Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 119/120 (1942)
Heft: 15

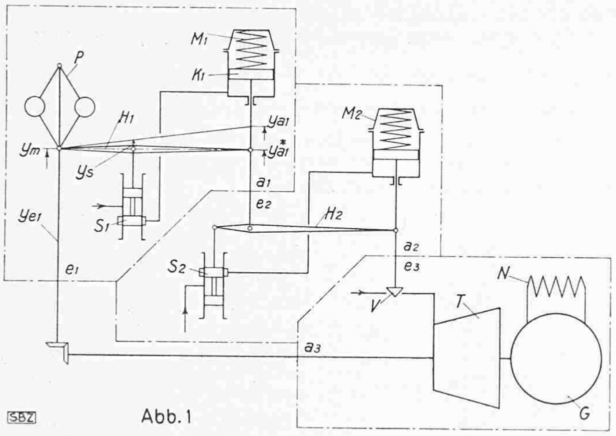
Artikel: Reglerschwingungen und schiefwinklige Vektor-Diagramme
Autor: Lüthi, Albert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52341

Band 119 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 15

Reglerschwingungen und schiefwinklige Vektor-Diagramme

Von Dipl. Ing. ALBERT LÜTHI, Zürich

Die rechnerische Behandlung von Reglerproblemen führt, wenn von Diskontinuitäten, wie Reibungen und toten Spielen, abgesehen wird und gegebenenfalls nur kleine Abweichungen von einem Gleichgewichts-, bzw. Bezugszustande untersucht werden, auf lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es sei einleitend für einen einfachen Fall eine solche Gleichung hergeleitet. Gegeben sei eine in Abb. 1 schematisch dargestellte Turbine mit mittelbar wirkendem Drehzahlregler; T ist die Turbine, G der Generator.



SBZ Abb. 1

Wir unterscheiden verschiedene «Glieder», die wir mit strichpunktierten Linien umsäumt haben. Deren erstes bestehe u. a. aus einem Drehzahlpendel P und einem Steuerschieber S_1, der den Oelfluss von und zu einem Servomotor M_1 beherrscht. Ein Rückführhebel H_1 sei an der Muffe des Pendels, am Steuerschieber und an der Stange des federbelasteten Servokolbens K_1 angelenkt. Das Pendel sei stabil, reibungs- und trägheitslos; dann entspricht innerhalb des Hubbereiches der Muffe jeder Drehzahl eine Muffenstellung. Können die Rückwirkungen des zweiten Gliedes im Vergleich zu den Stellkräften des Kolbens K_1 vernachlässigt werden, so entspricht jeder «festen» Muffenstellung eine «feste» Stellung des Servokolbens. Unter «fest» verstehen wir, dass die Muffe, bzw. der Kolben im Momente der Betrachtung und schon lange Zeit vorher bewegungslos waren. Bewegt sich die Muffe, so weicht der Steuerschieber von seiner Mittellage ab und der Kolben K_1 gerät in Bewegung. Wir sprechen dann von flüchtigen Stellungen und Hüben, die nur durch Momentanmessungen festgestellt werden können. Im folgenden seien y_{e1}, y_m, y_s, y_{a1} die flüchtigen kleinen Abweichungen der Pendeldrehzahl, des Muffen-, Schieber- bzw. Kolbenhubes, y_{e1}^*, y_m^*, y_{a1}^* dagegen die entsprechenden festen Abweichungen von einer festen Bezugsstellung. Aus Abb. 1 folgt dann, dass die Schieberabweichung y_s proportional $y_{a1} - y_{a1}^*$ ist. Ferner sei die Servokolbengeschwindigkeit $\dot{y}_{a1}$ proportional y_s. Dann folgt, wenn Z_1 eine positive Konstante ist:

$$-Z_1 \dot{y}_{a1} = y_{a1} - y_{a1}^*$$

Nun ist, da für feste Abweichungen der Steuerschieber in Mittellage steht und daher der Hebel H_1 beim Uebergang in eine andere Stellung um einen festen Punkt der Schieberaxe gedreht wird, y_{a1}^* proportional y_m^*. Ferner ist mit Rücksicht auf die das Pendel betreffenden Voraussetzungen und unter Annahme, dass die Rückwirkungen des Hebels H_1 auf die Pendelmuffe vernachlässigt werden können, $y_m^* = y_m =$ Konstante y_{e1}[1]). Hieraus folgt

$$c'_1 y_{a1}^* = y_{e1}$$

wobei c'_1 eine negative Konstante ist. Aus den obigen zwei Gleichungen folgt schliesslich die Bewegungsgleichung des ersten Gliedes:

$$y_{e1} = c'_1 (Z_1 \dot{y}_{a1} + y_{a1}) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Hierin hat die Konstante Z_1 die Dimension einer Zeit, da andernfalls die rechtsseitige Klammer unhomogen wäre. Die reelle Konstante c'_1 nennen wir «feste» Uebersetzung, da für feste Abweichungen $\dot{y}_{a1}$ verschwindet und daher das «Hebelgesetz» $y_{e1}^* = c'_1 y_{a1}^*$ gilt.

