Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 115/116 (1940)

Heft: 1

Artikel: Verbesserte Formänderungstheorie verankerter Hängebrücken und Stabbogen

Autor: Stüssi, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51202

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Verbesserte Formänderungstheorie verankerter Hängebrücken und Stabbogen. — Schweiz. Verein von Dampfkessel-Besitzern. — Schul- und Vereinshaus des Kaufmännischen Vereins Basel. — Mitteilungen: 5 m-Spiegelteleskop des Mount Wilson. Gebäudeblitzschutz. Viermaster-Fischerschooner «Argus» mit Dieselhilfsmotoren. Stallüftung. Ortpfähle aus Rüttelbeton. Naturgas in U. S. A. Die «Mechanisierung» der Kriegführung. — Wettbewerbe: Schulhaus in Genthod. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 116 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 1

Verbesserte Formänderungstheorie verankerter Hängebrücken und Stabbogen

Von Prof. Dr. F. STÜSSI, E. T. H. und Dipl. Ing. ERNST AMSTUTZ, Zürich

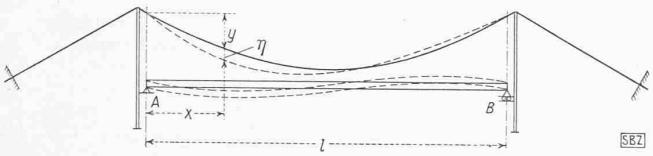

Abb. 1. Hängebrücke

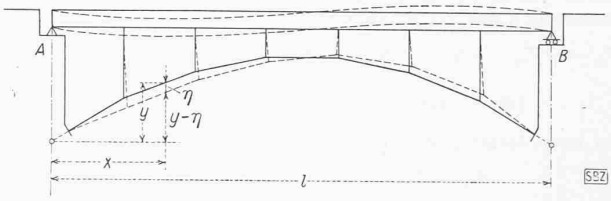

Abb. 2. Versteifter Stabbogen

I. Allgemeines

Der Sicherheitsgrad hat sowohl die Mängel des Materials wie auch des statischen Nachweises zu decken. Wollen wir ihn im Interesse der Wirtschaftlichkeit verkleinern, so müssen wir nicht nur einen zuverlässigen Baustoff, sondern auch eine zuverlässige statische Untersuchung verlangen. Dem Statiker fällt also die Aufgabe zu, die Wirkungsweise der geplanten Tragwerke möglichst wirklichkeitsgetreu vorauszusagen. Die Frage gewinnt besonders beim Baustoff Stahl an Bedeutung, wo infolge der homogenen Materialeigenschaften der zu wählende Sicherheitsgrad massgebend von der Sorge um eine wirklichkeitsgetreue Erfassung des Spannungs- und Verformungsbildes beeinflusst werden muss.

Bei der Ueberprüfung einer statischen Theorie müssen wir in erster Linie die grundlegenden Annahmen einer kritischen Beleuchtung unterziehen. Diese müssen im allgemeinen, um die mathematische Behandlung des Problems nicht zu sehr zu erschweren, möglichst einfach beschaffen sein und entsprechen daher oft nur angenähert der Wirklichkeit. Eine solche Annahme ist die in der Elastizitätslehre übliche Vereinfachung, die Kräfte am System des unverformten Tragwerkes angreifen zu lassen. Von dieser Voraussetzung musste erstmals bei Untersuchung von Knickproblemen abgegangen werden, da ja hier gerade die Formänderung allein den gefährlichen Spannungs- bzw. Verformungszustand erzeugt. Der Formänderungseinfluss wurde in der Folge noch bei Hängebrücken (wo er zu Materialersparnissen führt) berücksichtigt. Er ist natürlich sinngemäss auch bei Bogenbrücken einzuführen, damit die effektive Sicherheit die Forderungen nicht unterschreitet. Im letzten Falle kann der Formänderungseinfluss auf einfache Weise aus der Knickbelastung abgeschätzt werden[1]).

In zweiter Linie ist eine Theorie auf mathematische Fehler und unzulässige Vernachlässigungen zu untersuchen. Es ist das Ziel dieser Abhandlung, Fehler der bis anhin üblichen Formänderungstheorie der Hängebrücken und Stabbogen aufzudecken und zu korrigieren.

In der Elastizitätstheorie 1. Ordnung (ohne Formänderungseinfluss) ergeben sich die Versteifungsträger-Momente bei der Hängebrücke und beim Stabbogen zu

$$M = M_0 - H\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

M_0 ist das Moment des einfachen Balkens AB. Ausgehend von dieser Gleichgewichtsbedingung ist in den bisherigen Veröffentlichungen der Formänderungseinfluss lediglich dadurch berücksichtigt worden, dass zur Bogenordinate y noch die vertikale Durchbiegung η zugezählt wurde. Für die Hängebrücke ergab sich daher (Abb. 1)

$$M = M_0 - H\,(y + \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und für den Stabbogen (Abb. 2)

$$M = M_0 - H\,(y - \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wollen wir die Untersuchung genauer durchführen, so ist es notwendig, auf die primären Kraftwirkungen zwischen Bogen oder Kabel und Versteifungsträger, das sind die Ständer- und Hängestangenbelastungen, zurückzugreifen. Diese betragen nach der bisherigen Theorie bei der Hängebrücke

$$v = -\,H\,(y'' + \eta'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

beim Stabbogen

$$v = -\,H\,(y'' - \eta'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

[1]) *F. Stüssi:* Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis. «SBZ», Bd. 106, S. 119* und 132* (September 1935).

