Band 117 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 1

Zur allgemeinen Formänderungstheorie der verankerten Hängebrücke

Von Prof. Dr. F. STÜSSI, E. T. H., Zürich

1. Grundgleichungen

Auf den Versteifungsträger einer Hängebrücke (Abb. 1) wirken ausser den äusseren Belastungen q_0 (Eigengewicht g, Verkehrslast p) die Hängestangenkräfte, die wir bei dicht ausgeteilten Hängestangen und bei Berücksichtigung nur der lotrechten Kabelverschiebungen (übliche Formänderungstheorie) mit $H\,(y'' + \eta_K'')$ einführen können. Die Gesamtbelastung des Versteifungsträgers im an den Hängestangen aufgehängten Trägerteil beträgt somit

$$q = q_0 + H\,(y'' + \eta_K'') \qquad (1)$$

Der Horizontalzug H des Kabels ist mit einer Elastizitätsbedingung, die die Unverschieblichkeit der Kabelendpunkte ausdrückt, zu bestimmen. Bei frei verschieblichen Zwischenstützpunkten (Pendelstützen), d. h. bei über die Brückenlänge gleichbleibendem Horizontalzug H, lautet diese Bedingung

$$H\frac{L}{E_K F_K} + \alpha_t\, t\, L_t + \int_C^F y''\,\eta_K\, dx = 0 \qquad (2)$$

Die Kabeldurchbiegungen η_K unterscheiden sich von den Durchbiegungen η_V des Versteifungsträgers um die Hängestangenverlängerungen Δh:

$$\eta_K = \eta_V - \Delta h \qquad (3)$$

Gewöhnlich wird Δh vernachlässigt; aus Gl. 1 ergibt sich dann mit $\eta_K = \eta_V = \eta$ die das Hängebrückenproblem beherrschende Grundgleichung

$$\underline{q_0 + H y'' + H\,\eta'' = (E J\,\eta'')''} \qquad (4)$$

Es bietet jedoch keine Schwierigkeiten, in einem zweiten Rechnungsgang das Glied $H\,(\Delta h)''$ als zusätzliches Belastungsglied zu berücksichtigen.

Im Glied $H\,\eta''$ der Gl. 4, das den Einfluss der Formänderungen ausdrückt, sind sowohl H wie η'' von der Belastung q_0 abhängig; das Problem ist nicht mehr linear, das Superpositionsgesetz nicht mehr gültig. Ersetzen wir jedoch in diesem Glied $H\,\eta''$ den mit der Belastung veränderlichen Kabelzug H durch einen gedachten Festwert N, der grundsätzlich gleich gross sein soll wie H, so erscheint die Grundgleichung linearisiert und das Superpositionsgesetz ist wieder gültig [1]). Wir dürfen somit die Belastung q_0 in Teilbelastungen zerlegt denken, die einfach zu behandeln sind, und diese Teilergebnisse superponieren, wobei nur zu beachten ist, dass der eingeführte Festwert N auch bei der Untersuchung der Teilbelastungen dem Kabelzug $H_{tot.}$ des gesamten Belastungszustandes entsprechen soll. Noch wichtiger ist jedoch, dass wir nun, dank der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes, auch die Durchbiegungen η in Teildurchbiegungen zerlegen dürfen:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \eta_0 + H\,\eta_{H=1} \\ \eta'' &= \eta_0'' + H\,\eta''_{H=1} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die Gl. 4 zerfällt damit in zwei voneinander unabhängig lösbare Teilgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &q_0 + N\,\eta_0'' = (E J\,\eta_0'')'' \\ &\text{und, nach Kürzung durch } H, \\ &1\,y'' + N\,\eta''_{H=1} = (E J\,\eta''_{H=1})'' \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

von denen sich die erste auf die gegebene äussere Belastung q_0, die zweite auf den Belastungszustand $H = 1$ bezieht.

Wir können die beiden Lastanteile q_0 und $N\,\eta''_0$ zusammenfassen:

$$\overline{q_0} = q_0 + N\,\eta_0'';$$

die zugehörigen Momente und Querkräfte im Grundsystem einschliesslich Formänderungseinfluss sollen mit $\overline{M_0}$ und $\overline{Q_0}$ bezeichnet werden. Die Momente und Querkräfte im wirklichen, einfach statisch unbestimmten Tragwerk ergeben sich, nach Lösung der Elastizitätsbedingung, aus der Superposition

$$\left.\begin{aligned} M &= \overline{M_0} + H\,\overline{M_H}_{=1} \\ Q &= \overline{Q_0} + H\,\overline{Q_H}_{=1} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Die Elastizitätsbedingung Gl. 2 kann nun so geschrieben werden, dass sie eine direkte Bestimmung des überzähligen Horizontalschubes H erlaubt:

[1]) *F. Stüssi:* Zur Berechnung verankerter Hängebrücken. «Abhandlungen» I. V. B. H. Bd. 4, 1936.