Uebergehend zum zweiten Gliede mit dem Steuerschieber S_2, dem Servomotor M_2 und dem Rückführhebel H_2 erkennt man die gleichen Gesetzmässigkeiten wie beim ersten Gliede. Wieder soll die Rückwirkung des dritten Gliedes, genauer, des Turbinen-Einlassventiles V, gegenüber der Stellkraft des Servomotors M_2 vernachlässigbar sein. Man erhält die Bewegungsgleichung:

$$y_{e2} = c'_2 (Z_2 \dot{y}_{a2} + y_{a2}) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Konstante c'_2 ist infolge der anderen Schieberanordnung diesmal positiv. Wir betrachten schliesslich das letzte Glied bestehend aus der Turbine T mit Einlassventil V, Generator G und Netz N. Der dem Turbinenrotor zugeführte Leistungsüberschuss ΔL_e sei proportional der flüchtigen Ventilhubabweichung y_{e3}. Das heisst es sei $\Delta L_e = k_e y_{e3}$. Der vom elektrischen Netze aufgenommene Leistungsüberschuss sei proportional der flüchtigen Drehzahlabweichung y_{a3}, d. h. es gelte $\Delta L_a = k_a y_{a3}$. Für die Beschleunigung $\dot{y}_{a3}$ des Rotors lässt sich dann schreiben:

$$Z_b \dot{y}_{a3} = \Delta L_e - \Delta L_a = k_e y_{e3} - k_a y_{a3} \quad \ldots \quad (3\text{v})$$

oder wenn wir setzen:

$$Z_b \frac{1}{k_a} = Z_3, \text{ und } c'_3 = \frac{k_a}{k_e}$$

$$y_{e3} = c'_3 (Z_3 \dot{y}_{a3} + y_{a3}) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Hält man den Eingang der Glieder in der Bezugsstellung fest, wobei $y_{eg} = 0$ $(g = 1, 2, 3)$ zu setzen ist, so ist der Ausgang dennoch einer «Eigenbewegung» fähig, denn die verbleibende homogene Gleichung hat die Lösung:

$$y_{ag} = a\, e^{-\frac{z}{Z_g}}$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Z_g ist daher die Zeit, die verstreicht, bis eine Auslenkung y_{ag} auf den e-ten Teil abgeklungen ist. Wir nennen sie «Folgezeit», da sie darüber Auskunft gibt, wie rasch der Ausgang den Bewegungen des Einganges folgt. Für Z_1 und Z_2 sind die Ausdrücke Schluss- oder Stellzeit gebräuchlich. Nun seien Y_{eg} und Y_{ag} die Masse, die die Bezugsstellung festlegen. Teilen wir die Gleichungen 1, 2, 3 beidseitig durch Y_{eg} und klammern rechts Y_{ag} aus, so erhalten wir das Gleichungssystem:

$$x_{eg} = c_g (Z_g \dot{x}_{ag} + x_{ag}) \qquad g = 1, 2, 3 \quad \ldots \quad (4)$$

Hierin ist $c_g = c'_g Y_{ag}/Y_{eg}$ eine dimensionslose Konstante. Auch die Grössen $x_{eg} = y_{eg}/Y_{eg}$, $x_{ag} = y_{ag}/Y_{ag}$ sind dimensionslos. Wir nennen sie, wie üblich, «bezogene Abweichungen». Ergänzen wir die Gleichungen (3a) durch die Bedingungen $x_{a1} = x_{e2}$, $x_{a2} = x_{e3}$, $x_{a3} = x_{e1}$ und eliminieren die überzähligen Unbekannten, so erhalten wir die Regulier-Differentialgleichung dritter Ordnung mit:

$$a_0 x_{e1} + a_1 \dot{x}_{e_1} + a_2 \ddot{x}_{e_1} + a_3 \dddot{x}_{e_1} = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

$$a_0 = 1 - \frac{1}{c_1 c_2 c_3}$$

$$a_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$a_2 = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$$

$$a_3 = Z_1 Z_2 Z_3$$

wobei die Punkte Ableitungen nach der Zeit bedeuten. Man bemerkt sofort, dass die Koeffizienten dieser Gleichung symmetrische Funktionen der Konstanten der Glieder sind. Es ist daher für den zeitlichen Verlauf der Abweichungen gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Glieder geschaltet werden, oder in welcher Reihenfolge drei gegebene Zeitgrössen als Folgezeiten oder drei dimensionslose Grössen als Konstante auf die Glieder verteilt werden.

Wir nennen eine Anordnung von Gliedern nach Abb. 1, wo ein Glied an das andere gereiht ist und schliesslich das letzte

[1]) Besteht zwischen y_{e1} und y_m keine lineare Beziehung, so ersetzen wir näherungsweise, wie üblich, die Kurve der Beziehung zwischen beiden Grössen durch deren Tangente im Bezugspunkte. Hiervon machen wir ständig Gebrauch ohne darauf zurückzukommen. Die Berechtigung hierzu schöpfen wir unter Beschränkung auf genügend kleine Abweichungen aus dem Reihenentwicklungssatze von Taylor.