Dass in Wirklichkeit auch die horizontalen Verschiebungen der Kabel oder Bogenpunkte einen Einfluss auf die Reaktion v haben müssen, geht aus zwei Ueberlegungen hervor:

Erstens sind die Belastungen v Ablenkungskräfte des Seilzuges bzw. des Bogendruckes, und als solche von der örtlichen Aenderung der Kabel- oder Bogenkrümmung und damit auch von den Horizontalverschiebungen ξ abhängig.

Zweitens stellen sich die Hängestangen und Ständer infolge der horizontalen Kabel- und Bogenverschiebungen schief und üben damit auf Kabel und Bogen auch horizontale Belastungen aus. Die hieraus resultierenden örtlichen Aenderungen des Horizontalzuges bzw. Schubes müssen sich, auch wenn sie an sich klein sind, auf die Versteifungsträgermomente wesentlich bemerkbar machen, da diese als kleine Differenzen grosser Momente erhalten werden.

Diese beiden Einflüsse wollen wir im Folgenden zahlenmässig am Knickproblem des Stabbogens und am Formänderungsproblem verankerter Hängebrücken zu erfassen suchen. Es ist verständlich, dass die erste Aufgabe einfacher zu lösen sein wird als die zweite; denn das Knickproblem ist mathematisch durch eine homogene, das Formänderungsproblem aber durch eine inhomogene Differentialgleichung darzustellen. Zudem fassen wir beim Knickproblem unendlich kleine Formänderungen ins Auge, sodass wir unendlich kleine Glieder höherer Ordnung korrekterweise vernachlässigen können, während beim Formänderungseinfluss zwar kleine, aber doch endlich grosse Verformungen zu berücksichtigen sind, sodass allfällige Vernachlässigungen nur zahlenmässig gerechtfertigt werden können. Es ist also zweckmässig, die beiden Probleme trotz ihrer nahen Verwandtschaft getrennt zu untersuchen, umsomehr als wir dann beim Stabbogen die Unstetigkeiten aus der meist weiten Ständerteilung durch Rechnen mit Differenzen berücksichtigen können, während sich bei den Hängebrücken mit der meist engen Austeilung der Hängestangen die Differentialrechnung als zweckmässiger erweist.

II. Ausknicken von Stabbögen

Wir untersuchen das Gleichgewicht am verformten Bogenausschnitt der Abb. 3. Der Knoten m des Stabbogens werde durch den aufsitzenden Ständer mit den Komponenten $V_m + \Delta V_m$ und W_m belastet, worin ΔV_m und W_m aus den Formänderungen entstehen.

Das Gleichgewicht in horizontaler Richtung fordert:

$$H_{m+1} - H_{m-1} = W_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Vertikal ist das Gleichgewicht erfüllt für:

$$V_m + \Delta V_m = -\,H_{m+1}\,\mathrm{tg}\,\varphi_{m+1} + H_{m-1}\,\mathrm{tg}\,\varphi_{m-1} = \Delta\,(H\,\mathrm{tg}\,\varphi) \quad (7)$$

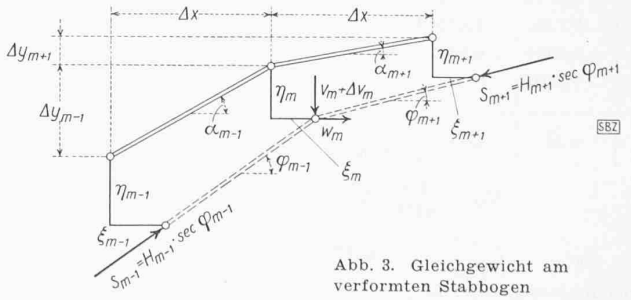

Abb. 3. Gleichgewicht am verformten Stabbogen

Hierin ist:

$$\operatorname{tg}\varphi_{m-1} = \frac{(y_m - \eta_m) - (y_{m-1} - \eta_{m-1})}{(x_m + \xi_m) - (x_{m-1} + \xi_{m-1})} = \left[\frac{\Delta y - \Delta\eta}{\Delta x + \Delta\xi}\right]_{m-1}$$

oder wenn wir mit $(\Delta x - \Delta\xi)$ erweitern

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(\Delta y - \Delta\eta)(\Delta x - \Delta\xi)}{\Delta x^2 - \Delta\xi^2}$$

worin wir $\Delta\xi^2$ gegenüber Δx^2 vernachlässigen dürfen:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta\eta}{\Delta x}\right)\left(1 - \frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Führen wir diesen Wert in Gleichung (7) ein und setzen noch

$$H = H_0 + \Delta H$$

worin ΔH den Formänderungseinfluss ausdrückt, so ergibt sich schliesslich am verformten System:

$$V_m + \Delta V_m = (H_0 + \Delta H_{m-1})\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta\eta}{\Delta x}\right)\left(1 - \frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right)_{m-1} - (H_0 + \Delta H_{m+1})\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta\eta}{\Delta x}\right)\left(1 - \frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right)_{m+1} \quad . \quad (9)$$

