Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 117/118 (1941)
Heft: 9

Artikel: Die Knicklast gegliederter Stäbe
Autor: Amstutz, Ernst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83506

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Die Knicklast gegliederter Stäbe. — Verleihung der Watt-Medaille an Professor Stodola. — Aus der neuesten Entwicklung des Textilmaschinenbaues in der Schweiz. — L'Urbaniste. — Mitteilungen: Erfahrungen mit den Einschränkungen im Heizungsbetrieb im Winter 1940/41. Das Brücken-Freiluftmuseum St. Gallen. Photoelektrische Enthärtungskontrolle. Betriebserfahrungen mit einem Rippenrohrverdampfer. Vereisungsmelder für Flugzeuge. Kurvenausbildung nach Fahrspuren. Arbeitsbeschaffung für Ingenieure und Architekten. Feinmesstagung in Wien. 22. Schweiz. Comptoir in Lausanne. — Nekrologe: Charles Hoch. Alfred Vallette. Otto Casparis. — Literatur. — Vortrags-Kalender.

Band 118 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 9
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Die Knicklast gegliederter Stäbe

Von Dipl. Ing. ERNST AMSTUTZ, Mitarbeiter von Prof. Dr. F. Stüssi, Zürich

Zur Knickstabilität gegliederter Stäbe, hauptsächlich der zweiteiligen Stäbe mit Vergitterung oder Laschenbindungen, hat sich seit ungefähr drei Jahrzehnten, nachdem das Problem durch einige Einstürze aktuell geworden war, eine umfangreiche Literatur angesammelt. Im folgenden soll auf möglichst kurze und leicht verständliche Art eine prägnante, allgemein für alle gegliederten Stäbe gültige Formel (15) abgeleitet werden, die es dem praktisch tätigen Statiker mit elementaren baustatischen Mitteln ermöglicht, jeden Sonderfall rasch und sicher zu lösen. Im Anschluss werden nebst Ableitung bereits bekannter Formeln einige Einflüsse näher untersucht, die bisher m. W. ausser acht gelassen wurden, obwohl sie die Knicklast bedeutend herabsetzen können.

1. Die allgemeinen Grundbeziehungen

Der ungünstige Einfluss der Unterteilung eines Stabes auf seine Knicklast beruht auf zusätzlichen, durch die Querkräfte verursachten Verformungen. Beim Vollstab bleiben diese Verformungen so klein, dass sie dort praktisch ohne Belang sind. Zur Ableitung der Grundformeln gehen wir am sichersten direkt von dieser Erkenntnis aus, indem wir in der Differentialgleichung der ausgebogenen Stabaxe diesen Einfluss berücksichtigen. (In der Literatur finden sich auch Ableitungen mit Hilfe von Energiebetrachtungen.)

Die elastische Durchbiegung η_M eines Balkens infolge von Momenten M ist bekanntlich gegeben durch

$$\eta''_M = -\frac{M}{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

worin $B = EJ$ die Biegesteifigkeit (Elastizitätsmodul $\times$ Trägheitsmoment) bedeutet (Abb. 1).

Die Querkräfte Q erzeugen Verzerrungen, die eine zusätzliche Neigung der elastischen Linie

$$\eta'_Q = \frac{Q}{S} = \frac{M'}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erzeugen (Abb. 2). S sei als Schubsteifigkeit bezeichnet; sie ist diejenige Querkraft, die bei unbeschränkter Proportionalität die Neigung $\eta'_Q = 1$ (45°) erzeugen würde. Aus (2) gewinnt man durch Differentiation

$$\eta''_Q = \frac{Q'}{S} = \frac{M''}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wobei konstante Schubsteifigkeit vorausgesetzt wird, eine Annahme, die meist genau, sonst aber angenähert erfüllt sein wird. Die Gesamtverformung ist also gegeben durch

$$\eta'' = \eta''_M + \eta''_Q = -\frac{M}{B} + \frac{M''}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wir betrachten nun den Knickstab (Abb. 3). Bei Erreichen der Knicklast P_{kr} wird sich eine bei den üblichen Voraussetzungen (gerade Stabaxe, zentrische Belastung, homogenes Material) vorerst noch unendlich kleine Ausbiegung η einstellen. Durch die Verwölbung der Stabaxe hat der Stab die quer gerichteten Ablenkungskräfte

$$-h = +P_{kr}\eta'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

aufzunehmen (Abb. 4). Diese sind die Ursache der im Stabe wirkenden Biegemomente M:

$$-h = +M'' = +P_{kr}\eta'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichgewichtsbedingung in die Verformungsbedingung (4) gewinnen wir die Differentialgleichung des Knickproblems:

$$\eta'' = \frac{M''}{P_{kr}} = -\frac{M}{B} + \frac{M''}{S}; \quad \underline{P_{kr}M + \left(1 - \frac{P_{kr}}{S}\right) B M'' = 0} \quad (7)$$

Für den Vollstab ($S = \infty$) ergibt dies speziell:

$$P_{0kr}M + B M'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Lösungen dieser Gleichungen sind bekanntlich nur für ausgesuchte Werte von P_{0kr} möglich, wovon uns hier nur der niederste — die Euler'sche Knicklast — interessiert, die unter der Voraussetzung B = konst. bekanntlich folgenden Wert hat:

$$P_{0kr} = \frac{\pi^2 B}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Der Vergleich von Gleichung (7) und (8) zeigt, dass für den gegliederten Stab eine verminderte Biegesteifigkeit $B\left(1 - \frac{P_{kr}}{S}\right)$ einzuführen ist. Im übrigen ist die Lösung die selbe, insbesondere ist auch das Moment, wenn B = konst., durch eine Sinuslinie dargestellt. Die Knicklast ergibt sich also für den gegliederten Stab aus

$$P_{kr} = P_{0kr}\left(1 - \frac{P_{kr}}{S}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

zu

$$P_{kr} = \frac{P_{0kr}}{1 + \frac{P_{0kr}}{S}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

oder

$$\underline{\frac{1}{P_{kr}} = \frac{1}{P_{0kr}} + \frac{1}{S}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Diese Formel ist — wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird — als Gebrauchsformel nicht geeignet; sie ist hier nur ihres klaren Aufbaues wegen wiedergegeben.

