Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 119/120 (1942)
Heft: 4

Artikel: Contribution à l'étude des plaques obliques
Autor: Favre, Henry
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52398

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Contribution à l'étude des plaques obliques. — Das Kraftwerk Innertkirchen, die zweite Stufe der Oberhasliwerke. — Neuere Akkumulatoren-Lokomotiven. — Aktuelle Schmieröl- und Treibstoff-Fragen. — Die Steigsiedelung in Schaffhausen. — Eigenes Heim des Architekten Walter Henne. — Mitteilungen: Bodenvermörtelung mit Zement im Strassenbau. Sintermetall-Gleitlager. — Nekrologe: Jakob Schnurrenberger. Eduard Wagner. — Wettbewerbe: Kant. Verwaltungsgebäude Liestal. Freiplastiken auf dem alten Tonhallareal in Zürich. Neubau des Crédit foncier vaudois in Yverdon. Petruskirche mit Kirchgemeindehaus Bern. — Literatur.

Band 120 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 4

Contribution à l'étude des plaques obliques

Par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale

Les plaques sollicitées à la flexion et limitées par un cercle, une ellipse ou un rectangle ont été l'objet de nombreuses études théoriques. On rencontre cependant aussi, dans la pratique, des plaques dont le contour est un parallélogramme. Elles sont appelées «obliques» pour les distinguer de la forme rectangulaire.

Le problème de la flexion des plaques obliques n'a tenté, jusqu'ici, que de rares théoriciens[1]). Cela est certainement dû au fait que, si l'on utilise des coordonnées rectangulaires, les conditions aux limites sont moins simples à exprimer pour un parallélogramme que pour un rectangle.

Le but de ce mémoire est double.

Il est tout d'abord destiné à établir les principales équations régissant l'équilibre de la plaque limitée par un parallélogramme, en utilisant un système de *coordonnées cartésiennes obliques*, dont deux des axes sont parallèles aux côtés du parallélogramme et le troisième perpendiculaire à son plan. C'est le système le mieux adapté à la forme de plaque considérée. Il permet d'exprimer les conditions au contour avec la même commodité que les coordonnées rectangulaires le permettent dans le cas du rectangle, ce qui est un grand avantage pour les recherches théoriques.

En outre ce mémoire présente, comme application, une méthode approchée pour le calcul de la plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie.

1. Rappel des principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes rectangulaires

Considérons une plaque d'épaisseur h, sollicitée par des forces extérieures perpendiculaires aux faces et posée ou encastrée le long du pourtour[2]) (fig. 1). Choisissons un système cartésien rectangulaire fixe $Oxyz$, les axes x, y étant situés dans le plan équidistant des faces, avant la déformation. Soit $\zeta_0 = \overline{PP'}$ le déplacement, parallèle à z, d'un point $P(x, y)$ de ce plan. Le lieu des points $P'(x, y, \zeta_0)$ est la «surface élastique».

On démontre, dans la théorie des plaques, que les tensions $\sigma_x, \ldots \tau_{xy} \ldots$ en un point (xyz) sont liées aux déformations par les relations suivantes[3]):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2}\, z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right),\\
\sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2}\, z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right),\\
\tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu}\, z \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y},\\
\sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

où E désigne le module d'élasticité et $\nu = \frac{1}{m}$ le coefficient de Poisson.

[1]) Citons: *Brigatti, C. V.:* Applicazione del metodo di H. Marcus al calcolo della piastra parallelogrammica. Ric. Ingegn. 6, 1938.
Anzelius, A.: Ueber die elastische Deformation parallelogrammförmiger Platten. Bauingenieur 20, 1939.
Vogt, H.: Die Berechnung schiefwinkliger Platten und plattenartiger Brückensysteme. Dissertation der Technischen Hochschule Hannover, 1940.

[2]) Une plaque est le solide découpé, dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque, est relativement petite par rapport aux autres dimensions. Les bases de ce solide constituent les «faces» de la plaque. Comme l'épaisseur est petite, on assimile souvent les faces latérales à une ligne qui est le «pourtour» ou «contour» de la plaque.