Im unverformten Zustand hingegen gilt:

$$V_m = H_0\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m-1} - H_0\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m+1} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Somit können wir den Formänderungseinfluss separieren und erhalten, wenn wir alle unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung weglassen:

$$\Delta V_m = -H_0\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right)_{m-1} + H_0\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right)_{m+1} + \Delta H_{m-1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m-1} - \Delta H_{m+1}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m+1}$$

Wir können auch gleich die Querkraft im Versteifungsträger, die dieser Belastung entspricht, angeben:

$$Q = H_0\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{\Delta\xi}{\Delta x}\right) - \Delta H\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) + Q_c \quad . \quad (11)$$

Tabelle I. Kritischer Horizontalschub des Stabbogens nach Abb. 4

	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sec^2\alpha$	η	$\Delta\eta$	$\Delta\xi$	ξ	h	W [1]
A			0			0		
1	0,72	1,5184	0,6298	+ 0,6298	+ 0,4535	+ 0,4535	1,78	0,0408
2	0,56	1,3136	1	+ 0,3702	+ 0,2073	+ 0,6608	1,22	0,0867
3	0,40	1,1600	0,9802	− 0,0198	− 0,0079	+ 0,6529	0,82	0,1274
4	0,24	1,0576	0,5972	− 0,3830	− 0,0919	+ 0,5610	0,58	0,1548
m	0,08	1,0064	0	− 0,5972	− 0,0478	+ 0,5132	0,50	0,1642
			η_0	η_0	η_0	η_0	Δx	$\frac{\eta_0 H}{\Delta x}$

[1]) $a = 0$; $V = H\Delta(\operatorname{tg}\alpha) = 0{,}16\,H$

	ΔH	$H_0\Delta\eta\sec^2\alpha$	$-\Delta H\operatorname{tg}\alpha\,\Delta x$	$(Q - Q_c)\Delta x$	M_{Q-Q_c}
A					0
1	− 0,4918	+ 0,9563	+ 0,3541	+ 1,3104	+ 1,3104
2	− 0,4510	+ 0,4863	+ 0,2526	+ 0,7389	+ 2,0493
3	− 0,3643	− 0,0230	+ 0,1457	+ 0,1227	+ 2,1720
4	− 0,2369	− 0,4051	+ 0,0569	− 0,3482	+ 1,8238
m	− 0,0821	− 0,6010	+ 0,0066	− 0,5944	+ 1,2294
	$\frac{\eta_0 H}{\Delta x}$	$\eta_0 H$	$\eta_0 H$	$\eta_0 H$	$\eta_0 H$

	M_{Q_c}	M_Q	K_M [2])	Q_M	η_1	η_1
A	0	0			0	0
1	− 0,2459	+ 1,0645	5,816	+ 14,103	14,103	0,6298
2	− 0,4918	+ 1,5575	8,729	+ 8,287	22,390	1
3	− 0,7376	+ 1,4344	8,135	− 0,442	21,948	0,9802
4	− 0,9835	+ 0,8403	4,796	− 8,577	13,372	0,5972
m	− 1,2294	0		− 13,373	0	0
	$\eta_0 H$	$\eta_0 H$	$\frac{\eta_0 H\Delta x}{6\,E\,J}$	$\frac{\eta_0 H\Delta x}{6\,E\,J}$	$\frac{\eta_0 H\Delta x^2}{6\,E\,J}$	η_0

[2]) $K_M = \frac{\Delta x}{6EJ}(M_{m-1} + 4\,M_m + M_{m+1})$

$$H_{kr} = \frac{6\,E\,J}{22{,}390\,\Delta x^2} = 26{,}80\,\frac{E\,J}{l^2} \text{ gegenüber } 40{,}79\,\frac{E\,J}{l^2} \text{ bei}$$

Vernachlässigung von ξ.

Q_c ist eine Integrationskonstante, die aus den Randbedingungen zu bestimmen ist ($M = 0$).

Es verbleibt uns noch die Grösse von ξ zu berechnen. Hier können wir annehmen, dass ein Bogenstab durch den Knickvorgang seine Länge s nicht ändert, es ist daher nach der Verformung $s^2 = (\Delta y - \Delta\eta)^2 + (\Delta x + \Delta\xi)^2$ vor der Verformung $s^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2$ woraus sich

$$\Delta\xi = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,\Delta\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

ergibt. Unsere Grundgleichung (11) lautet daher:

$$Q = H_0\frac{\Delta\eta}{\Delta x}\left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right] - \Delta H\frac{\Delta y}{\Delta x} + Q_c$$

oder, wenn wir die Neigungswinkel α der Bogenstäbe vor der Verformung einführen:

$$Q = H_0\frac{\Delta\eta}{\Delta x}\sec^2\alpha - \Delta H\operatorname{tg}\alpha + Q_c \quad . \; . \; . \quad (13)$$

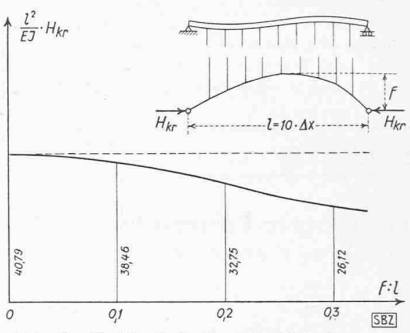

Abb. 5. Knickschub für hohe Ständer in Funktion des Pfeilverhältnisses

ΔH finden wir durch Summation der Horizontalbelastungen W, wobei je nach Stützungs- und Verformungsbild zu überlegen ist, wo $\Delta H = 0$ sein muss. W sind die Horizontalkomponenten der Ständerdrücke, also beziffern sie sich zu

$$W_m = \frac{\xi_m - a}{h_m}\,V_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Hierin ist a die Verschiebung des Versteifungsträgers, h_m die Höhe des Ständers.