wieder mit dem ersten verbunden ist, eine geschlossene Kette. Allgemein werden die Glieder nicht immer so einfacher Art sein, wie in unserem Beispiel, sondern Ableitungen höherer Ordnung enthalten. Ein häufig vorkommendes Glied, bei dem z. B. ausser der ersten Ableitung der Abweichung auch die zweite eine Rolle spielt, ist das träge Drehzahlpendel mit Oelkatarakt. Hätten wir ein solches Pendel in unser Beispiel einbezogen, so wäre die Ordnung unserer Differentialgleichung auf 5 angestiegen. Noch unübersichtlichere Verhältnisse liegen vor, wenn die Glieder nicht nur hintereinander, sondern teilweise parallel geschaltet sind, wodurch die Ketten zu «Netzen» erweitert werden. Man stelle sich z. B. neben dem Gliede 1 ein zweites Glied 1′ mit der Zeitkonstanten Z_1' vor; es ist dann $x_{e\,1} = x_{e\,1'}$. Mittels eines Verbindungshebels zwischen den Stangen des Servomotors K_1 und K_1' kann leicht $x_{e\,2} = \frac{x_{a\,1} + x_{a\,1'}}{2}$ gemacht werden. Die beiden Glieder 1 und 1′ sind dann parallel geschaltet. Aehnliche Schaltungen kommen bei Isodromsteuerungen vor.

Wir wollen uns ferner bewusst bleiben, dass wir die Glieder unseres Beispieles vereinfachend idealisiert haben, indem wir voraussetzten, dass sie einen Eingang und einen Ausgang haben, derart, dass Störungen am Eingang auf den Ausgang, nicht aber Störungen am Ausgange auf den Eingang übertragen werden. Solche Glieder nennen wir gerichtete Glieder. Allgemeine Glieder, in denen eine Störung sowohl vorwärts, wie auch rückwärts wandern kann, ergeben weniger übersichtliche Resultate. Allgemein erhält man, wie eben angedeutet, Gleichungen von der Form:

$$u = \sum_{m=0}^{n} c_m x^{(m)} = 0 \qquad (6)$$

worin $x^{(m)}$ die m-te Ableitung der Abweichung x nach der Zeit z bedeutet. Diese Gleichung wird bekanntermassen durch den Ansatz:

$$x = a e^{\xi z} \qquad (7)$$

$$x^{(m)} = a e^{\xi z} \xi^m = x \xi^m \qquad (8)$$

befriedigt, worin a eine Konstante, e die Basis der natürlichen Logarithmen, ξ ein Parameter und z die Zeit ist. Man erhält aus (6) dann

$$\mu = \frac{u}{x} = \sum_{m=0}^{n} c_m \xi^m = 0 \qquad (9)$$

Sind die n-Lösungen ξ_r dieser charakteristischen Gleichung gefunden, so hat die allgemeine Lösung der Gleichung (6) die Form:

$$l = \sum_{r=1}^{n} a_r e^{\xi_r z} \qquad (10)$$

wobei die Konstanten a_r den Anfangsbedingungen anzupassen sind.

Wir sahen, dass unser einfaches einleitendes Beispiel bereits schon auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung führte, sodass eine charakteristische Gleichung dritten Grades zu lösen wäre. Das Aufsuchen der Lösungen von Gleichungen höheren als zweiten Grades ist aber im allgemeinen immer mühsam. Man hat sich daher in der Literatur meist begnügt, mittels einer von Hurwitz angegebenen Determinante zu entscheiden, ob die Lösungen nur negative oder auch positive Realteile enthalten. Im ersten Fall ist der Regler möglicherweise brauchbar, da die freien Schwingungen mit der Zeit abklingen, im zweiten Fall dagegen sicher unbrauchbar.

Neuerdings hat Feiss[2]) eine Methode angegeben, die in vielen Fällen auf Grund eines Kriteriums von Nyquist die gleiche Abschätzung mittels rechtwinkliger Vektordiagramme ermöglicht. Ferner werden in einer Untersuchung von Bilharz[3]), allerdings unter Zuhilfenahme weniger elementarer mathematischer Mittel, interessante graphische Sätze aus der Hurwitz-Determinante abgeleitet. Alle diese Mittel geben eine wertvolle Orientierung, genügen aber dem praktisch tätigen Konstrukteur nicht. Er muss wissen, wie lange es schlimmsten Falles geht, bis die Schwingungen der von ihm entworfenen Regler abgeklungen sind.

Wir zeigen im Folgenden, dass fast so einfach wie im Verfahren von Feiss, mittels schiefwinkliger Vektordiagramme entschieden werden kann, ob die Lösungen der Reguliergleichung eine bestimmte Mindestdämpfung aufweisen. Dies ist nämlich dann der Fall, wenn in den Lösungen

$$\xi_r = \alpha_r + \omega_r i = \varrho_r (\cos\varphi_r + i \sin\varphi_r) = \varrho_r e^{i\varphi_r} \qquad (11)$$

$$\alpha_r < \alpha_e < 0 \qquad (12\,a)$$

$$\pi \geqq |\varphi_r| \geqq |\varphi_e| > \frac{1}{2}\pi \qquad (12\,b)$$

ist, wobei α_e und φ_e zwei bestimmte Zahlen sind. Die Ungleichung (12 a) nennen wir «Bedingung der absoluten Mindestdämpfung», die Ungleichung (12 b) «Bedingung der relativen Mindestdämpfung». Der Sinn dieser Bezeichnungen wird klar, wenn man die in Gleichung (10) paarweise auftretenden Partial-Lösungen mit konjugiert komplexen Exponenten ξ_r, $\overline{\xi}_r$ und konjugiert komplexen Konstanten a_r, $\overline{a}_r$ zu reellen Gliedern zusammenfasst. Man erhält dann beispielsweise:

$$l_r = a'_r e^{\alpha_r z} \sin(z_0 + \omega_r z) \qquad (13)$$

Offenbar gibt hiernach $d_r = -\frac{1}{\alpha_r}$ diejenige Abklingzeit an, die verstreicht, bis die Schwingungsausschläge auf den e-ten Teil des anfänglichen Ausschlages abgeklungen sind. Teilt man diese Abklingzeit durch die Schwingungszeit $2\pi/\omega_r$, so erhält man in $-\frac{1}{2\pi}\operatorname{tg}\varphi_r$ die Anzahl der in der Abklingzeit enthaltenen Schwingungen, welche meist gebrochen und daher nicht anschaulich ist. Am deutlichsten tritt die Rolle von φ als Dämpfungscharakteristikum hervor, wenn man das Verhältnis ν_r zweier aufeinander folgender Schwingungsamplituden berechnet. Dieses Verhältnis bestimmt sinnfällig die Form der Schwingungs-Kurven. Dasselbe gilt dann auch von φ_r, denn es gilt $\nu_r = e^{2\pi \cot \varphi_r}$. Dagegen legt α_r sozusagen nur den Zeitmassstab des Schwingungsbildes fest.

Nach allem setzt also die Bedingung (12 a) der Abklingzeit eine obere Schranke $d_e = -\frac{1}{\alpha_e}$, während die Bedingung (12 b) die Grösse einer Schwingungsamplitude unter einen bestimmten Bruchteil $\nu_e = e^{2\pi \cot \varphi_e}$ der vorangehenden Amplitude beschränkt. Im Vergleiche mit der vorhergehenden Schwingung liegt der «relative» Charakter dieser Schranke.

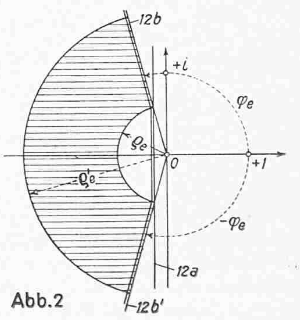


Abb. 2

Versetzen wir uns mit Abb. 2 in die Zahlenebene, so beschränken die Bedingungen (12 a) und (12 b) die Lösungen der charakteristischen Gleichung auf einen sich gegen das negativ Unendliche öffnenden, zur reellen Axe symmetrischen Trapezbereich, dessen sichtbaren Rand wir durch eine Doppellinie hervorgehoben haben. Ist die Bedingung (12 b) erfüllt, so wird, wie aus der Abb. hervorgeht, die Bedingung (12 a) sicher erfüllt, wenn die noch engere, aber bequemere Bedingung

$$\varrho > \varrho_e \qquad (12\,c)$$

eingehalten wird. Wir führen, um mit unseren Betrachtungen im Endlichen bleiben zu können, noch eine weitere Schranke ϱ'_e ein und fordern zusätzlich $\varrho < \varrho'_e$. Diese Bedingung hat dann überdies einen praktischen Wert, wenn zwecks Vereinfachung der Reglergleichungen die Massen gewisser Elemente vernachlässigt wurden, was oberhalb einer bestimmten Schwingungs-Frequenz nicht mehr zulässig ist, sodass Lösungen höherer Frequenz wegbedungen werden müssen.

Wir verwenden im Folgenden eine Ueberlegung, von der in spezieller Form sowohl schon Hurwitz[4]) bei der Ableitung seiner Determinante, als auch neuerdings Raid[5]) bei der vereinfachten Begründung des Kriteriums von Nyquist ausgehen.

Es seien (vgl. Abb. 3) $\xi_{\nu\,1}$ und $\xi_{\nu\,2}$ zwei feste Punkte in der Zahlenebene. Ferner sei ξ ein Punkt eines geschlossenen doppelpunktfreien Weges in derselben. $[\xi]$ bedeute die Gesamtheit dieser Punkte, also den Weg selbst. Der Punkt ξ durchlaufe nun den Weg $[\xi]$ einmal in positivem Umlaufsinn, wobei das Innere des umfahrenen Bereiches links liegt. Dann nimmt das Argument von $(\xi - \xi_\nu)$ um 2π oder um Null zu, je nachdem ξ_ν, wie $\xi_{\nu\,1}$, im Innern des umfahrenen Bereiches, oder wie $\xi_{\nu\,2}$ ausserhalb desselben liegt.

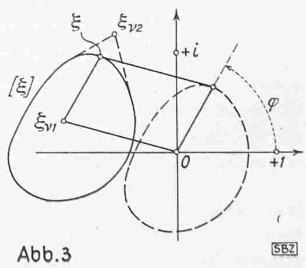


Abb. 3 SBZ

Nun kann aber die linke Seite der Gleichung (9) bekanntlich als Produkt aus n Faktoren $(\xi - \xi_\nu)$ aufgefasst werden, d. h. es gilt, wenn $c_n = 1$ vorausgesetzt wird:

[2]) *R. Feiss:* Bestimmung der Regelungsstabilität an Hand des Vektorbildes. «Z.VDI» (1940), Nr. 43.

Ferner derselbe: Eine neue Methode zur Bestimmung der Stabilität von Regulierungen. SBZ, Bd. 118 (1941). Nr. 6, S. 61*.

[3]) *H. Bilharz:* Geometrische Darstellung eines Satzes von Hurwitz für Frequenzgleichungen fünften und sechsten Grades. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21, 1941, Nr. 2.

