Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 119/120 (1942)
Heft: 11

Artikel: Zur Berechnung des gelenklosen, versteiften Stabbogens
Autor: Schibler, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-52325

Band 119 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 11

Zur Berechnung des gelenklosen, versteiften Stabbogens

Von Dipl. Ing. W. SCHIBLER, Thun

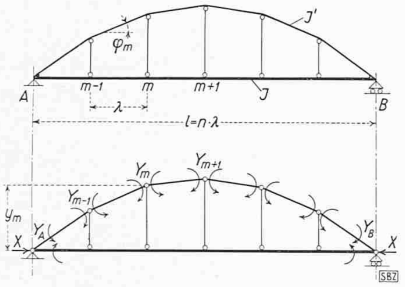

Abb. 1. System und Grundsystem

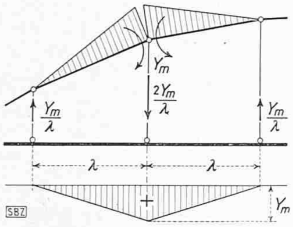

Abb. 2. Momente und Kräfte infolge Y_m

Allgemeines. Bei der gewöhnlichen Berechnung des versteiften Stabbogens wird angenommen, dass der Bogen an den Anschlussstellen der Hängestangen oder der Ständer, sowie bei seinem Anschluss an den Versteifungsträger Gelenke besitze. Diese Voraussetzung trifft in Wirklichkeit nicht zu, da man — einmal aus konstruktiven Gründen, dann wegen der räumlichen Steifigkeit — den Bogen gelenklos ausbildet. Nur beim Stabbogen unter dem Versteifungsträger werden an den Kämpfern meist Gelenke vorgesehen.

Es treten im Bogen, neben den Normalkräften, Momente und Biegespannungen auf; die letzten können nicht, wie beim Fachwerk mit steifen Knoten, als Nebenspannungen betrachtet werden: der Bogen beteiligt sich nämlich an der Momentenaufnahme und entlastet dadurch den Versteifungsträger.

Berechnung. Das folgende einfache Berechnungsverfahren wird am Stabbogen mit aufgehobenem Horizontalschub (Langerbalken) gezeigt; für den Stabbogen unter der Fahrbahn mit Kämpfergelenken gilt sinngemäss das Gleiche. Voraussetzungen: 1. Das Trägheitsmoment J des Versteifungsträgers und dasjenige J' des Bogens sind über die Feldweite λ konstant. 2. Die Feldweite λ ist unveränderlich. 3. Die Lasten greifen an den Knoten an. 4. Die Normal- und Querkräfte können bei der Berechnung der Formänderungen vernachlässigt werden. 5. Die Hängestangen sind an ihren beiden Enden gelenkig angeschlossen. (In Wirklichkeit ist dies meistens nicht der Fall, aber das Trägheitsmoment — seien die Hänger als Rundstab oder als ⊥ ausgebildet — ist so klein, dass diese Annahme berechtigt ist).

Bei Nichterfüllung einer oder mehrerer der Voraussetzungen 1 bis 4 ist die nachstehende Berechnung ebenfalls gültig, nur erhält man für die Verschiebungsgrössen weniger einfache Ausdrücke.

Als Grundsystem wird der einfache Balken AB (Abb. 1) eingeführt; die Ueberzähligen sind der Horizontalschub X und die Bogenmomente Y_A, Y_1, ... Y_m, ... Y_{n-1}, Y_B, deren Wirkungsweise aus Abb. 2 hervorgeht. Die Elastizitätsgleichungen lauten dann

$$\delta,\ \alpha_A,\ \alpha_1,\ \ldots.\ \alpha_m,\ \ldots.\ \alpha_{n-1},\ \alpha_B = 0$$