Treten wir nun an unsere eigentliche Aufgabe heran, den kritischen Horizontalschub des Bogens zu bestimmen, so gehen wir am zweckmässigsten in bekannter Weise so vor, dass wir die Form der Ausbiegung η annehmen. Setzen wir die Ausbiegung, die sich aus den zugehörigen Belastungen ΔV ergibt, an einer Trägerstelle dem angenommenen Werte gleich, so haben wir einen ersten Näherungswert des kritischen Horizontalschubes gewonnen. Durch Wiederholung der Rechnung mit der neuen Form der Biegelinie lässt sich schliesslich die Genauigkeit beliebig steigern. Hierbei ist nicht ausser acht zu lassen, dass die der Querkraft nach (13) zugehörigen Momente M_0-Momente sind, die im allgemeinen Fall eine Aenderung des Horizontalschubes bewirken, der nach den üblichen Methoden der Elastizitätstheorie berechnet wird. Lediglich bei symmetrischem Tragwerk und antimetrischer Knickform tritt diese Aenderung nicht ein.

In Tabelle I ist die einfache Rechnung für das Beispiel der Abb. 4 durchgeführt.

Wie Abb. 5 zeigt, ist der Abfall der Knicklast bei Berücksichtigung der Horizontalverschiebungen schon ohne Stützenschrägstellung beträchtlich, besonders bei grossen Pfeilverhältnissen. Sind zudem die mittleren Ständer sehr kurz, so fällt die Tragfähigkeit weiter ab (Abb. 6). Eine interessante Erscheinung tritt beim Uebergang in den Grenzfall $h_m = 0$ ein, d. h. wenn der Bogenscheitel mit dem Versteifungsträger gelenkig verbunden ist. Dann liegt nämlich ein zweifach statisch unbestimmtes

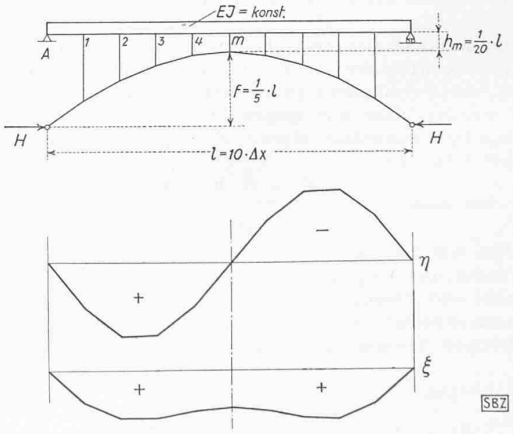

Abb. 4. Berechnungsbeispiel: Knicklast $H_{kr} = 26{,}80\,\frac{EJ}{l^2}$

Verbesserte Formänderungstheorie verankerter Hängebrücken und Stabbogen

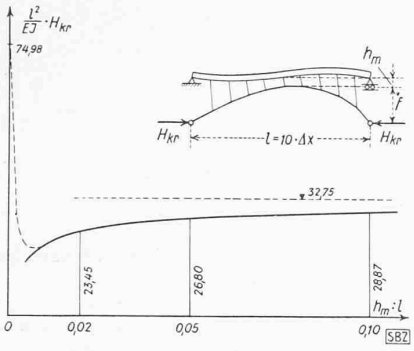

Abb. 6. Einfluss der Ständerschrägstellung in Funktion der Ständerhöhe für $f : l = 1/5$

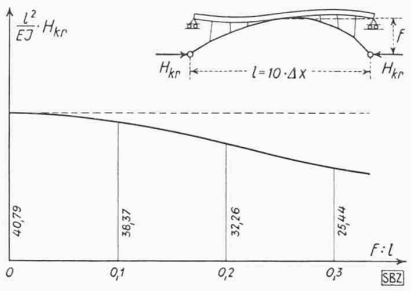

Abb. 7. Knickschub bei direkter Verbindung von Bogenscheitel und Versteifungsträger

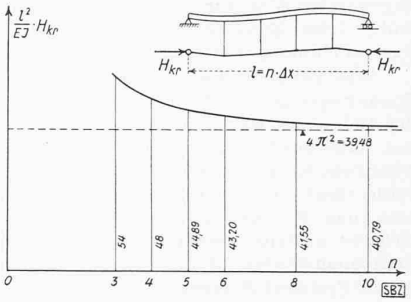

Abb. 8. Einfluss der Felderzahl (flache Bogen $f : l \approx 0$)

System vor, für das die bisherige antimetrische Knickform nicht mehr möglich ist. Die niederste Knicklast ergibt sich vielmehr für die symmetrische Knickform mit drei Halbwellen, die natürlich bedeutend grösser ist als für zwei Halbwellen. Den Uebergang vom einen System zum andern bei sehr kleinem h_m können wir uns so vorstellen, dass der Bogen zuerst nach der antimetrischen Form soweit ausknickt, bis der mittlere Ständer waagrecht liegt, und so die weitere horizontale Verschiebung verhindert (sofern der Anschluss zugfest ist). Dieses System ist dann wieder stabil und knickt erst bei höherer Belastung nach der symmetrischen Form aus. Derartige Formänderungen sind natürlich für unsere Tragwerke nicht zulässig, und wir müssen daher den mittleren Ständer genügend hoch wählen oder dann den Bogen direkt mit dem Versteifungsträger verbinden. Im letzten Falle können wir das System wieder einfach statisch unbestimmt machen, wenn wir beide Lager des Versteifungs-Trägers beweglich gestalten (Abb. 7).