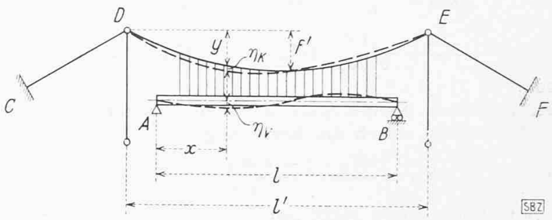

Abb. 1

$$H\left(\frac{L}{E_K F_K} + \int_C^F y''\,\eta_{H=1}\,dx\right) + \int_C^F y''\,\eta_0\,dx + \alpha_t\,t\,L_t = 0$$

$$\underline{H = -\frac{\int_C^F y''\,\eta_0\,dx + \alpha_t\,t\,L_t}{\frac{L}{E_K F_K} + \int_C^F y''\,\eta_{H=1}\,dx} = -\frac{a_{10} + a_{1t}}{a_{11}}} \qquad (8)$$

Bei gleichen Spannweiten von Versteifungsträger und Kabel kann aus Gl. 4 durch zweimalige Integration eine Grundgleichung von der Form

$$M_0 - H y - N\,\eta = -E J\,\eta''$$

gewonnen werden; auf diese Gleichung zweiter Ordnung bezieht sich die bis heute fast ausschliesslich verwendete «normale» Formänderungstheorie der verankerten Hängebrücke, wobei das ausgeführte Tragwerk mit dem der Berechnung zu Grunde gelegten meist nur annäherungsweise übereinstimmt, wie z. B. bei Tragwerken nach Abb. 1.

Im Folgenden wird für die Gleichung 6 ein baustatisches Auflösungsverfahren angegeben, das für konstante und veränderliche Steifigkeit EJ des Versteifungsträgers anwendbar ist. Während eine Integration der Grundgleichung in mathematischer Form über die Unstetigkeitstellen bei den äussersten Hängestangen hinaus nicht möglich ist, sodass dort unerwünschte, weil den Rechnungsgang komplizierende Hilfsgrössen eingeführt werden müssen [2]), fällt diese Schwierigkeit bei dem vorzuschlagenden Lösungsverfahren dahin. Dieses Verfahren stellt die baupraktische Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung vierter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten dar. Allerdings soll zunächst, mit Rücksicht auf einfachste Darstellung, der Fall konstanter Trägersteifigkeit, $EJ = EJ_c =$ konst., für sich allein behandelt werden.

Für die praktische Bemessung ist die Verwendung von Einflusslinien zweckmässig. In unserm Grundsystem, d. h. dem der linearisierten Differentialgleichung Gl. 6 gehorchenden Versteifungsträger, ergibt sich die Einflusslinie für das Biegungsmoment M_{0m} als Biegungslinie η_0 für eine an der Stelle m eingeführte Winkeländerung $\Delta\varphi = R = 1$; die Einflusslinie im wirklichen Tragwerk ergibt sich durch Superposition.

Bei der Berechnung der Durchbiegungen η ist in die Gl. 6 ein geschätzter Festwert N einzuführen, der im allgemeinen mit dem für den zu untersuchenden Belastungsfall gültigen Kabelzug H nicht übereinstimmen wird. Die Einflusslinien werden deshalb am einfachsten für zwei verschiedene Werte von N, $N_1 \cong H_{min}$ und $N_2 \cong H_{max}$, berechnet, worauf die gesuchten Schnittgrössen für $N = H$ durch Interpolation bestimmt werden können. Wie nachstehend gezeigt werden soll, bestehen zwischen den Einflusslinien für $\overline{M_0}$ und $\overline{Q_0}$ benachbarter Schnitte des Grundsystems einfache Beziehungen, die die Aufstellung von Rekursionsformeln erlauben. Damit müssen nur einige wenige Einflusslinien durch Lösung der Grundgleichung Gl. 6 direkt bestimmt werden, worauf alle übrigen leicht aus diesen berechnet werden können.

[2]) *K. Klöppel* und *K. Lie:* Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers, «Stahlbau» 1940, S. 109 ff. Siehe auch *A. Hertwig:* Beitrag zum Hängebrückenproblem, «Stahlbau» 1940, S. 105 ff.