Unser System ist somit bei n Feldern $(n+2)$-fach statisch unbestimmt. Das endgültige Versteifungsträgermoment bei m beträgt:

$$M_m = M_{0\,m} - X y_m + Y_m \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Führen wir irgend ein konstantes Trägheitsmoment J_c ein, und setzen wir $\frac{6\,E\,J_c}{\lambda} = \mu$, $\frac{J_c}{J_m} = i_m$, $\frac{J_c}{J'_m} = i'_m$, so betragen die μ-fachen Verschiebungsgrössen:

$$\mu\,\delta_0 = -\sum(2\,M_{0\,m-1}\,y_{m-1} + M_{0\,m-1}\,y_m + M_{0\,m}\,y_{m-1} + 2\,M_{0\,m}\,y_m)\,i_m$$

$$\mu\,\alpha_{A0} = +M_{0\,1}\,i_1 \qquad \mu\,\alpha_{B0} = +M_{0\,n-1}\,i_n$$

$$\mu\,\alpha_{m0} = +\left[M_{0\,m-1}\,i_m + 2\,M_{0\,m}\,(i_m + i_{m+1}) + M_{0\,m+1}\,i_{m+1}\right]$$

$$\mu\,\delta_x = +2\,\Sigma(y^2_{m-1} + y_{m-1}\,y_m + y^2_m)\,i_m$$

$$\mu\,\alpha_{A\,x} = -y_1\,i_1 = \mu\,\delta_A \qquad \mu\,\alpha_{B\,x} = -y_{n-1}\,i_n = \mu\,\delta_B$$

$$\mu\,\alpha_{m\,x} = -[y_{m-1}\,i_m + 2\,y_m\,(i_m + i_{m+1}) + y_{m+1}\,i_{m+1}] = \mu\,\delta_m$$

$$\mu\,\alpha_{m\,m} = +2\,(i_m + i'_m \sec\varphi_m + i'_{m+1} \sec\varphi_{m+1} + i_{m+1})$$

$$\mu\,\alpha_{m-1,\,m} = i_m + i'_m \sec\varphi_m = \mu\,\alpha_{m,\,m-1}$$

$$\mu\,\alpha_{A\,A} = +2\,(i_1 + i'_1 \sec\varphi_1) \qquad \mu\,\alpha_{B\,B} = +2\,(i_n + i'_n \sec\varphi_n)$$

Unsere Elastizitätsgleichungen lauten, z. B. für sechs Felder:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
X\delta_x & + Y_A\delta_A & + Y_1\delta_1 & + Y_2\delta_2 & + Y_3\delta_3 & + Y_4\delta_4 & + Y_5\delta_5 & + Y_B\delta_B & + \delta_0 & = 0 \\
X\alpha_{Ax} & + Y_A\alpha_{AA} & + Y_1\alpha_{A1} & & & & & & + \alpha_{A0} & = 0 \\
X\alpha_{1x} & + Y_A\alpha_{1A} & + Y_1\alpha_{11} & + Y_2\alpha_{12} & & & & & + \alpha_{10} & = 0 \\
X\alpha_{2x} & & + Y_1\alpha_{21} & + Y_2\alpha_{22} & + Y_3\alpha_{23} & & & & + \alpha_{20} & = 0 \\
X\alpha_{3x} & & & + Y_2\alpha_{32} & + Y_3\alpha_{33} & + Y_4\alpha_{44} & & & + \alpha_{30} & = 0 \\
X\alpha_{4x} & & & & + Y_3\alpha_{43} & + Y_4\alpha_{44} & + Y_5\alpha_{45} & & + \alpha_{40} & = 0 \\
X\alpha_{5x} & & & & & + Y_4\alpha_{54} & + Y_5\alpha_{55} & + Y_B\alpha_{5B} & + \alpha_{50} & = 0 \\
X\alpha_{Bx} & & & & & & + Y_5\alpha_{B5} & + Y_B\alpha_{BB} & + \alpha_{B0} & = 0
\end{array}\right\}\ \mathrm{I}$$