[4]) *A. Hurwitz:* Mathematische Annalen 46. 1895. S. 273.

[5]) *D. G. Raid:* The necessary Conditions for Instability (or Self Oscillation) of electrical circuits. The wireless Engineer, Nov. 1937, S. 588. Vgl. auch R. Feiss: Untersuchung der Stabilität von Regulierungen anhand des Vektorbildes. Diss. Zürich 1939, S. 57 bis 67.

$$\mu = \prod_{\nu=1}^{n} (\xi - \xi_\nu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Liegen daher k von den n Nullstellen des Polynoms μ innerhalb $[\xi]$, so ist der Argumentzuwachs von μ gleich $2k\pi$. Das heisst, die $[\xi]$ entsprechende Kurve $[\mu]$ umschlingt den Nullpunkt 0 der Zahlenebene k mal; μ umläuft $0\,k$ mal in positivem Sinn. Da nun der Regler dann die geforderte Mindestdämpfung hat, wenn alle Nullstellen des Polynoms μ innerhalb der geschlossenen Randkurve $[\xi]$ des in Abb. 2 schraffierten Fächerbereiches liegen, gilt folgendes

Dämpfungskriterium A: Ein Regler hat dann und nur dann die geforderte Mindestdämpfung, wenn das durch das Polynom μ der charakteristischen Gleichung n-ten Grades (9), (14) vermittelte konforme Bild $[\mu]$ des Fächerbereichrandes $[\xi]$ den Nullpunkt der Zahlenebene n mal umschliesst.

Es ist leicht, μ aus ξ zu ermitteln. Zu diesem Zweck setzen wir $\xi = \varrho e^{i\varphi}$ in (9) ein und erhalten:

$$\mu = \sum_{m=0}^{n} c_m \varrho^m e^{i m \varphi}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} c_m \varrho^m \cos m\varphi + i \sum_{m=0}^{n} c_m \varrho^m \sin m\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Das bedeutet, dass der Realteil von μ als Projektion eines gleichwinkligen Polygonzuges mit dem Aussenwinkel φ und den Seitenlängen $c_m \varrho^m$ auf die reelle Axe aufgefasst werden kann, während der Imaginärteil durch die Projektion des gleichen Polygonzuges auf die imaginäre Axe zu deuten ist. Das Ende dieses Polygonzuges entspricht daher dem Zahlenpunkt μ. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 4 für ein Polynom dritten Grades dargestellt.

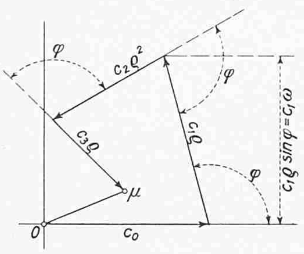


Abb. 4

Beim Umfahren des in Abb. 2 wiedergegebenen Bereiches sind offenbar φ konstant und ϱ veränderlich, beziehungsweise ϱ konstant und φ veränderlich zu wählen.

Die eben skizzierte Methode lässt sich mit Vorteil etwas modifizieren, da Reguliersysteme, wie schon aus unserem einleitenden Beispiel hervorgeht, aus in sich geschlossenen Ketten von mindestens zwei hintereinander geschalteten Gliedern bestehen. Schneiden wir die Kette vorerst nur an einer Stelle durch, so können wir in praktischen Fällen fast immer feststellen, dass die Störungen, ganz so, wie wir dies von den einzelnen Gliedern unseres Beispieles voraussetzten, nur in einer Richtung durch die Kette gehen. Wir haben es dann mit einer gerichteten Kette zu tun, die einen Eingang und einen Ausgang hat.

Wir nennen eine solche Kette «linear übertragend» oder schlechthin «linear», wenn ihr Verhalten durch ein lineares Differential-Polynom etwa wie folgt beschrieben werden kann:

$$x_e = c\,(x_a + \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \overset{(m)}{x_a}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Hierin sei x_e die Eingangsstörung, x_a die daraus folgende Schwankung am Ausgang, und c, γ_m seien die charakteristischen Konstanten der Kette. Wird nun nachträglich der Eingang wieder mit dem Ausgang verbunden, d. h. wird die Gleichung $x_e = x_a$ wieder erzwungen, so erhält man die vollständige Reguliergleichung der geschlossenen linearen Kette:

$$u = c\,(x_a + \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \overset{(m)}{x_a}) - x_a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Macht man für x_a den Ansatz (7), (8), so erhält man mit

$$\zeta = 1 + \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \xi^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

aus (16):

$$\beta = \frac{x_e}{x_a} = c\,\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16\,\mathrm{a})$$

und mit

$$\mu = c\,\zeta - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

aus (17) wieder die Gleichung (9):

