dicke $d = 2$ mm benutzt. Nach Aufziehen dieses Gummis betrug der Außendurchmesser nur 125 mm (statt 122 + 4 = 126 mm), nach Anziehen der Dichtungsschrauben dagegen 127 mm (statt nur 126 mm), was die Angaben über den Spannungszustand des dem Modell nächstliegenden Teiles der Membran beweisen. Der Innendurchmesser der ersten, mit der geschilderten Vorrichtung geprüften Modelle betrug $\varnothing_i = 130$ mm.

²⁾ Beim Ueberschreiten dieses Wertes beobachtete man ein Herausquellen der Membran, das unmittelbar zu deren Bersten führte. Für die Membran stellt das Modell gewissermassen einen Schutzring dar. Ohne diesen Schutz würde die Membran nur einen Bruchteil, schätzungsweise 10 %, des genannten Maximaldruckes aushalten.

³⁾ Diesen Formeln liegen die Voraussetzungen der klassischen Elastizitätstheorie zugrunde. Insbesondere werden die Verzerrungen als so klein angenommen, dass Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen. Dies trifft umso besser zu, je grösser E .

Allgemein wird nun für «technische Werkstoffe» angenommen, dass für diese in der Regel die oben erwähnte Voraussetzung genügend genau zutrifft, d. h. dass die Korrekturen effektiv so verschwindend gering sind, dass sie ohne weiteres vernachlässigt werden dürfen. Auf die Kunststoffe der technischen Spannungsoptik (Celluloid $E = 10000 \div 35000$ kg/cm², Phenolharze $E = 35000 \div 55000$ kg/cm²) sind die Lösungen der klassischen Theorie ohne weiteres anwendbar. Die untere Grenze ihrer Anwendbarkeit dürfte dagegen bei Materialien wie Gummi ($E \approx 5$ kg/cm²), Gelatine ($E \approx 0,2 \div 3$ kg/cm²) wesentlich unterschritten sein. Bedauerlicherweise fehlen noch Untersuchungen, die über die Grösse der notwendigen Korrekturen bei relativ kleinem E Aufschluss geben.

⁴⁾ Die angegebenen Formeln setzen einen *ebenen Spannungszustand* voraus, d. h. im allgemeinen, dass l gegen alle übrigen Abmessungen klein ist. Die Tatsache $\sigma_o + \sigma_r = \text{const}$ bedeutet nun, dass sich die Scheibendicke gleichmässig ändert, die Deckflächen sich somit nur parallel zueinander verschieben, nicht aber verwölben. Infolgedessen können viele einzelne Scheiben aneinander gereiht werden, ohne sich gegeneinander zu zwängen, und der ebene Spannungszustand herrscht auch in gleich beanspruchten Zylindern beliebiger Länge; auch die Formeln des *ebenen Verzerrungszustandes* bleiben anwendbar.

Kann sich der Zylinder in z -Richtung nicht frei deformieren, so hat man es lediglich mit einem ebenen *Verzerrungszustand* zu tun; in der z -Richtung sind dann Spannungen von der Grösse $\sigma_z = \nu(\sigma_o + \sigma_r)$ vorhanden. Mit einem quasi-ebenen Verzerrungszustand und den entsprechenden Spannungen von der Grösse $\sigma_z = \nu r(\sigma_o + \sigma_r)$ hat man es dann zu tun, wenn die Einspannung der Enden nicht starr, sondern elastisch ist ($\nu = \text{Einspannungsgrad}$). Hierbei sind bei geschlossenen, auf Innendruck beanspruchten Zylindern die Drücke auf die Endflächen entsprechend mitzuberücksichtigen. Bei geschlossenen, unter Innendruck stehenden Zylindern kommen die Spannungen infolge Druck auf die Endflächen additiv hinzu.

⁵⁾ In die Formeln sind die Dimensionen des *undeformierten* Körpers einzusetzen, im vorliegenden Fall also die Dimensionen a, b, r , bzw. die Verhältnisse φ, k . Indessen liefert der Versuch nicht r , sondern r' . Es wurde deshalb in (9) bzw. (10) an Stelle von $\varphi = r/a$ der Wert $\varphi' = r'/a'$ eingesetzt. Hierbei wurde auf Grund von (15) a' zu $a + (b' - b)$ angenommen; $b' - b = (u)_{r=b}$ wurde gemessen, vgl. Tabelle. Man wäre aber praktisch auf die gleichen Eichwerte $q_{i, \text{eff}}$ gekommen, wenn man von vornherein $r' = r$ genommen und mit $\varphi = r/a$ gerechnet hätte, schon darum, weil bei der Bestimmung von r' als Mittelwert von fünf Messungen sich Abweichungen vom Mittel zeigten, die für einige Stellen grösser als die auftretenden Verzerrungen waren.

Literaturangaben

[1] Baud, «Entwicklung und heutiger Stand der Photoelastizität und der Photoplastizität im Rahmen der Gesamtexperimentalelastizität», Schweizer Archiv, 4. Jahrgang, Nr. 1 und 2, Januar und Februar 1938.

[2] Baud, «Technische Methoden photoelastischer Forschung», Schweizerische Bauzeitung, Band 100, Nr. 1 und 2, Juli 1932.

[3] Tank, Baud und Schiltknecht, «Die neuen Einrichtungen des photoelastischen Laboratoriums an der E. T. H. und an der EMPA», Schweiz. Bauzeitung, Band 109, Nr. 21 vom 22. Mai 1937.

Wettbewerb für Bebauungsvorschläge und Wohnhaustypen in billiger Preislage bei Luzern

Wie aus der Bezeichnung dieses Wettbewerbes hervorgeht handelte es sich um eine komplexe Aufgabe: Bebauungsvorschläge, also Bebauungspläne für vier, eigentlich fünf verschiedene Oertlichkeiten in der näheren Umgebung Luzerns, und Wohnhaustypen, die in beliebigen dieser Lagen anwendbar sein können. Das Preisgericht hatte also die eingereichten Arbeiten nach zwei verschiedenen Richtungen hin zu prüfen und zu bewerten. Laut Programm erfolgte die Prämiierung für die Gruppen A, B, C und D getrennt. Zudem stand es den Bewerbern frei, alle oder nur einzelne dieser Gruppen zu bearbeiten. So konnte ein Bewerber, der nur eine oder zwei Gruppen behandelt hatte, in dieser einen I. Preis erhalten (z. B. Entwurf Nr. 20), im Gesamt-