Der Wert von X ist uns aber nahezu bekannt: wir wissen, dass beim gelenkigen Stabbogen der Horizontalschub durch

$$X_s = \frac{\int \frac{M_0\,y}{E\,J}\,dx}{\int \frac{y^2}{E\,J}\,dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und beim Zweigelenkbogen mit Zugband durch

$$X_z = \frac{\int \frac{M_0\,y}{E\,J}\,ds}{\int \frac{y^2}{E\,J}\,ds} = \frac{\int \frac{M_0\,y}{E\,J}\sec\varphi\,dx}{\int \frac{y^2}{E\,J}\sec\varphi\,dx} \quad \ldots \quad (3)$$

gegeben ist. Unser Wert muss offenbar zwischen den voneinander wenig verschiedenen X_s und X_z liegen, da der gelenkige Stabbogen und der Zweigelenkbogen die zwei Grenzfälle unseres Systems darstellen, der erste bei sehr steifem Versteifungsträger, der zweite bei sehr steifem Bogen.

Wir können also für X zunächst einen festen Wert H schätzen, und erhalten dann für die überzähligen Bogenmomente Y ein dreigliedriges Gleichungssystem II, das sich leicht auflösen lässt. Setzen wir

$$L_m = H\,\alpha_{mx} + \alpha_{m0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

so lautet es:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
Y_A\alpha_{AA} & + Y_1\alpha_{A1} & & & & & + L_A = 0 \\
Y_A\alpha_{1A} & + Y_1\alpha_{11} & + Y_2\alpha_{12} & & & & + L_1 = 0 \\
 & Y_1\alpha_{21} & + Y_2\alpha_{22} & + Y_3\alpha_{23} & & & + L_2 = 0 \\
 & & Y_2\alpha_{32} & + Y_3\alpha_{33} & + Y_4\alpha_{34} & & + L_3 = 0 \\
 & & & Y_3\alpha_{43} & + Y_4\alpha_{44} & + Y_5\alpha_{45} & + L_4 = 0 \\
 & & & & Y_4\alpha_{54} & + Y_5\alpha_{55} + Y_B\alpha_{5B} & + L_5 = 0 \\
 & & & & & Y_5\alpha_{B5} + Y_B\alpha_{BB} & + L_B = 0
\end{array}\right\}\ \mathrm{II}$$

Ein verbesserter Wert $\overline{X}$ für den Horizontalschub ist dann

$$\overline{X} = -\frac{\delta_0 + Y_A\,\delta_A + \ldots. + Y_m\,\delta_m + \ldots.\,Y_B\,\delta_B}{\delta_x} \quad . \quad (5)$$

aus dem sich dann wie oben die neuen Werte Y_A, Y_1 ... usw berechnen lassen; meistens wird jedoch ein einziger Rechnungsgang genügen. Die Momente Y_A und Y_B werden sehr klein sein, weil die Hängestangen ungefähr gleiche Biegelinien und Auflagerdrehwinkel des Bogens und des Versteifungsträgers bedingen, sodass die Winkeländerungen α_A und α_B nahezu Null sind. Man könnte somit von vornherein Gelenke bei A und B annehmen. Für die Spannungen im Bogen wird je nach dem Verhältnis von J' zu J und der Kernweite des Bogenquerschnittes Voll- oder Teilbelastung massgebend werden.

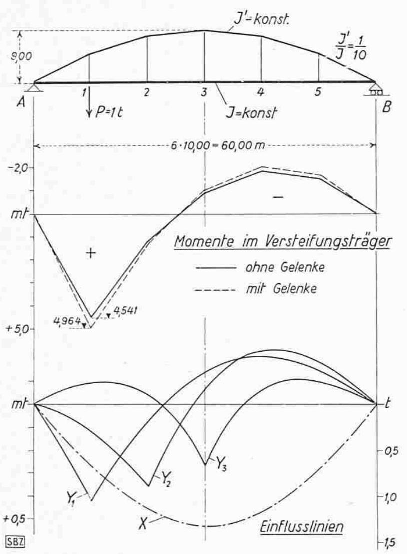

Abb. 3 veranschaulicht das Ergebnis der Rechnung; sie zeigt auch den Verlauf der Einflusslinien der statisch unbestimmten Grössen, die durch die Berechnung für $P = 1$ t in 2 und 3 erhalten wurden.