Aus Abb. 8 sehen wir noch, wie die Knicklast bei weiter Ständerausteilung ansteigt.

III. Formänderungstheorie verankerter Hängebrücken

Führen wir wie üblich den einfachen Balken AB (Abb. 1) als Grundsystem und die Horizontalkomponente X des Seilzuges an einer beliebigen Stelle (z. B. der Seilmitte) als Ueberzählige ein, so besteht unsere Aufgabe zunächst darin, die Belastungen v, die das Seil in deformierter Lage auf den Versteifungsträger infolge $X = 1$ ausübt, zu bestimmen. Wir wollen gleich allfällige Schrägstellungen der Hängestangen berücksichtigen und demgemäss neben der Vertikalkomponente v noch eine Horizontal-Komponente w berücksichtigen. Im allgemeinen liegen die Hängestangen so dicht, dass wir v und w als gleichmässig verteilte Belastungen pro Längeneinheit dx auffassen können. An der Abbildung 9 lesen wir folgende Gleichgewichtsbedingungen ab:

Horizontal: $\quad -H + w\,dx + (H + dH) = 0$

$$w = -\frac{dH}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Vertikal: $\quad -H \operatorname{tg}\varphi + v\,dx + (H + dH) \operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = 0$

worin $\quad \operatorname{tg}(\varphi + d\varphi) = \operatorname{tg}\varphi + d \operatorname{tg}\varphi$

eingesetzt werden kann. Somit ergibt sich:

$$v = -\frac{dH}{dx} \operatorname{tg}\varphi - H \frac{d \operatorname{tg}\varphi}{dx} = -\frac{d}{dx}(H \operatorname{tg}\varphi) \quad . \quad (16)$$

Da wir das Gleichgewicht am verschobenen Seilelement betrachten, so haben wir nun φ durch die Kabelordinate y und die Kabelverschiebungen η und ξ auszudrücken:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy + d\eta}{dx + d\xi}$$

Zur Vereinfachung des Nenners erweitern wir auch hier wieder mit $(dx - d\xi)$ und dürfen dann $d\xi^2$ gegenüber dx^2 vernachlässigen:

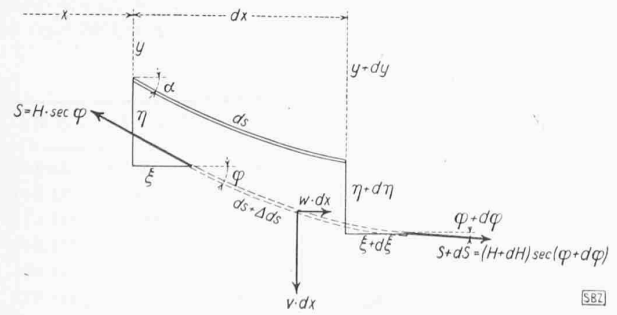

Abb. 9. Gleichgewicht am verformten Kabelelement

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(dy + d\eta)\,(dx + d\xi)}{dx^2} = (y' + \eta')\,(1 - \xi') \quad (17)$$

sodass nun unsere Gleichung (16) lautet:

$$v = -H\,(y'' + \eta'') + H \frac{d}{dx}(y' + \eta')\,\xi' + w\,(y' + \eta')\,(1 - \xi')$$

Wir haben an einer Stelle $x = x_0$ den Horizontalzug mit $H = 1$ angenommen und können daher schreiben:

$$H = 1 + \Delta H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

worin wir ΔH aus (15) gewinnen:

$$\Delta H = -\int_{x_0}^{x} w\,dx \cong \int_{x_0}^{x} \frac{\xi - a}{h}\,(y'' + \eta'') \quad . \; . \; . \quad (19)$$

Der Ausdruck für die Vertikalkomponente der Hängerbelastung lautet jetzt:

$$v = -(y'' + \eta'') - \Delta H\,(y'' + \eta'') + \frac{d}{dx}\left[\xi'\,(y' + \eta')\right] - \\ - \frac{d}{dx}(\Delta H)\,(y' + \eta')\,(1 - \xi')$$

Im letzten Gliede dürfen wir ξ' gegenüber 1 vernachlässigen und können daher folgendermassen zusammenfassen:

$$\underline{v = -(y'' + \eta'') + \frac{d}{dx}\left[(y' + \eta')\,(\xi' - \Delta H)\right]} \quad . \quad (20)$$