[3]) Voir par exemple: *A.* et *L. Föppl,* Drang und Zwang. Oldenbourg, Munich et Berlin 1941, p. 126 et suiv.

Les formules (1) permettent de calculer les tensions dès que l'on connaît $\zeta_0(x, y)$. Cette fonction doit 1°) satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre:

$$\Delta\Delta\zeta_0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right) = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3}\, p\,, \quad (2)$$

$p(x, y)$ étant la charge par unité de surface; 2°) remplir les conditions au contour.

Le travail intérieur de déformation est donné par l'intégrale double suivante, étendue à la surface F de la plaque:

$$A = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{(F)} \left\{\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right\} dF\,. \quad (3)$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit, pour une déformation définie par une variation $\delta\zeta_0$ de ζ_0 qui satisfait aux conditions imposées au contour:

$$\iint_{(F)} p\, \delta\zeta_0\, dF - \delta A = 0\,. \quad \ldots \quad (4)$$

2. Principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes obliques

Pour établir ces équations, nous utiliserons les relations (1) à (4) et ferons un changement de coordonnées.

Soit x, y, z le système précédemment défini. Nous introduisons un second système u, v, z tel que les axes u, z coincident respectivement avec x, z, l'axe v étant situé dans le plan x, y et faisant l'angle α avec u (fig. 2).

Les formules de transformation sont (fig. 3):

$$x = u + v\cos\alpha, \qquad y = v\sin\alpha, \qquad z = z; \quad \ldots \quad (5)$$

d'où:

$$u = x - \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad v = \frac{y}{\sin\alpha}; \quad \ldots \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Remarquons que ζ_0 peut être considéré comme fonction composée des variables indépendantes x, y:

$$\zeta_0 = \zeta_0\,[u(x, y), v(x, y)],$$

d'où les formules de transformation suivantes:

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\,1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\,0,$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\,. \quad \ldots \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\,. \quad \ldots \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}\,. \quad \ldots \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\right) = \left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - \frac{2}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2}\,. \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial \zeta_0}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u\, \partial v}\,. \quad \ldots \quad (11)$$

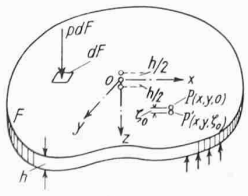

Fig. 1

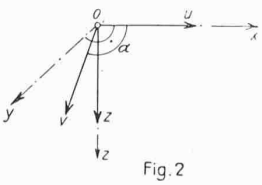

Fig. 2

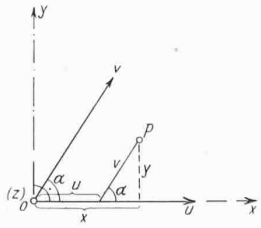

Fig. 3

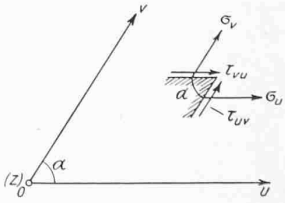

Fig. 4

SBZ

$$\Delta \zeta_0 = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right). \quad (12)$$

Compte tenu de (9), (10) et (11), les équations (1) s'écrivent, après quelques transformations:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{\nu E z}{(1-\nu^2)\sin^2\alpha}\left[\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{\nu}\sin^2\alpha\right)\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial v^2}\right],\\
\sigma_y &= -\frac{\nu E z}{(1-\nu^2)\sin^2\alpha}\left[\left(\frac{1}{\nu}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u^2} - \frac{2}{\nu}\cos\alpha\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial v^2}\right],\\
\tau_{xy} &= \frac{E z}{(1+\nu)\sin\alpha}\left(\cos\alpha\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u\,\partial v}\right),\\
\sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1')$$

L'équation (2) devient, en appliquant deux fois (12):

$$\frac{1}{\sin^4\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\cdot \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial v^2}\right) = \frac{12(1-\nu^2)\,p}{E h^3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial u^4} + \frac{\partial^4\zeta_0}{\partial v^4} - 4\cos\alpha\left(\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial u^3\,\partial v} + \frac{\partial^4\zeta_0}{\partial u\,\partial v^3}\right) + \\
&+ 2(1 + 2\cos^2\alpha)\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial u^2\,\partial v^2} = \frac{12(1-\nu^2)\sin^4\alpha\, p}{E h^3}
\end{aligned}} \quad (2')$$

Telle est l'équation différentielle de la surface élastique, en coordonnées obliques.