2. Der unelastische Bereich

Die Biegesteifigkeit B darf mit dem Werte EJ nur eingesetzt werden, solange die Knickspannung $\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F}$ die Proportionalitätsgrenze nicht überschreitet. Im plastischen Bereich ersetzt man den Elastizitätsmodul E durch den Knickmodul T_k, dessen Sinn in Abb. 5 als Modul einer ideellen linearen Spannungsverteilung (Abb. 5b) zum gleichwertigen Ersatz des wirklichen Spannungsbildes (Abb. 5a) in Erinnerung gerufen wird.

Mit $B = T_k J$ bleiben die bisherigen Ableitungen gültig. Die Formel (12) ist gleichwohl im plastischen Bereich nicht verwendbar, da der Wert P_{0kr} mit dem zu P_{kr} gehörenden Wert T_k zu berechnen wäre, dieser aber noch nicht bekannt ist. Da ferner in der Praxis die Bestimmung der Knicklast im plastischen Bereich direkt auf Versuchsergebnisse (Tetmajer'sche Formel) gegründet wird, die die kritische Spannung in Funktion des Schlankheitsgrades λ (Knicklänge l_k: Trägheitsradius i) ausdrücken, ist es zweckmässig und üblich, für gegliederte Stäbe (wie auch bei andern Stabilitätsproblemen) eine ideelle Schlankheit λ_{id} einzuführen, mit der die Knicklast wie für einen Vollstab zu berechnen ist.

Die für den plastischen Bereich erweiterte Euler'sche Formel lautet:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 T_k}{\lambda_{id}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Für den Gliederstab gemäss (11):

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 T_k}{\lambda^2\left(1 + \frac{P_{0kr}}{S}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die ideelle Schlankheit λ_{id} ist also gegeben durch

$$\boxed{\lambda_{id}^2 = \lambda^2\left(1 + \frac{P_{0kr}}{S}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Dies ist die Grundformel für alle gegliederten Stäbe.

3. Der Gitterstab

Gitterstäbe haben meist eine Ausfachung nach Abb. 6. Vorausgesetzt sei gelenkiger Anschluss der Füllstäbe und Zentrierung auf die Schweraxe der Gurtung. Zur Berechnung der Schubsteifigkeit betrachten wir die Verformung δ eines Stabfeldes (Abb. 7) unter der Querkraft Q. Die Anwendung der

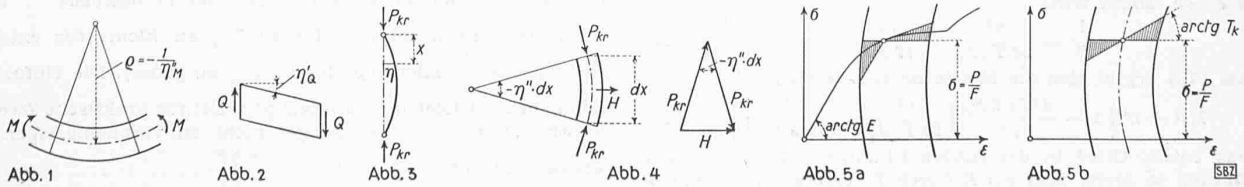

Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3 Abb. 4 Abb. 5a Abb. 5b

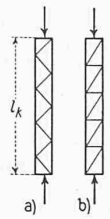

Abb. 6

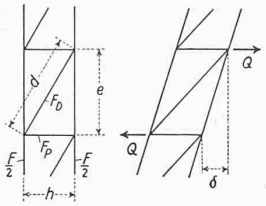
Abb. 7

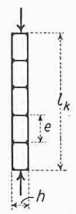
Abb. 8

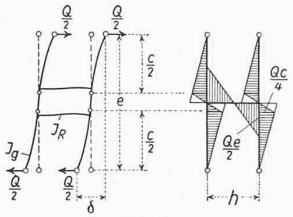
Abb. 9

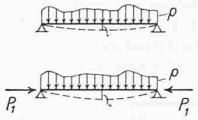
Abb. 10

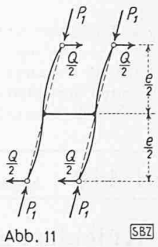
Abb. 11

Arbeitsgleichung auf die Füllstäbe (der Anteil der Gurtungen ist schon im Momentenanteil berücksichtigt) ergibt:

$$\delta = Q\,\Sigma\,\frac{S^2_{Q=1}\,s}{E\,F} = Q\left[\left(\frac{d}{h}\right)^2 \frac{d}{E\,F_D} + 1^2\,\frac{h}{E\,F_P}\right] \qquad (16)$$

Die Schubsteifigkeit S ist definitionsgemäss die Querkraft für $\delta = e$; woraus

$$\frac{1}{S} = \frac{d^3}{e\,h^2\,E\,F_D} + \frac{h}{e\,E\,F_P} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (17)$$

Nach (15) ist somit die ideelle Schlankheit

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2\left(1 + \frac{\sigma_{0kr}\,F}{S}\right) = \lambda^2\left[1 + \frac{\sigma_{0kr}}{E}\left(\frac{F}{F_D}\,\frac{d^3}{e\,h^2} + \frac{F}{F_P}\,\frac{h}{e}\right)\right] \qquad (18)$$

Im plastischen Bereich wäre genau genommen in σ_{0kr} der zu σ_{kr} gehörende Knickmodul einzuführen, da der Fehler hier aber nur ein verhältnismässig kleines Korrekturglied betrifft (im Gegensatz zu Formel 12), dürfen wir ohne weiteres den zu σ_{0kr} gehörenden Knickmodul einführen, also σ_{0kr} nach der Tetmajerschen Formel berechnen. Im elastischen Bereich setzen wir zweckmässig für σ_{0kr} den Eulerwert algebraisch ein und erhalten so die etwas einfachere Formel

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \pi^2\left[\frac{F}{F_D}\,\frac{d^3}{e\,h^2} + \frac{F}{F_P}\,\frac{h}{e}\right] \quad . \; . \; . \qquad (19)$$

Für das System nach Abb. 6a entfällt das zweite Glied in der Klammer.