Erinnern wir uns an Gleichung (4), so erkennen wir, dass das zweite Glied eine Verbesserung Δv gegenüber der bisherigen Theorie darstellt. Die zugehörige Verbesserung ΔQ ergibt sich durch Integration:

$$\underline{\Delta Q = (y' + \eta')\,(\xi' - \Delta H) + Q_c} \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Das entsprechende Moment, dessen Randwerte ($M = 0$) durch Wahl der Integrationskonstanten Q_c befriedigt werden können, bezeichnen wir sinngemäss mit ΔM, sodass wir nun im Versteifungsträger das Gesamtmoment

$$M = M_0 - X\,(y - \Delta M + \eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

wirkend haben. Vernachlässigen wir, wie zulässig und üblich, die Verlängerung der Hängestangen, so erfordert der Zusammenhang von Kabel und Versteifungsträger:

$$\eta'' = -\frac{M}{EJ}$$

$$\underline{-EJ\,\eta'' = M_0 - X\,(y - \Delta M + \eta)} \quad . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Unsere Aufgabe könnte als gelöst gelten, wenn ΔM so wie y eine gegebene feste Grösse wäre. Da nun aber ΔM wieder eine Funktion von η ist und eine direkte Auflösung von Gleichung (23) nach Einsetzen von ΔM gemäss (21) aussichtslos erscheint, sind wir auf ein Iterationsverfahren angewiesen. Wir dürfen nämlich vermuten, dass ΔM gegenüber y einen kleinen Wert haben wird und können es daher in einem ersten Rechnungsgang unterdrücken, d. h. wir lösen Gleichung (23) nach den bereits bekannten Methoden auf. Aus den so gewonnenen Werten von η, ξ lässt sich nun ein erster Näherungswert ΔM berechnen. Das Verfahren ist dann einfach zu wiederholen, bis angenommene und errechnete Biegelinien genügend genau übereinstimmen.

Rascher und bequemer kommen wir mit folgender Abschätzung zum Ziel: Nehmen wir an, dass Biegelinien und Momentenflächen aufeinanderfolgender Rechnungsgänge ähnlich verlaufen, so ist mit

$$M_1 = M_0\,(1 - \alpha)$$

in der zweiten Wiederholung:

$$M_2 = M_0\,[1 - \alpha\,(1 - \alpha)] = M_0\,(1 - \alpha + \alpha^2)$$

und der wirkliche Wert:

$$M = M_0\,(1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \ldots\ldots) = M_0 \frac{1}{1 + \alpha}$$

$$M \cong \frac{M^2_0}{2\,M_0 - M_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Es ist also nur noch ein Rechnungsgang mit dem Zusatzglied ΔM erforderlich.

Ein praktisch gangbarer und den Methoden der Baustatik angepasster Weg zur Auflösung der Grundgleichung (23) wurde früher (ohne Zusatzglied ΔM) gegeben [2]). Das Verfahren sei im Zusammenhang hier kurz wiedergegeben.

Wie bekannt, haben Systemverformungen die Folge, dass Spannungs- und Verformungswerte nicht mehr proportional mit der Belastung wachsen. Es gilt also unangenehmerweise auch das Superpositionsgesetz nicht mehr, auf dem sich unsere gewöhnliche Elastizitätslehre aufbaut. In unserem hier betrachteten Falle rührt dies davon her, dass in Gleichung (23) das Glied $X\eta$, also das Produkt zweier mit der Belastung veränderlicher Grössen, auftritt. Denken wir uns aber, um einen kleinen Kunstgriff anzuwenden, X durch einen von der Belastung unabhängigen Festwert N ersetzt, so ist die Linearität und damit das Superpositionsgesetz wieder hergestellt, und es muss dann für strenge Gültigkeit lediglich gefordert werden, dass der angenommene Wert N mit dem berechneten Gesamtwert X übereinstimmt. Wir schreiben also Gleichung (23) in der Form:

$$-EJ\eta'' + N\eta = M_0 - X(y - \Delta M) \quad . \; . \; . \quad (25)$$

und können nun eine Trennung in die Teileinflüsse vornehmen:

$$\eta = \eta_0 - X\eta_{X=1}$$

sodass für jeden Teileinfluss k die Differentialgleichung

$$-EJ\eta_k'' + N\eta_k = M_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

gilt, die wir durch Ansetzen des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} &-(U - i_m N)\,\eta_{m-1} + 2(U + (i_m + i_{m+1})N)\,\eta_m - \\ &-(U - i_{m+1}N)\,\eta_{m+1} = i_m(M_{m-1} + 2M_m) + \\ &+ i_{m+1}(2M_m + M_{m+1}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (27) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen $U = \dfrac{6EJ_c}{\Delta x^2}$ und $i_m = \dfrac{J_c}{J_m}$

für jede beliebige Belastung und für veränderliches Trägheitsmoment numerisch integrieren können.