Abb. 3. Berechnungsbeispiel

Zahlenbeispiel. Der Stabbogen der Abb. 3 wird für eine Last $P = 1$ t, im Punkt 1 angreifend, untersucht. Die Verschiebungsgrössen sind in Tabelle 1 berechnet; hierbei wurde $J_c = J$ angenommen, also ist $i = 1$ und $i' = 10$.

Tabelle 1: Verschiebungsgrössen

	y	sec φ	A[1])	B[2])
A	0			$5{,}000 = -\mu\alpha_{Ax}$
1	5,00	1,1180	25,00	$28{,}000 = -\mu\alpha_{1x}$
2	8,00	1,0440	129,00	$46{,}000 = -\mu\alpha_{2x}$
3	9,00	1,0050	217,00	$52{,}000 = -\mu\alpha_{3x}$

$$\sum_A^B = 742{,}00$$

$$\mu\delta_x = 2 \cdot 742{,}00 = 1484{,}00 \text{ m}^2$$

(Forsetzung siehe rechts oben)

[1]) $A = y_{m-1}^2 + y_{m-1}\, y_m + y_m^2$

[2]) $B = y_{m-1} + 4\, y_m + y_{m+1}$

[3]) $C = 2\, M_{0\,m-1}\, y_{m-1} + M_{0\,m-1}\, y_m + M_{0\,m}\, y_{m-1} + 2\, M_{0\,m}\, y_m$

[4]) $D = M_{0\,m-1} + 4\, M_{0\,m} + M_{0\,m+1}$

	M_0	C[3])	D[4])
A	0		$8{,}333 = \mu\alpha_{A0}$
1	8,333	83,33	$40{,}000 = \mu\alpha_{10}$
2	6,667	290,00	$40{,}000 = \mu\alpha_{20}$
3	5,000	296,67	$30{,}000 = \mu\alpha_{30}$
4	3,333	213,33	$20{,}000 = \mu\alpha_{40}$
5	1,667	100,00	$10{,}000 = \mu\alpha_{50}$
B	0	16,67	$1{,}667 = \mu\alpha_{B0}$

$$\sum_A^B = 1000{,}00 \text{ m}^2\text{t} = -\mu\delta_0$$

$$\mu\alpha_{AA} = 2\,(1 + 11{,}180) = 24{,}360 \qquad \mu\alpha_{A1} = 1 + 11{,}180 = 12{,}180$$
$$\mu\alpha_{11} = 2\,(1 + 11{,}180 + 10{,}440 + 1) = 47{,}240 \qquad \mu\alpha_{12} = 1 + 10{,}440 = 11{,}440$$
$$\mu\alpha_{22} = 2\,(1 + 10{,}440 + 10{,}050 + 1) = 44{,}980 \qquad \mu\alpha_{23} = 1 + 10{,}050 = 11{,}050$$
$$\mu\alpha_{33} = 2\,(1 + 10{,}050 + 10{,}050 + 1) = 44{,}200$$

Nehmen wir als Näherungswert für X den Horizontalschub des gelenkigen Stabbogens

$$H = X_s = \frac{1000{,}00}{1484{,}00} = 0{,}67385 \text{ t}$$

so erhalten wir folgendes Gleichungssystem, wobei die L-Werte nach (4) berechnet sind, z. B.

$$\mu L_1 = 0{,}67385 \cdot (-28{,}000) + 40{,}000 = +21{,}132$$

Y_A	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_B	L
24,360	12,180						+ 4,964
12,180	47,240	11,440					+21,132
	11,440	44,980	11,050				+ 9,003
		11,050	44,200	11,050			— 5,040
			11,050	44,980	11,440		— 10,997
				11,440	47,240	12,180	— 8,868
					12,180	24,360	— 1,703

Die Lösungen sind aus der ersten Zeile der Tabelle 2 (unten) ersichtlich; aus ihnen lässt sich der verbesserte Wert von X gemäss (5) berechnen:

$$\overline{X} = -\frac{-1000{,}00 - 0{,}41}{1484{,}00} = 0{,}67413 \text{ t}$$

Eine Wiederholung der Rechnung mit $\overline{X}$ gibt die Lösungen der zweiten Zeile, und $\overline{X} = 0{,}67415$ t. (X_z nach Gleichung (3) beträgt 0,67735 t).