L'expression (3) du travail de déformation s'écrit, en remarquant que $dF = \sin\alpha\, du\, dv$:

$$\boxed{\begin{aligned}
A = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)\sin^3\alpha}\iint_{(F)}\Bigg\{&\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial v^2}\right)^2 + \\
&+ 2(\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha)\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial v^2} + \\
&+ 2[2\cos^2\alpha + (1-\nu)\sin^2\alpha]\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u\,\partial v}\right)^2 - \\
&- 4\cos\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial v^2}\right)\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial u\,\partial v}\Bigg\}\, du\, dv,
\end{aligned}} \quad (3')$$

et le principe des travaux virtuels (4):

$$\boxed{\sin\alpha\iint_{(F)} p\,\delta\zeta_0\, du\, dv - \delta A = 0.} \quad \ldots \quad (4')$$

Revenons au système (1'). Dans les seconds membres des trois premières équations ne figurent que les variables u, v, z. Par contre, dans tous les premiers membres, les indices des tensions sont encore x, y, z. Pour introduire les indices u, v, z définissons les *composantes des tensions en coordonnées obliques.*

A cet effet, soient deux éléments de surface respectivement parallèles aux axes u, z et v, z (fig. 4). En décomposant la tension totale, relative au premier élément, suivant les directions u et v, on obtient deux composantes que nous désignerons par τ_{vu} et σ_v. De même, en décomposant la tension totale relative au second élément, on définit σ_u et τ_{uv}. (à suivre)

Das Kraftwerk Innertkirchen, die zweite Stufe der Oberhasliwerke

Nach Angaben der Bauleitung der Kraftwerke Oberhasli, insbesondere von Direktor Dr. h. c. A. KAECH und der Oberingenieure H. JUILLARD und F. AEMMER zusammengefasst von Ing. W. Jegher

(Fortsetzung von Seite 30)

III. Beschreibung der einzelnen Teile des Werkes, nebst Angaben über die Bauausführung

1. WASSERFASSUNG HANDECK

Die Wasserfassung besteht aus einem festen Wehr im Aarebett, Kies- und Sandfang und einem Verbindungskanal zum Zulaufstollen. Der Ausgleichweiher ist vorgesehen für ein Fassungsvermögen von 125 000 m³. Er wird unmittelbar talseits der Zentrale Handeck (Abb. 10, S. 29) angelegt; seine Ausführung bedingt eine geringfügige Verlegung der Grimselstrasse.

2. DER ZULAUFSTOLLEN

Hinsichtlich der Kosten stellt der Zulaufstollen den wichtigsten baulichen Teil des Werkes dar, nimmt er doch rd. 15 Mio Fr., d. h. mehr als die Hälfte der Kosten des baulichen Teils in Anspruch. Da auch für die Betriebsicherheit die Güte seiner Ausführung von ausschlaggebender Bedeutung ist, erscheint es selbstverständlich, dass sein Projekt nach allen Seiten gründlich geprüft und die Bauverfahren zuvor durch Versuche herausgeschält worden sind.