$$\mu = 0$$

Für festes x_a, d. h. für $x_a = x_a^*$, verschwindet ξ mit seinen Potenzen. Es gilt $x_e^* = c\,x_a^*$. Der reelle Proportionalitätsfaktor c sei «feste Uebersetzung» benannt. Für die komplexe Grösse ζ hingegen, die ausser vom Bau der Kette auch vom Charakter der gewählten Störschwingungen abhängt, schlagen wir die Bezeichnung «flüchtige Uebersetzung» vor, während wir β schlechthin Uebersetzung nennen. Aus unserem Dämpfungskriterium folgt, dass das Bild $[c\zeta - 1]$ des Randes $[\xi]$ des Fächerbereiches der Abb. 2 den Nullpunkt, oder, was gleichbedeutend ist, dass der Weg $[\zeta]$ den Punkt $1/c$ der reellen Axe n mal umschliessen muss, damit die Bedingungen der Mindestdämpfung erfüllt sind. Das Randbild mag als n-schleifige, in sich geschlossene Kurve unübersichtlich sein, kann aber mittels der Abbildungsfunktion $y = \sqrt[n]{\zeta}$, wobei nur einer der n Wurzelwerte zu betrachten ist, in eine Kurve übergeführt werden, die sämtliche n Wurzeln $\sqrt[n]{\frac{1}{c}}$ einmal umschliessen muss. Die Konstruktion von ζ erfolgt wieder nach Abb. 4. Die Seiten des Polygons haben, wie aus dem Vergleich der Gleichungen (9) und (18) folgt, die Längen 1, $\gamma_1 \varrho$, $\gamma_2 \varrho^2 \ldots \gamma_n \varrho^n$.

Zerfällt die Kette wie in unserem Eingangsbeispiel in q gerichtete «lineare» Glieder, und ist der Ausgang a eines jeden Gliedes g mit dem Eingang e des folgenden verbunden, so besteht folgendes Gleichungssystem:

$$x_{eg} = c_g\,(x_{ag} + \sum_{m=1}^{n_g} \gamma_{gm} \overset{(m)}{x_{ag}}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$x_{ag} = x_{e\,(g+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20^*)$$

wobei g die Zahlen 1, 2, 3 bis q annimmt. Aus diesem System lässt sich, ähnlich wie in unserem Beispiel, durch Elimination eine Differentialgleichung von der Form (6) gewinnen. Der Grad dieser Gleichung ist $n = \sum_{g=1}^{q} n_g$. Ist die Kette aufgeschnitten, so ist unter den Gleichungen (20*) eine weniger vorhanden, als unter den Gleichungen (20). Setzen wir, ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu berühren, voraus, der Schnitt befinde sich nach dem letzten Gliede q. Dann ist die flüchtige Abweichung x_{aq} am Ausgang dieses Gliedes identisch mit der Abweichung x_a am Ende der Kette. Führen wir für letztgenannte den Ansatz (7), (8) ein, so erhalten wir:

$$x_{eq} = \beta_q x_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

wobei

$$\beta_q = c_q\,(1 + \sum_{m=1}^{n_q} \gamma_{qm} \xi^m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

die Uebersetzung des letzten Gliedes sei. Setzen wir das erhaltene x_{eq} in die Gleichung des vorletzten Gliedes $(q-1)$, so folgt, da β_q bei gegebenem ξ eine Konstante ist:

$$x_{e\,(q-1)} = \beta_q \beta_{(q-1)} x_a$$

Setzt man $x_{e\,(q-1)}$ in die drittletzte Gleichung ein und so weiter, so erhält man schliesslich die x_a erzeugende Störung $x_e = x_{e1}$ zu:

$$x_e = x_a \prod_{g=1}^{q} \beta_g$$

und unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (16 a):

$$\beta = \prod_{g=1}^{q} \beta_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die «totale» Uebersetzung der aufgeschnittenen Kette ist gleich dem Produkte der Uebersetzungen der Kettenglieder. Dieser Satz überträgt sich auf die festen Uebersetzungen, sodass sich die Analogie mit Hebel und Räderübersetzungen wie schon im Eingangsbeispiel aufdrängt. Auf Grund der Gleichungen (23), (19), (16 a) und (9) ist ferner die in unserem Beispiel festgestellte Unabhängigkeit der Lösungen der Regulier-Differentialgleichung von der Reihenfolge der Glieder allgemein erwiesen. Die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung $\beta = 0$ ist gleich der Gesamtheit der Nullstellen der Einzelübersetzungen β_g. Die Gleichungen $\beta_g = 0$ sind oft nur ersten Grades, wie in unserem Beispiel, oder dann zweiten Grades in ξ, wie im erwähnten Fall eines trägen Drehzahlpendels, und können daher leicht errechnet werden.

Es liegt nahe, die Nullstellen der einzelnen Uebersetzungen direkt mit den Lösungen der charakteristischen Gleichung der geschlossenen Kette in Beziehung zu bringen und so zu einem in der Anwendung praktischeren Dämpfungskriterium zu gelangen:

Wir sahen, dass das Argument von β um $2k\pi$ zunimmt, wenn sich k Nullstellen von β in unserem Fächerbereiche befinden und ξ dessen Rand einmal in positivem Sinne durchläuft. Unter den gleichen Voraussetzungen nimmt das Argument von $(\beta - 1)$ um $2h\pi$ zu, wenn der Bereich h Nullstellen von $(\beta - 1)$ enthält. Das Argument des Quotienten $\frac{\beta - 1}{\beta} = 1 - \frac{1}{\beta}$ wächst somit um $2\pi(h - k)$. Da β und $\beta - 1$ gleichen Grades sind und daher gleichviele Lösungen haben, liegen, sofern alle Lösungen von β in unseren Fächerbereich fallen, dann und nur dann sämtliche Lösungen von $(\beta - 1)$ in dem selben Bereiche, wenn das Argument von $\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$ nach einem Umlauf von ξ unverändert bleibt. Wir erhalten hieraus unmittelbar ein

Dämpfungskriterium B: Ein aus einer gerichteten Kette bestehender Regler hat dann die geforderte Mindestdämpfung, wenn die Eigenschwingungen seiner hintereinandergeschalteten, gerichteten Glieder Mindestdämpfung aufweisen und überdies entweder das konforme Bild $\left[1 - \frac{1}{\beta}\right]$ des Fächerbereichrandes den Nullpunkt der Zahlenebene nicht umschliesst, oder aber das Bild $\left[\frac{1}{\beta}\right]$ des Fächerbereichrandes den Punkt $+1$ der Zahlenebene nicht umschliesst.