4. Der Rahmenstab

Als Rahmenstab bezeichnet man das in Abb. 8 dargestellte, vielfach statisch unbestimmte System. Genaue Untersuchungen mit Hilfe von überzähligen Grössen sind für die Knicklastberechnung schon durchgeführt worden; eine derart umständliche Berechnung ist jedoch gar nicht notwendig, da es sich hier lediglich darum handelt, die Steifigkeit des Gesamtsystems, nicht aber die Schnittkräfte im Einzelnen zu erfassen. Zu diesem Zwecke nehmen wir genau genug die Lage der Momentennullpunkte in den Feldmitten der Gurtungen und der Riegel an, umsomehr als die Riegel im allgemeinen sehr steif sind.

Die Schlankheit des Vollstabes berechnet man zu

$$\lambda = \frac{l_k}{i} \text{ worin } i^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + i_g^2 \text{ mit } i_g^2 = \frac{J_g}{F_g} \text{ ist.} \qquad (20)$$

Bei schlanken Gurtungen mit grossem Abstand h kann i_g^2 gegenüber $\left(\frac{h}{2}\right)^2$ vernachlässigt werden, es ist dann

$$\lambda \cong \frac{2\,l_k}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (20')$$

Wir berechnen nun die Schubsteifigkeit S und denken uns hierfür das in Abb. 9 dargestellte, zwischen den Momentennullpunkten herausgeschnittene Element mit den Querkräften Q belastet (die zugehörigen Gurtkräfte interessieren hier nicht).

Die Riegel sind im allgemeinen Bindebleche, die durch zwei oder drei Nieten am Gurt angeschlossen sind. Dem entspricht die abgeschrägte Momentenfläche nach Abb. 9. Bei angeschweissten Bindeblechen kann diese Momentenfläche als genau genug vorausgesetzt werden.

Die Ausbiegung δ unter der Querkraft Q berechnet sich mit Hilfe der Arbeitsgleichung zu:

$$\delta = Q\int \frac{M^2_{Q=1}}{EJ}\,ds = Q\left[2\,\frac{c^2}{16}\,\frac{e}{3\,T_k\,J_g} + \frac{e^2}{4}\,\frac{h}{3\,EJ_R}\right] \qquad (21)$$

Bei den Gurtungen muss die Abminderung der Biegesteifigkeit durch Einführen des Knickmoduls T_k an Stelle von E berücksichtigt werden, bei den Bindeblechen, die ja nicht unter Vorspannungen stehen, ist hingegen der Elastizitätsmodul E einzusetzen. Wir benötigen die Schubsteifigkeit S, d. i. die Querkraft Q für $\delta = e$, somit wird

$$\frac{1}{S} = \frac{c^2}{24\,T_k\,J_g} + \frac{e\,h}{12\,EJ_R} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (22)$$

Gemäss (15) ergibt sich die ideelle Schlankheit zu

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2\left[1 + \frac{\pi^2\,T_k\,2\,F_g}{\lambda^2}\left(\frac{c^2}{24\,T_k\,J_g} + \frac{e\,h}{12\,EJ_R}\right)\right] \qquad (23)$$

Das zweite Glied in der runden Klammer ist bei normaler Ausführung so klein, dass wir E durch T_k ersetzen können, wobei wir auf der sichern Seite bleiben. Führen wir noch die Schlankheit λ_1 der Einzelgurtung mit der freien Knicklänge c

$$\lambda_1^2 = \frac{c^2}{i_g^2} = c^2\,\frac{F_g}{J_g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (24)$$

ein, so finden wir schliesslich:

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \frac{\pi^2}{12}\,\lambda_1^2 + \frac{\pi^2}{6}\,\frac{e\,h\,F_g}{J_R} \quad . \; . \; . \; . \qquad (25)$$

worin das letzte Glied fast immer vernachlässigt werden kann.

Die Formel

$$\lambda_{id} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\pi^2}{12}\,\lambda_1^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (25')$$

entspricht der ältern Engesser'schen Knickformel. Sie begeht eine Vernachlässigung, mit der wir uns nun noch auseinandersetzen wollen.

Wie bekannt, vergrössert sich die Durchbiegung δ_0 eines querbelasteten Stabes, wenn er zugleich axial gedrückt wird, auf einen Wert δ, der mit guter Näherung dem Gesetz

$$\delta = \delta_0\,\frac{1}{1 - \frac{P_1}{P_{1kr}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (26)$$

gehorcht (Abb. 10), worin zum Ausdruck gebracht ist, dass bei Belastung mit der Knicklast P_{1kr} quergerichtete Kräfte nicht mehr aufgebracht werden können. Die Formel (26) ist nur dann streng richtig, wenn die elastische Linie infolge der quergerichteten Kräfte mit der Knickfigur identisch ist. Sobald jedoch nur die grobe Form der Biegelinie übereinstimmt, kann die Formel als gute Näherung verwendet werden.

Ein derart gedrückter Stab unter quergerichteten Kräften ist nun aber die Gurtung des Rahmenstabes (Abb. 11).