Mit den Momenten

$$\overline{M}_k = M_k - N\eta_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

ergibt sich das Moment im Versteifungsträger durch Superposition

$$M = \overline{M}_0 + X(\overline{M}_{X=1} + \Delta\overline{M}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Wir haben nun noch die Elastizitätsbedingung zur Bestimmung der Ueberzähligen X anzuschreiben, die auszusagen hat, dass sich die Verankerungspunkte der Kabel nicht gegeneinander verschieben. Sie stellt sich genau wie in der Elastizitätstheorie in der Form

$$X a_{11} + a_{10} \pm a_{1t} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

dar, worin die Verschiebungsgrössen a jetzt aber die Werte

$$\left.\begin{aligned} a_{10} &= \int \frac{y\overline{M}_0}{EJ}\,dx \\ a_{11} &= \int \frac{y\overline{M}_{X=1}}{EJ}\,dx + \frac{L}{E_k F^0{}_k} \qquad L = \int \frac{F^0{}_k\,dx}{F_k \cos^3\alpha} \\ a_{1t} &= \pm \alpha_t t L_t \qquad L_t = \int \frac{dx}{\cos^3\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (31)$$

annehmen. Die Längen L und L_t können natürlich genau genug am unverformten System berechnet werden. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Verbesserung ΔM gegenüber der bisherigen Berechnungsweise sich lediglich im Belastungszustand $X = 1$, also in der Grösse a_{11}, auswirkt, die Verschiebungszustände M_0 und $\pm t^0$ hingegen unberührt lässt.

Wir müssen noch berücksichtigen, dass das Eigengewicht, oder zumindest ein Anteil g desselben, am Kabel direkt aufgehängt ist und den Versteifungsträger daher nicht belastet. Es ist deshalb im Werte a_{10}, der im übrigen für die Totallast zu bestimmen ist, der Anfangswert $\dfrac{L}{E_k F^0{}_k} H_g$ einzubeziehen, der sich bei vollständiger Entlastung des Kabels einstellen würde.

Es ist noch nachzutragen, wie wir die Horizontalverschiebungen ξ der Kabelpunkte aus den Einsenkungen η ermitteln,

[2]) *F. Stüssi:* Zur Berechnung verankerter Hängebrücken. «Abhandlungen der Internat. Vereinigung für Brücken- und Hochbau», 4. Band.

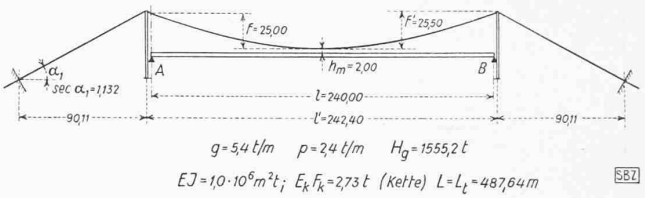

Abb. 10. Berechnungsbeispiel der Hängebrücke

da wir sie ja zur Bestimmung der Zusatzmomente ΔM bzw. der zugehörigen Querkraft ΔQ benötigen.

Ein Seilelement hat die Länge

nach der Verformung: $(ds + \Delta ds)^2 = (dx + d\xi)^2 + (dy + d\eta)^2$

vor der Verformung: $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Durch Subtraktion und Vernachlässigung der Glieder $d\xi^2$ und $d\eta^2$ finden wir

$$\xi' = \frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{\Delta ds}{dx} - y'\eta' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

also für das Kabel (F = konst): $\xi' = \dfrac{H_p}{EF\cos^3\alpha} - y'\eta'$ (32a)

für die Kette $\left(F = \dfrac{F_c}{\cos\alpha}\right)$: $\xi' = \dfrac{H_p}{EF_c\cos^2\alpha} - y'\eta'$ (32b)

Hierin kann genau genug H_p durch den Mittelwert $H_p = X - H_g$ ersetzt werden.

Berechnungsbeispiel

Wir wollen zur Darlegung der Methode die Hängebrücke nach Abb. 10 für Eigengewicht und halbseitige Nutzlast berechnen.

Das Gleichungsystem (27) lautet für EJ = konst

$$\begin{aligned} &-(U - N)_{m-1} + (2U + 4N)_m - \\ &-(U - N)_{m+1} = M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1} = \Sigma M \end{aligned}$$

worin $U = \dfrac{6EJ}{\Delta x^2} = 15\,000$ t; $N = 1900$ t (geschätzt); es ist in Tabelle II angeschrieben.

In der 1. Berechnungsstufe (Tabellen II und III) vernachlässigen wir die Verbesserung ΔM. Nachdem wir das Gleichungssystem nach η aufgelöst haben, können wir die Momente $\overline{M}$ bilden und die Verschiebungsgrössen a durch Flächenberechnung mittels der Simpsonregeln bestimmen.

Wir erhalten also gemäss (31)

$$EJ\,a_{10} = -\left(12{,}7640 \cdot 10^6 + 1555{,}2 \cdot 487{,}64\,\frac{1{,}0 \cdot 10^6}{2{,}73 \cdot 10^6}\right) = -13{,}0418 \cdot 10^6 \text{ m}^3\text{ t}$$

$$EJ\,a_{11} = 6715{,}4 + 487{,}64\,\frac{1{,}0 \cdot 10^6}{2{,}73 \cdot 10^6} = 6894{,}0 \text{ m}^3$$