Es steht natürlich frei, die zu steuernde Maschine mitsamt dem Regler als ein einziges gerichtetes Glied aufzufassen, dessen Anfang und Ende miteinander verbunden sind. Setzt man gleichzeitig $|\varphi_e| = \frac{\pi}{2}$, so geht unser Kriterium in jenes von Nyquist über.

Setzt man wieder $c\zeta$ anstelle von β, so geht die Schlussbedingung von B in folgende über: Das Bild $\left[\frac{1}{\zeta}\right]$ des Fächerbereichrandes darf den Punkt $+c$ der reellen Axe nicht umschliessen.

Endbeispiel

Wir wenden zum Schlusse die gewonnene Erkenntnis auf unser Eingangsbeispiel an. Aus den Gleichungen (4) folgt, dass die β_g der Glieder je nur eine Nullstelle

$$\xi_g = -\frac{1}{Z_g}$$

haben. Ordnen wir diese nach der Grösse ihrer Absolutwerte, so lässt sich sofort folgende Bedingung anschreiben:

$$\varrho_e < \frac{1}{Z_{g\,1}} < \frac{1}{Z_{g\,2}} < \frac{1}{Z_{g\,3}} < \varrho_e' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Auf Grund eines Abschätzungssatzes der Algebra[6]) lässt sich sogar entscheiden, ob die Lösungen der Gleichungen (9) innerhalb der Schranken und ϱ_e, ϱ_e' liegen. Ist die Ungleichung 24 erfüllt, so liegen die ξ_g sicher innerhalb des Fächerbereiches und das Dämpfungskriterium B kann angewandt werden. Die in Abb. 4 wiedergegebene Konstruktion des Polynomwertes ergibt für jedes der drei Glieder ein Dreieck mit der reellen Einheit als Grundlinie und dem Aussenwinkel φ_e. Zeichnet man diese Dreiecke mit der gleichen Basis ineinander, so erhält man Abb. 5, in der gleichzeitig der Ausdruck $\left|\frac{1}{\zeta}\right|$ mittels Hilfskreisen um den Nullpunkt und Parallelen mit der Neigung φ_e aus den Einzelwerten $\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3$ konstruiert ist. Das Argument von ζ ist gleich $-(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$, wobei das Minuszeichen infolge der Symmetrie des Randbildes $\left[\frac{1}{\zeta}\right]$ bezüglich der reellen Axe auch vernachlässigt werden kann.

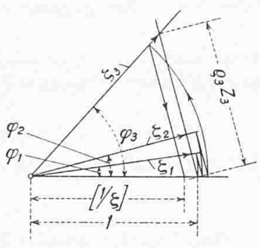


Abb.5

Wir führen der Uebersichtlichkeit halber noch zwei in der Reglertechnik geläufige Grössen ein: Die Ungleichförmigkeit δ des Regeltriebes gibt an, wie viele Prozente feste Drehzahlabweichung $x^*_{e\,1}$ nötig sind, um $-1\,^0/_0$ feste Hubabweichung $x^*_{e\,3}$ des Turbineneinlassorganes zu erzeugen. Sie ist offenbar entgegengesetzt gleich der Teilübersetzung des Steuerbetriebes, d. h. es gilt:

$$\delta = -c_1 c_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Wird dabei die Bezugsstellung $Y_{e\,3}$ des Turbineneinlassventils von seinem Leerlaufhub aus gemessen, so sagt δ bei geradliniger Hub-Leistungscharakteristik auch aus, wie viele Drehzahlprozente nötig sind, um $-1\,^0/_0$ feste Leistungsabweichung zu erzeugen.

In den meisten Veröffentlichungen wird Glied 3 in entarteter Form angenommen. Diese Form entsteht, wenn die Lastaufnahme des Netzes unabhängig von der Drehzahl ist. Die Konstante k_a in Gl. (3v) verschwindet dann. In Gleichung 3 verschwindet c_3' und Z_3 wächst über alle Grenzen, das Produkt $c_3'\,Z_3$ bleibt aber endlich. Wir nennen das Produkt $c_3 Z_3 = Z_{a\,3}$, auf das sich diese Eigenschaft überträgt, «Anlaufzeit» der Maschine und erhalten

$$x_{e\,3} = Z_{a\,3}\dot{x}_{a\,3}$$

Nehmen wir hierin $x_{e\,3}$ fest gleich $x_{e\,3}{}^*$ an und integrieren beidseitig von $z = 0$ ausgehend über die Zeit, so erhalten wir

$$z\,x^*_{e\,3} = Z_{a\,3}\,x_{a\,3}$$

d. h. $Z_{a\,3}$ ist diejenige Zeit, die verstreicht, bis bei $1\,^0/_0$ fester Eingangsabweichung die Drehzahl- bzw. Ausgangsabweichung von $1\,^0/_0$ entsteht.