Mit

$$P_1 = \frac{\pi^2\,T_k\,F_g}{\lambda_{id}^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (27)$$

und

$$P_{1kr} = \frac{\pi^2\,T_k\,J_g}{\left(\frac{e}{2}\right)^2} \cong \frac{4\,\pi^2\,T_k\,J_g}{c^2} = \frac{4\,\pi^2\,T_k\,F_g}{\lambda_1^2} \quad . \; . \qquad (28)$$

ist also das zweite Glied in Gleichung (25) mit dem Faktor

$$\frac{1}{1 - \frac{P_1}{P_{1kr}}} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_1^2}{4\,\lambda_{id}^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (29)$$

zu multiplizieren. Vernachlässigen wir, wie bereits begründet, das letzte Glied, so geht (25) über in:

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \frac{\pi^2}{12}\,\lambda_1^2\,\frac{1}{1 - \frac{\lambda_1^2}{4\,\lambda_{id}^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (30)$$

Durch Erweitern mit $\left(\lambda_{id}^2 - \frac{\lambda_1^2}{4}\right)$ findet man

$$\lambda_{id}^4 - \lambda_{id}^2\left[\lambda^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{12}\right)\lambda_1^2\right] + \frac{1}{4}\,\lambda^2\,\lambda_1^2 = 0 \qquad (31)$$

oder nach λ_{id}^2 aufgelöst:

$$\lambda_{id}^2 = \frac{\lambda^2}{2} + 0{,}536\,\lambda_1^2 + \sqrt{\frac{\lambda^4}{4} + 0{,}286\,\lambda^2\,\lambda_1^2 + 0{,}288\,\lambda_1^4} \qquad (32)$$

Gegenüber der Formel (25') ergeben sich bedeutend grössere Schlankheiten und im Grenzfall bis zu 30 % kleinere Knicklasten. Wie der Vergleich in Abb. 12 zeigt, berücksichtigt die heute allgemein im Gebrauch stehende neuere Engesser'sche Formel

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \lambda_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (33)$$

durch die Aufrundung des Faktors $\frac{\pi^2}{12}$ auf 1 den Verformungseinfluss der Einzelgurtung angenähert. Man erhält die Knicklast im elastischen Bereich und für die üblichen Verhältnisse $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ nach der Näherungsformel (33) bis zu 3 % zu klein (für extreme Verhältnisse $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ allerdings bis zu 7 % zu gross). Die einfach zu handhabende Gleichung (33) genügt somit für praktische Zwecke. Sofern der Einfluss der Riegel nicht zu vernachlässigen ist, rechne man mit $\lambda_{id}^2 \cong \lambda^2 + \lambda_1^2 + \frac{e\,h\,F}{J_R}$ . . . . . (34)

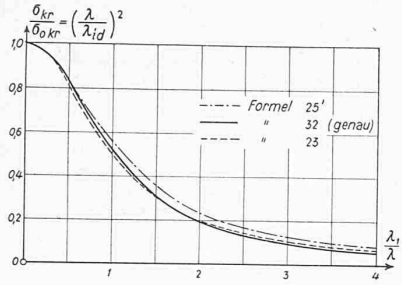

Abb. 12 : Vergleich der Knickspannungen von Rahmenstäben im elastischen Bereich

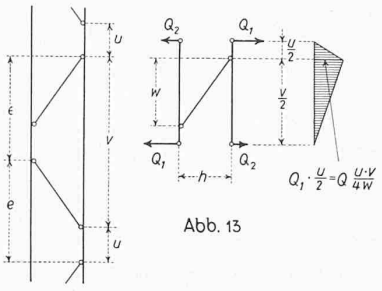

Abb. 13

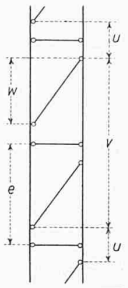

Abb. 14

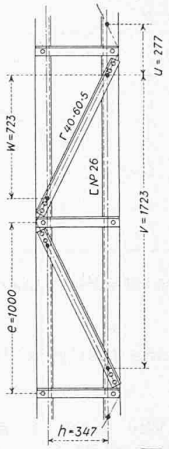

Abb. 15

5. Der nicht zentrierte Gitterstab

Bei der baulichen Durchbildung der Gitterstäbe ist man meist bestrebt, die vielen Knotenbleche für den Anschluss der Füllstäbe zu ersparen. Es ist dann meist nicht möglich, die Schweraxen zu zentrieren. Offensichtlich ist zu erwarten, dass die Ausserachtlassung einer so elementaren Konstruktionsregel die Tragkraft bedeutend herabsetzen wird. Trotzdem wurden bisher solche Stäbe nach der Formel (18) berechnet. Die allgemeine Formel (15) erlaubt uns, auch solche Fälle mit Leichtigkeit zu untersuchen.

Nach den bisherigen Ableitungen kann ich mich hierfür kurz fassen und gebe daher die Ableitung für den Fall, dass die Stabdehnungen vernachlässigt werden können, kommentarlos wieder. Die Bezeichnungen gehen aus Abb. 13 hervor.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$Q_1 - Q_2 = Q \quad \ldots \quad (35)$$

und

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{v}{u} \quad \ldots \quad (36)$$

folgt

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= Q\,\frac{v}{v-u} = Q\,\frac{v}{2\,w} \\ Q_2 &= Q\,\frac{u}{v-u} = Q\,\frac{u}{2\,w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (37)$$

Somit wird

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{e}\int \frac{M^2_{Q=1}\,ds}{T_k\,J_g} = \frac{2}{3\,T_k\,J_g}\left(\frac{u\,v}{4\,w}\right)^2 \quad \ldots \quad (38)$$

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2\left[1 + \frac{P_{0kr}}{S}\right] = \lambda^2 + \frac{\pi^2\,T_k\,2\,F_g}{24\,T_k\,F_g\,i_g^2}\left(\frac{u\,v}{w}\right)^2 \quad (39)$$

oder mit der Abkürzung $\lambda_1 = \frac{u}{i_g}$ (Schlankheit des Zwischenstückes):

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{v}{w}\right)^2 \lambda_1^2 \quad \ldots \quad (40)$$

Um auch hier den Formänderungseinfluss der Einzelgurtung zu berücksichtigen, runden wir $\frac{\pi^2}{12}$ zu 1 auf. Ferner wollen wir jetzt noch die Dehnung der Streben berücksichtigen, die unter der Strebenkraft

$$D = \frac{d}{h}\,(Q_1 + Q_2) = \frac{d}{h}\,\frac{u+v}{2\,w}\,Q = \frac{d}{h}\,\frac{e}{w}\,Q \quad \ldots \quad (41)$$

stehen. Dementsprechend erhält man vollständig:

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2\left[1 + \frac{\sigma_{0kr}}{E}\,\frac{F}{F_D}\,\frac{d^3}{e\,h^2}\left(\frac{e}{w}\right)^2\right] + \left(\frac{v}{w}\right)^2 \lambda_1^2 \quad (42)$$

oder im elastischen Bereich auch:

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \pi^2\,\frac{F}{F_D}\,\frac{d^3}{e\,h^2}\left(\frac{e}{w}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 \lambda_1^2 \quad \ldots \quad (43)$$

Für das System Abb. 14 ergibt sich die entsprechende Formel:

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2\left[1 + \frac{\sigma_{0kr}}{E}\left(\frac{F}{F_D}\,\frac{d^3}{e\,h^2} + \frac{F}{F_P}\,\frac{h}{e}\right)\left(\frac{e}{w}\right)^2\right] + \left(\frac{v}{w}\right)^2 \lambda_1^2 \quad (44)$$

oder im elastischen Bereich speziell:

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \pi^2\left(\frac{F}{F_D}\,\frac{d^3}{e\,h^2} + \frac{F}{F_P}\,\frac{h}{e}\right)\left(\frac{e}{w}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 \lambda_1^2 \quad (45)$$

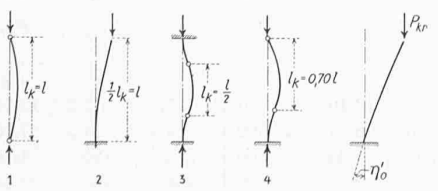

Abb. 16 Abb. 17

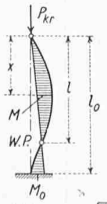

Abb. 18

Um den Einfluss der Exzentrizität zu demonstrieren, sei das Beispiel nachgerechnet, das F. Bleich in seinem Buch «Stahlhochbauten» (1. Bd. S. 159) behandelt. Die Abmessungen gehen aus Abb. 15 hervor. Für eine Knicklänge von 8,0 m, also $\lambda = 46$ ermittelt Bleich nach Formel (18) die ideelle Schlankheit zu

$$\lambda_{id}^2 = 1{,}12\,\lambda^2$$

Gemäss (42) erhält man jedoch mit $\lambda_1 = \frac{27{,}7}{2{,}56} = 10{,}8$

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2\left[1 + 0{,}10 + \left(\frac{1723}{723}\cdot\frac{10{,}8}{46}\right)^2\right] = 1{,}41\,\lambda^2$$

woraus man ersieht, dass der Einfluss der Exzentrizität weit überwiegt und unbedingt berücksichtigt werden muss; sofern es überhaupt nicht wirtschaftlicher ist, die Stäbe zwecks Zentrierung mittels Knotenblechen anzuschliessen.

6. Die freie Knicklänge bei eingespannten Stäben

Bei den Vollstäben unterscheidet man bekanntlich bezüglich der Lagerungsart die vier Eulerfälle nach Abb. 16 mit den eingetragenen Knicklängen. Es fragt sich, ob diese effektiven Knicklängen l_k bzw. die entsprechenden Schlankheiten λ durch die Gliederung der Stäbe eine Veränderung erfahren. (Dies ist nicht zu verwechseln mit der ideellen Schlankheit λ_{id}, die eine reine Rechnungsgrösse ohne anschauliche Bedeutung darstellt!)

Beim Vollstab hat eine vollständige Einspannung die Folge, dass die elastische Linie die ursprüngliche Stabaxe an der Einspannstelle tangieren muss. Für den Gliederstab trifft dies offenbar nur auf die Momentenanteile η_M der Durchbiegungen zu, die Querkraftanteile η_Q können sich jedoch ungehindert durch die Einspannung einstellen. Die Randbedingung am eingespannten Ende lautet daher:

$$\boxed{\eta_0' = \frac{Q_0}{S}} \quad \ldots \quad (46)$$

Im *Eulerfall 2* ist gemäss Abb. 17 zu setzen: $Q_0 = P_{kr}\,\eta_0'$. (47)

Mit Bezug auf (46) folgt also $\underline{P_{kr} = S}$ . . . . . (48)

Es ist dies ein gesonderter Knickfall, der nur eintreten wird, wenn die normale Knicklast des Stabes mit $l_k = 2\,l_0$ höher liegt als S. Unter Zuhilfenahme von (11) ergibt sich als Kriterium für die Gültigkeit dieses Knickfalles:

$$\frac{P_{0kr}}{1 + \frac{P_{0kr}}{S}} \geq S \quad \ldots \quad (49)$$

$$S \leq 0 \quad \ldots \quad (50)$$

d. h. der Sonderfall $P_{kr} = S$ ist überhaupt nie massgebend, der Stab verdreht sich an der Einspannstelle nicht, es ist also wie beim Vollstab mit $l_k = 2\,l_0$ zu rechnen.

Die selbe Ueberlegung lässt sich für den *Eulerfall 3* (beidseitig eingespannter Stab) durchführen. Es ist also auch beim gegliederten Stab die halbe Stablänge als Knicklänge anzunehmen.

Der *Eulerfall 4* erfordert eine besondere Behandlung (Abb. 18). Die Druckkraft P_{kr} erfährt nämlich am gelenkigen Ende eine Ablenkung (schraffierte Momentenfläche), sodass ein Einspannmoment M_0 entsteht. Die Querkraft Q_0 an der Einspannstelle beträgt hier:

$$Q_0 = P_{kr}\,\eta_0' + \frac{M_0}{l_0} \quad \ldots \quad (51)$$

η_0' aus (46) eingesetzt ergibt

$$Q_0\left(1 - \frac{P_{kr}}{S}\right) = \frac{M_0}{l_0} \quad \ldots \quad (52)$$

P_{kr} entnehmen wir aus (11) und erhalten:

$$1 - \frac{P_{kr}}{S} = 1 - \frac{P_{0kr}}{S + P_{0kr}} = \frac{1}{1 + \frac{P_{0kr}}{S}} \quad \ldots \quad (53)$$