Geologie. Verfolgen wir das geolog. Profil (Abb. 3, S. 27), von Süd nach Nord, also in Richtung des Wasserlaufs, so treffen wir zunächst auf 2,2 km Länge Aaregranit vom Typus Handeck, oft vom bankigen Habitus der Randzone. Anschliessend folgt Mittagfluh-Granit mit einer Mächtigkeit von 1,4 km, in dem Gänge von Quarzporphyr eingeschlossen sind. Alsdann durchfährt der Stollen auf 2,7 km die Schiefer- und Gneiszone von Guttannen, die deutlich geschieden ist in ein südliches Schichtpaket von dichten Hornfelsgesteinen und in eine nördliche Schicht-Folge. Schiefer- und Hornfelsgesteine treten in stark wechselnder Lagerung auf, kleine Kamine, aber wenig wasserführende Stellen; das Gebirge ist standfest. Mit 1,3 km Mächtigkeit folgt die Zone der Erstfelder-Gneise mit einem Kern aus massivem Eruptiv-Gneis. Südlich und nördlich des Kerns stehen vorwiegend geschieferte Bändergneise, von verschiedener Struktur und Habitus mit Einschlüssen von Quarzit und Hornfelsen an. Als Ueberraschung stellte sich beim Vortreiben des Stollens am Nordrand des Kerns Wasser von max. 300 l/s ein. Nun tritt der Stollen in die letzte geologische Zone ein, die bis über Innertkirchen hinaus herrscht: der 5,4 km mächtige Innertkirchner-Granit-Gneis. Trotz intensiver Schieferung ist er im allgemeinen gut standfest. Die Zone des Fensters Benzlaui ist ziemlich stark mylotinisiert und reich an Wassereintritten. Der schon erwähnte Sedimentkeil des Pfaffenkopfs wird an zwei Stellen durchfahren. Auch der Unterwasserstollen liegt am untern Ende noch auf eine kurze Strecke im Rötidolomit (Trias der helvetischen Decke am Rande des nördlichen Aaremassivs).

Stollen-Vortrieb und -Ausbruch. Vorgetrieben wird ein Stollen von 7 m² Querschnitt (Abb. 11). Sogleich nach dessen Ausbruch wird die Stollensohle, die später zum integrierenden Bestandteil der Stollenauskleidung wird, mit einem bleibenden Geleise betoniert. Auf diesem Geleise gehen alle Transporte vor sich. Zum Schutze der Arbeiter wird ausschliesslich die Nassbohrung angewandt. Bei zweischichtigem Betrieb erreichte man im Vortrieb 2,5 bis 3 m Tagesfortschritt in dichtem Quarzporphyr, gegenüber 4,5 bis 4,8 m in den kristallinen Mantelschichten des Aaremassivs. Als letzter wurde am 28. November 1941 der Stollen zwischen den Fenstern Stäubenden und Mittagfluh —

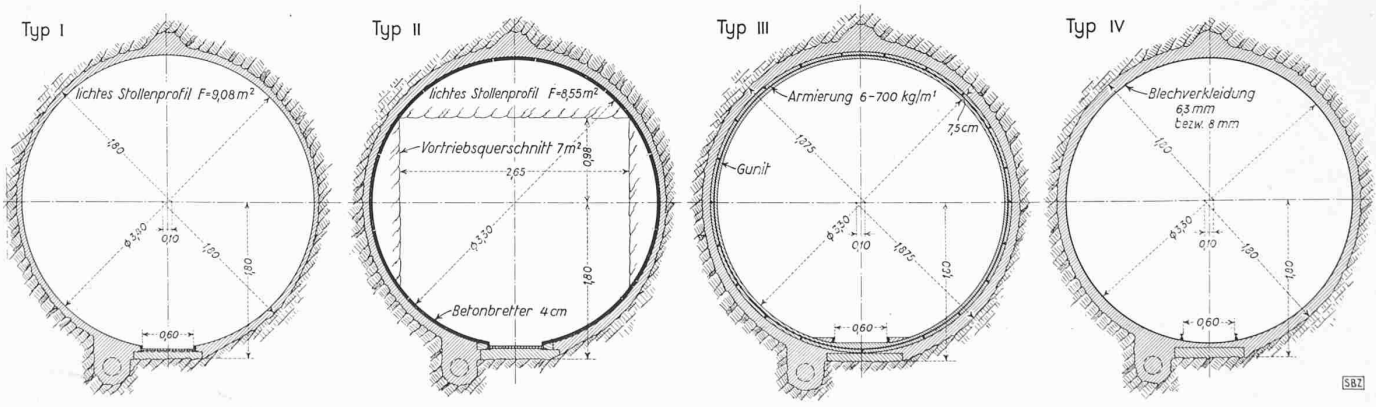

Abb. 11. Die vier Ausbau-Typen des Zulaufstollens. Masstab 1 : 80. — Baulängen siehe Abb. 3, Seite 27