Wir wählen $\delta = 0{,}10$, $Z_1 = 0{,}2$ s, $Z_2 = 1$ s, $Z_{a\,3} = 6$ s.

In Abb. 6 sind die mit diesen Werten und drei verschiedenen Bereichwinkeln $\varphi_e = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right);\ \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right);\ \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ erhaltenen konformen Randbilder A, B, bzw. D, nebst dem Einheitskreise K eingetragen. Diesen Kurven entspricht $\nu_e = 0{,}186$; $0{,}026$ bzw. $0{,}0019$, d. h. genügend gedämpfter, gut gedämpfter bzw. praktisch aperiodischer Regelvorgang, sofern der durch c gegebene Punkt der negativ-reellen Axe nicht umschlossen wird. In unserem Fall mit $c = -0{,}3$ ist demnach genügende, aber nicht gute Dämpfung nachgewiesen. Eine solche, ja sogar praktisch aperiodischer Verlauf der Reglerabweichungen kann offenbar erreicht werden, wenn man δ vergrössert und so den durch c gegebenen Punkt mehr nach links rückt. Wir haben auf unseren Bildkurven A, B, D eine Reihe verschiedener Punkte hervorgehoben und die ihnen entsprechenden ϱ-Werte angeschrieben. Verbindet man Punkte gleicher ϱ-Werte, so erhält man, wie strichpunktiert angedeutet, orthogonale Trajektorien zu den Kurven A, B, D, unter ihnen wäre das Bild der Bereichrandstücke ϱ_e, ϱ_e' zu finden.

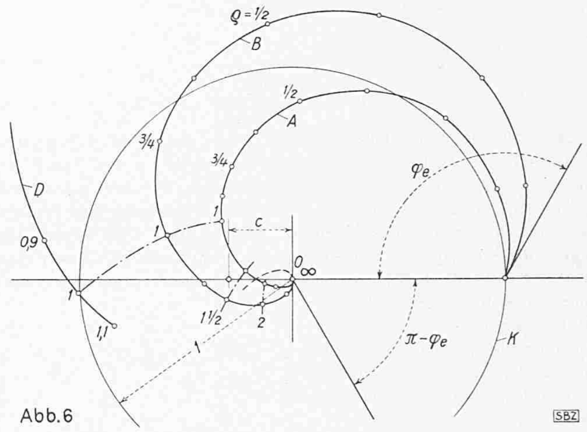


Abb.6

Der Augenschein lehrt, dass in unserem Fall der genaue Verlauf der Kurven A, B, D nicht von Belang ist, wenn nur ihre Schnittpunkte mit der reellen Axe gegeben sind und zudem bekannt ist, zwischen welchen Schnittpunkten die Kurve oberhalb und zwischen welchen sie unterhalb der Axe verläuft. Allgemein lässt sich zeigen, dass es schon genügt, ausser der Lage der Schnittpunkte noch zu wissen, ob die Axe an den Schnittstellen von oben nach unten, oder umgekehrt durchstossen wird.

Bei der Anwendung unseres Verfahrens ergeben sich leicht Ungenauigkeiten, wenn eine Zeitkonstante im Vergleich zu den andern gross ist. Hier kann aber leicht rechnerisch nachkorrigiert werden. Entartet Glied 3, wie schon angedeutet, so liegt die Nullstelle von β_3 und folglich auch eine Nullstelle von β im Nullpunkt der Zahlenebene. In der Lösung Gl. (10) befindet sich daher ein zeitunabhängiger Summand, der weder die absolute, noch die relative Dämpfung verändert und uns daher nicht weiter interessiert. Soll das Kriterium B angewandt werden, so stört zunächst, dass der Exponent ξ_3 dieser Lösung ausserhalb des in Abb. 2 gegebenen Bereiches liegt. Sollen daher die Lösungen von $\beta - 1 = 0$ sämtliche im Bereich liegen, so muss die Kurve $\left[1 - \frac{1}{\beta}\right]$ den Nullpunkt einmal und nur einmal im gleichen Umlaufsinn umschliessen, wie $[\xi]$ umlaufen wird. Das Gleiche gilt für $\left[\frac{1}{\beta}\right]$ im Bezug auf den Punkt $+1$ der reellen Axe.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, wie durch eine konforme Abbildung des Randes eines zur negativ-reellen Axe der Zahlenebene symmetrischen Fächerbereiches entschieden werden kann, ob die Eigenschwingungen eines Reglertriebes vorgeschriebenen Mindestdämpfungsbedingungen genügen. Die Punkte des Randbildes werden mittels schiefwinkliger Vektordiagramme ermittelt.

Eine neue Form aufgelöster Staumauern

Seit langem ist man bestrebt, wirtschaftlichere Staukörperformen zu finden, als die klassische dreieckförmige Gewichtstaumauer. Meistens wird als aufgelöste Staumauer der Typus mit mehrfachen Gewölben gewählt. Bei dessen Berechnung treten jedoch gewisse Schwierigkeiten auf, und der Bau wird durch kompliziertere Schalungen wieder verteuert.

Berechnet man eine Gewichtsmauer unter Anwendung der ausführlichen Methoden der Elastizitätstheorie, so kann festgestellt werden, dass die Spannungsverteilung längs einer Hori-

[6]) *O. Perron:* Algebra II, Verlag Walter de Gruyter & Co. 1933, S. 33, Satz 21.