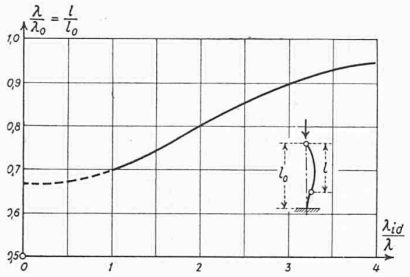

Abb. 19 : Effektive Schlankheit von Gitterstäben

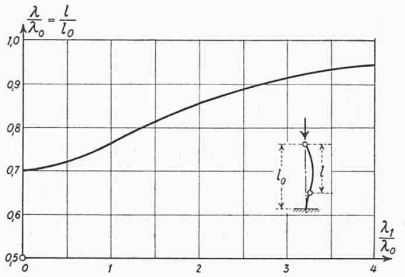

Abb. 20 : Effektive Schlankheit von Rahmenstäben (und Gitterstäben im elastischen Bereich)

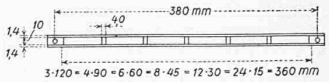

Abb. 21 Versuchsstäbe

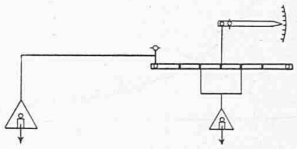

Abb. 22 Versuchsvorrichtung SBZ

Gleichung (52) geht daher in die Form

$$\frac{l_0\,Q_0}{M_0} = 1 + \frac{P_{0kr}}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

über. Wie unter (1) gesagt wurde, verläuft das Moment nach einer Sinuslinie, in unserem Falle

$$M = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

$$Q = \frac{\pi a}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

An der Einspannstelle $x = l_0$: $M_0 = a \sin\left(\pi \frac{l_0}{l}\right)$ . . . (57)

$$Q_0 = \frac{\pi a}{l} \cos\left(\pi \frac{l_0}{l}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

Diese Werte setzen wir in (54) ein und erhalten damit, wenn wir noch

$$1 + \frac{P_{0kr}}{S} = \left(\frac{\lambda_{id}}{\lambda}\right)^2$$

Gleichung (15) beachten, die Grundbeziehung

$$\left(\pi \frac{l_0}{l}\right) \operatorname{ctg}\left(\pi \frac{l_0}{l}\right) = \left(\frac{\lambda_{id}}{\lambda}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59)$$

die man mit $\lambda_0 = \frac{l_0}{i}$ auch schreiben kann

$$\left(\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \operatorname{ctg}\left(\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = \left(\frac{\lambda_{id}}{\lambda}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59')$$

Für den Vollstab ($S = \infty$) liefert diese transzendente Gleichung bekanntlich $l/l_0 = 0{,}70$. Für $S = 0$ erhält man hingegen $l/l_0 = 1$. Beim gegliederten Stab ist also die Wirkung einer einseitigen Einspannung vermindert, sie kann im Grenzfall überhaupt wirkungslos werden!

Das abweichende Verhalten der Gliederstäbe im Eulerfall 4 gegenüber den andern Lagerungsarten ist darauf zurückzuführen, dass hier an der Einspannstelle auch ohne Neigung der elastischen Linie eine Querkraft auftritt, während im Fall 2 dies aus Gleichgewichtsgründen, im Fall 3 aus Symmetriegründen nicht möglich ist.

Aus der allgemeinen Grundgleichung (59) seien nun noch die entsprechenden *Spezialformeln* abgeleitet.

Für Gitterstäbe im plastischen Bereich setzen wir $\left(\frac{\lambda_{id}}{\lambda}\right)^2$ nach (18) ein, wobei im Korrekturglied genau genug σ_{0kr} mit $l = 0{,}70\, l_0$ berechnet wird. Die Auflösung der transzendenten Gleichung (59) für jeden Einzelfall wäre eine umständliche und zeitraubende Probierarbeit. Ich habe daher auf empirischem Wege die Näherungsformel

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{8{,}8 + \left(\frac{\lambda_{id}}{\lambda}\right)^3}{13 + \left(\frac{\lambda_{id}}{\lambda}\right)^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

gefunden, deren maximaler Fehler gegenüber den genauen Werten nach Gleichung (59′) kleiner als 1 % ist. Der Zusammenhang ist in Abb. 19 auch graphisch dargestellt. Im elastischen Bereich entwickeln wir auch hier zweckmässig eine Sonderformel, indem wir auf Gleichung (19) zurückgreifen, die wir mit der Abkürzung

$$\lambda_1^2 = \pi^2 \left[\frac{F}{F_D} \frac{d^3}{e\,h^2} + \frac{F}{F_P} \frac{h}{e}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (61)$$

in der Form

$$\lambda_{id}^2 = \lambda^2 + \lambda_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62)$$

anschreiben. Die folgende Ableitung gilt damit auch für die Rahmenstäbe (im elastischen und plastischen Bereich), für die ja näherungsweise die selbe Formel Gleichung (33) gilt, lediglich mit anderer Bedeutung für λ_1. Gleichung (59′) geht also über in

$$\left(\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \operatorname{ctg}\left(\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = 1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (63)$$

oder geordnet:

$$\frac{\left(\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) \operatorname{ctg}\left(\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) - 1}{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (64)$$

Die Lösung findet man mit grosser Annäherung (Fehler kleiner als 1 %) zu

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{2{,}6 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^2}{3{,}7 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^2} \quad (65)$$

Der Verlauf geht aus Abb. 20 hervor.

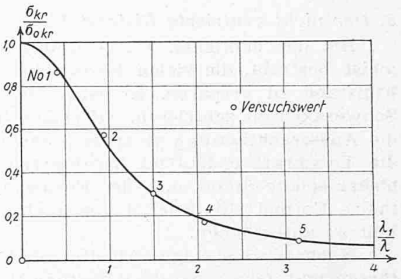

Abb. 23 : Vergleich der gemessenen Werte mit Formel 32 SBZ

In der Baupraxis liegen vollständig eingespannte Stäbe nur angenähert vor. Die Eulerfälle 3 und 4 haben jedoch als Grenzfälle grosse praktische Bedeutung. Eine genaue Berechnung müsste die Nachgiebigkeit der Einspannung berücksichtigen. Die Abklärung dieser Frage für die Gliederstäbe übersteigt jedoch den Rahmen dieser Abhandlung.