Tabelle 2: Momente im Stabbogen

Y_A	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_B	
+0,0066	−0,4207	−0,1171	+0,0973	+0,1841	+0,1436	−0,0019	mt
+0,0066	−0,4206	−0,1169	+0,0975	+0,1843	+0,1437	−0,0019	mt

Schraubenverbindungen — Stand der Technik

Von Dipl. Ing. L. MARTINAGLIA, Winterthur, Ingenieur der Zentralstelle für Gestaltfestigkeitsfragen bei Gebr. Sulzer A.-G.

(Schluss von Seite 112)

5 Werkstoff und Herstellung. Festigkeitswerte

51 *Durch spanabnehmende Verfahren aus Normalstählen hergestellte Schrauben.* Die bis heute durchgeführten Dauerversuche an geschnittenen Mutterschrauben aus normalen Schraubenstählen sind in dem Dauerfestigkeitsschaubild (Abbildung 34) zusammengefasst. Man erkennt aus diesem Schaubild die schon erwähnte, für alle Schraubenverbindungen gültige grundsätzliche Tatsache, dass für die Dauerhaltbarkeit einer wechselnd belasteten Schraube nicht die absolute Höhe der Beanspruchung (= Vorspannung + Anteil der Betriebskraft) massgebend ist, sondern allein die Differenz zwischen der auftretenden kleinsten und grössten Beanspruchung in der Schraube. Der ertragbare Spannungsausschlag σ_W^K ist praktisch über den ganzen nutzbaren Vorspannungsbereich gleich gross; die Höhe der Vorspannung übt nur einen geringen Einfluss auf die Grösse von σ_K^W aus. Bei geringerer oder fehlender Vorspannung nimmt allerdings der ertragbare Spannungsausschlag wesentlich ab. Der Einfluss des Schraubendurchmessers geht ebenfalls aus dem angeführten Schaubild hervor. Mit zunehmender Grösse scheint bei geschnittenen Schrauben die Zugdauerhaltbarkeit nach der Kurve Abb. 35 abzufallen; kleinere Schrauben zeigen grössere Dauerhaltbarkeiten. Versuche an grösseren Schrauben fehlen; ebenso konnte kein eindeutiger Einfluss der Gewindefeinheit auf den ertragbaren Spannungsausschlag nachgewiesen werden.

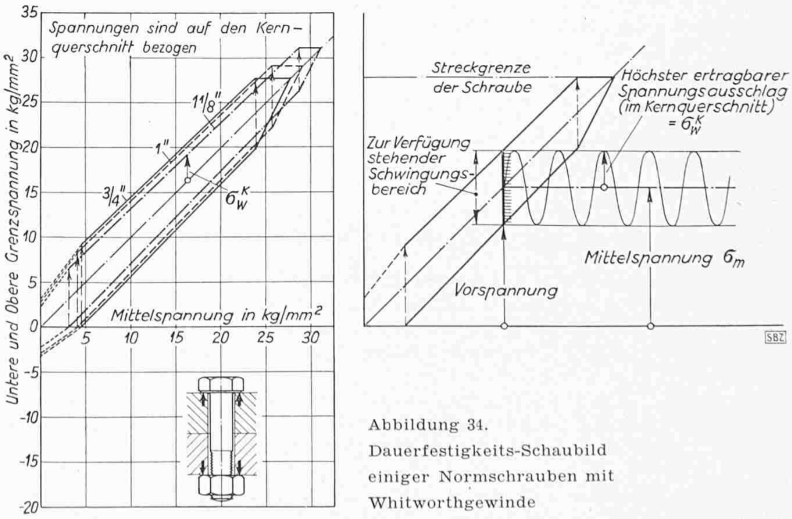

Abbildung 34. Dauerfestigkeits-Schaubild einiger Normschrauben mit Whitworthgewinde