7. Modellversuche

Um die in Absatz 4 dargelegte zusätzliche Abminderung der Knicklast bei Rahmenstäben infolge des Formänderungseinflusses der Gurtstäbe zu belegen, habe ich an Zelluloidmodellen mit verschieden grossem Abstand der Bindungen die Knicklast bestimmt. Die Abmessungen der Stäbe gehen aus Abb. 21 hervor.

Die direkte Messung der Knicklast erfordert grösste Genauigkeit der Versuchseinrichtung und der Versuchstäbe hinsichtlich Zentrierung und gerader Stabaxe. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, habe ich die Knicklasten indirekt bestimmt durch Vergleich der Durchbiegung unter quer gerichteten Belastungen mit und ohne axiale Druckkraft gemäss Abb. 10. Angenähert gilt

$$\delta = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kr}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66)$$

bzw. nach P_{kr} aufgelöst:

$$P_{kr} = P \frac{1}{1 - \frac{\delta_0}{\delta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (67)$$

Die Durchbiegungen δ wachsen proportional mit der Belastung p, solange P konstant bleibt; δ ist auch unabhängig von einer allfälligen Exzentrizität der Axialkraft P.

Am besten führt man die Messung mit verschiedenen Laststufen in der Gegend $P \backsim \frac{1}{2} P_{kr}$ durch. Für kleinere Werte P ist Formel (67) sehr fehlerempfindlich, bei grösseren Werten machen sich beim Zelluloid unangenehme Kriecherscheinungen bemerkbar. — Die verwendete Versuchsvorrichtung zeigt Abb. 22 schematisch.

Der Elastizitätsmodul wurde aus der Messung von δ_0 für $P = 0$ durch Vergleich mit der Rechnung bestimmt. Mit zunehmender Felderzahl des Stabes nahm der Wert regelmässig ab, offenbar eine Folge der gesteigerten Belastung (Spannungs-Dehnungsdiagramm nicht genau linear). In untenstehender Tabelle sind die Messresultate und der Vergleich mit der Rechnung kurz

Tabelle der gemessenen und gerechneten Knicklasten
(Für alle Stäbe $\lambda = 66{,}7$)

Stab	Messung				Rechnung (Formel 32)		
Nr.	P	$\frac{\delta_0}{\delta}$	P_{kr}	E	λ_1	λ_{id}	P_{kr}
	kg		kg	kg/cm²			kg
1	6,04	0,513	**12,40**	23 400	27,2	71,2	**12,73**
2	3,93	0,525	**8,27**	23 800	64,2	91,3	**7,90**
3	1,908	0,592	**4,68**	24 800	101	120,5	**4,70**
4	1,174	0,577	**2,78**	25 600	138	155	**2,94**
5	0,507	0,636	**1,39**	25 900	212	227	**1,39**

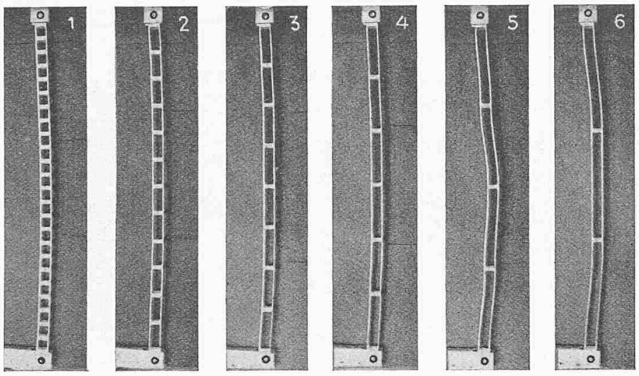

Abb. 24. Die sechs Versuchstäbe unter der Knicklast

zusammengefasst; die Messwerte sind Mittelwerte aus verschiedenen Versuchen. Abb. 23 zeigt die gute Uebereinstimmung des Versuches mit Gleichung (32), woraus man sieht, dass durch einen kleinen Trick manche Probleme mit überraschend einfachen, selbstverfertigten Modellen und Messvorrichtungen untersucht werden können, die sonst umfangreichere Mittel erfordern würden. Die Modellphotographien (Abb. 24) zeigen die auftretenden Knickfiguren, worin der Einfluss der Querkräfte deutlich erkennbar ist.

8. Zusammenfassung

Auf Grund der Formel (15) kann die Knicklast jedes beliebigen gegliederten Stabes auf elementare Weise (Berechnung einer Verschiebung mit Hilfe der Arbeitsgleichung) bestimmt werden. Im plastischen Bereich ist darauf zu achten, ob für die querversteifenden Teile der Elastizitätsmodul oder der Knickmodul einzuführen ist. Für Gitterstäbe des üblichen Systems wendet man allgemein Formel (18), im elastischen Bereich auch einfacher Formel (19) an. Für Rahmenstäbe gilt allgemein Formel (33), wobei der Formänderungseinfluss der Einzelgurtung angenähert berücksichtigt ist.

Weitere, unter Umständen erhebliche Abminderungen der Tragfähigkeit, die bisher nicht berücksichtigt wurden, ergeben sich bei Gitterstäben mit nicht auf die Schweraxen zentrierten Füllstäben (Formeln 42 bis 45) und beim einseitig eingespannten Stab (Eulerfall 4), wo mit wachsender Nachgiebigkeit der Bindungen die Wirkung der Einspannung verschwindet (Formeln 60 und 65). In den übrigen Eulerfällen (Abb. 16) ist die effektive Knicklänge wie beim Vollstab einzusetzen.

Verleihung der Watt-Medaille an Professor Stodola

Anlässlich des 200. Geburtstages von James Watt (1736 bis 1819) hat die Institution of Mechanical Engineers of Great Britain beschlossen, jedes zweite Jahr als ihre höchste Auszeichnung eine goldene, Watts Bildnis tragende Münze einem Ingenieur gleichviel welcher Nationalität zu verleihen, der in Wissenschaft und Forschung, Erfindung oder Produktion Weltruf erlangt hat. Die James Watt International Medal ist bisher dreimal vergeben worden, zum dritten Mal, wie hier in Bd. 116, S. 211 mitgeteilt, an Dr. Aurel Stodola, Professor im Ruhestand an der E. T. H. und Ehrenbürger der Stadt Zürich. An den in London am 24. Januar 1941 vollzogenen Akt der Uebergabe der Medaille an den schweizerischen Gesandten zuhanden des Geehrten erinnert ein von der I. M. E. herausgegebenes, mit Stodolas Photographie geschmücktes Heft, in dem die bei dem Anlass gehaltenen Reden festgehalten sind. Zur Begründung der für das Jahr 1941 getroffenen Wahl zog Dr. H. L. Guy eine Parallele zweier Forschertätigkeiten, beide auf die thermischen Hauptmaschinen ihrer Zeit, deren geistige Durchdringung, Konstruktion und Regelung gerichtet und beide durch den Versuch ihre Einsichten bekräftigend oder herrschende Vorurteile widerlegend, beide Forscher, Watt und Stodola, in einem langen, arbeitserfüllten Leben die Macht des Geistes über den Körper bezeugend.

Zu jenen glücklichen Wahlen, die den internationalen Ruf nicht nur der eidgenössischen Hochschule, sondern auch der Schweiz als Industrieland wesentlich gefördert haben, gehört die 1892 erfolgte Berufung Stodolas an das Eidgenössische Polytechnikum. «Die von der Schweiz eingenommene hervorragende Stellung in der Technik ist», um Dr. Guy zu zitieren, «in nicht geringem Mass dem Geschick und der Inspiration seines Werkes und seines Lehrens zuzuschreiben». Die Firmen vieler Länder suchten und suchen den Beistand eines Mannes, der in seltener Verbindung Verstandeshelle, Enthusiasmus und Lauterkeit verkörpert, und der in der Beherrschung von Naturkräften wohl gerade deshalb eine so glückliche Hand bewiesen hat, weil sein tieferes Trachten nicht so sehr der Bändigung, als der Erkenntnis der Natur gilt. Das geht aus seiner im «Ruhestand», d. h. mit 70 Jahren — wer macht es ihm nach? — unternommenen Auseinandersetzung mit der modernen Physik, Naturwissenschaft und Philosophie hervor, die ihren Niederschlag in seiner Schrift «Die geheimnisvolle Natur» gefunden hat.

Einen eigentümlichen Ausklang erfuhr diese im zweiten Weltkrieg inmitten einer seiner grössten Trümmerstätten abgehaltene, von etwa 200 Teilnehmern besuchte Sitzung der Institution durch das Schlusswort von Lord Dudley Gordon, in dem er daran erinnerte, dass «die Künste und Wissenschaften so temporäre Grenzen wie jene zwischen den Ländern überschreiten ... Der Name des ausgezeichneten Empfängers dieser Denkmünze wird, wie jener von James Watt, bestehen, wenn Kriege blosse Unglücksfälle in der Geschichte der Menschheit geworden sein werden.»

Aus der neuesten Entwicklung des Textilmaschinenbaues in der Schweiz

Von Dr. Ing. E. HONEGGER, Professor an der E. T. H., Zürich

Es ist allgemein bekannt, dass die Schweiz eine beachtenswerte Textilmaschinenindustrie besitzt. Weniger bekannt dürfte aber sein, dass dieser Zweig unserer Maschinenindustrie wertmässig den grössten Export tätigt und dass es auf der Erde nur zwei Staaten gibt, die als Lieferanten von Textilmaschinen auf dem Weltmarkt wesentlich wichtiger sind als unsere kleine Heimat.

Wie unser Export an Textilmaschinen im Laufe der letzten 50 Jahre gewachsen ist und wie er sich aus den verschiedenen

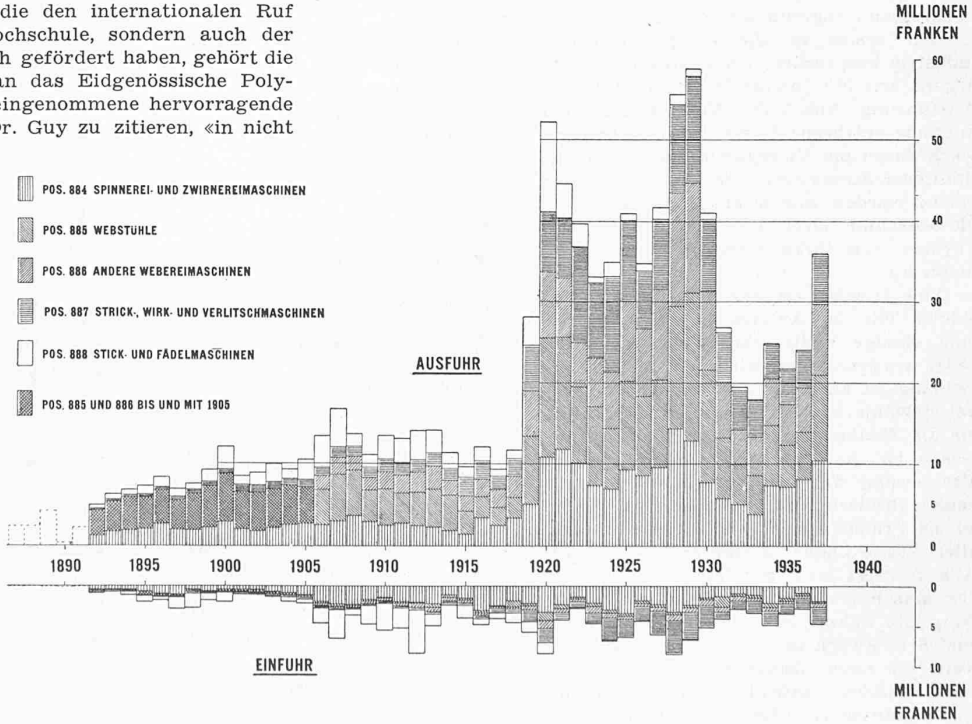

Abb. 1. Zur Entwicklung des Schweizerischen Textilmaschinenbaues
Aussenhandel, aufgeteilt nach den Positionen der schweizerischen Handelstatistik