Somit ergibt sich der Horizontalzug zu

$$X = -\frac{a_{10}}{a_{11}} = +1891{,}76 \text{ t} \quad (N = 1900 \text{ t genügend genau}),$$

und die Momente $\overline{M}$ können nun superponiert werden. Im zweiten Berechnungsgang stellt sich die Aufgabe, zu den Verformungen des 1. Berechnungsganges die Verbesserungen ΔM für den Belastungszustand $X = 1$ zu bestimmen. Wir erhalten zunächst die Neigungen der elastischen Linie η' als Querkraft zur Belastung $\eta'' = \dfrac{-\overline{M}}{EJ}$ und können nun nacheinander ξ' (nach 32b) und durch Integration ξ, die Horizontalbelastung w des Seils und die zugehörige Horizontalzugänderung ΔH (nach 19) und schliesslich die Verbesserungen ΔQ (nach 21) und ΔM ermitteln. Die vorkommenden Integrationen: $\eta' = \int \eta''\,dx$; $\xi = \int \xi'\,dx$; $\Delta H = \int w\,dx$ $\Delta M = \int \Delta Q\,dx$ müssen wir numerisch durch Flächensummation vornehmen, wobei wir die Teilflächen als trapezförmig voraussetzen können. Es sei hier auf Wiedergabe der Zahlenrechnung verzichtet, der Verlauf der einzelnen Grössen geht anschaulicher aus Abb. 11 hervor. Ganz analog wie bei den übrigen Einflüssen im ersten Berechnungsgang ergibt sich hier

Tabelle II. η-Gleichungen für die erste Berechnungstufe

	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	$\Sigma M_0{}^{sym}$	$\Sigma M_0{}^{ant}$	$-\Sigma M_{X=1}$
1	+ 37 600	− 13 100					84 480	6 720	44,444
2	− 13 100	+ 37 600	− 13 100				155 760	11 040	81,944
3		− 13 100	+ 37 600	− 13 100			211 200	12 480	111,111
4			− 13 100	+ 37 600	− 13 100		250 800	11 040	131,944
5				− 13 100	+ 37 600	− 13 100	274 560	6 720	144,444
6					− 26 200	+ 37 600	282 480	—	148,612
							mt	mt	m

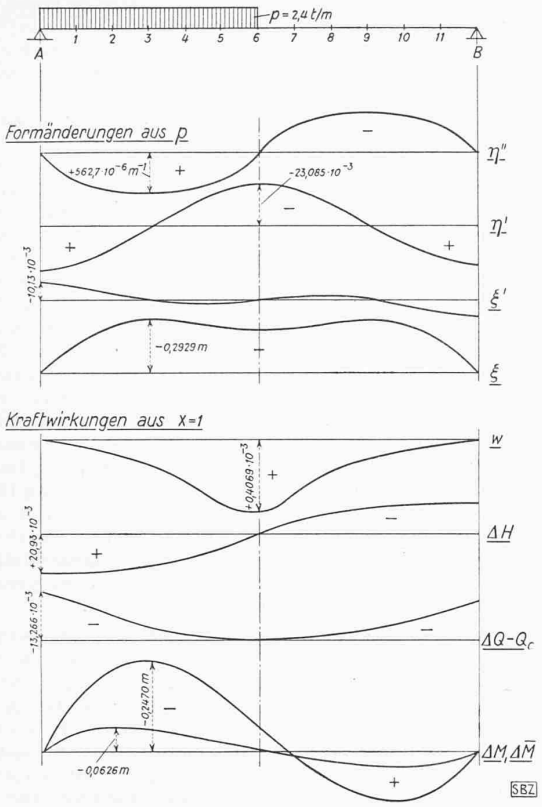

Abb. 11. Berechnungsgang für die Zusatzmomente ΔM aus $X = 1$

der Verlauf von $\Delta \overline{M}$ und der Wert der zugehörigen Verschiebungsgrösse:

$$E J \Delta a_{11} = 20{,}22 \text{ m}^3$$

somit
$$X = \frac{13{,}0418 \cdot 10^6}{6894{,}04 + 20{,}22} = 1886{,}22 \text{ t}$$

Die Superposition der Momente gemäss (29) hat mit diesem Wert zu erfolgen.

Mit noch weiteren Rechnungsgängen ergaben sich nacheinander folgende Maximalmomente:

im Punkt 3:	$M_0 = +562{,}7$ mt	im Punkt 9:	$M_0 = -532{,}3$ mt
	$M_1 = +467{,}5$ mt		$M_1 = -448{,}3$ mt
	$M_2 = +483{,}1$ mt		$M_2 = -461{,}3$ mt
	$M_3 = +480{,}2$ mt		$M_3 = -458{,}9$ mt
	max $M \cong M_4 = +480{,}7$ mt		min $M \cong M_4 = -459{,}3$ mt

Die Abschätzung nach (24) ergibt

$$\max M = \frac{562{,}7^2}{2 \cdot 562{,}7 - 467{,}5} = 480{,}7 \text{ mt}$$

$$\min M = \frac{-532{,}3^2}{2 \cdot 532{,}3 - 448{,}3} = -459{,}8 \text{ mt}$$

Man sieht also, dass die Abschätzung von vorzüglicher Genauigkeit ist und uns daher der Mühe mehrerer Rechnungsgänge enthebt.

Der Fehler der bisherigen Theorie in den massgebenden Momenten beträgt bei unserem Beispiel rd. 14 %. Bei den selben Brückenabmessungen, jedoch mit einem 5,25 mal steiferen Balken ($E J = 5{,}25 \cdot 10^6$ m² t) wurde diese Abweichung noch zu rd. 7 % erhalten, sodass wir also bei mittlerer Steifigkeit und üblichem Pfeilverhältnis nach der alten Theorie mit einem Fehler von mindestens 10 % rechnen müssen. Derartige Fehler übersteigen natürlich das für solche Bauwerke zulässige Mass. Wenn man

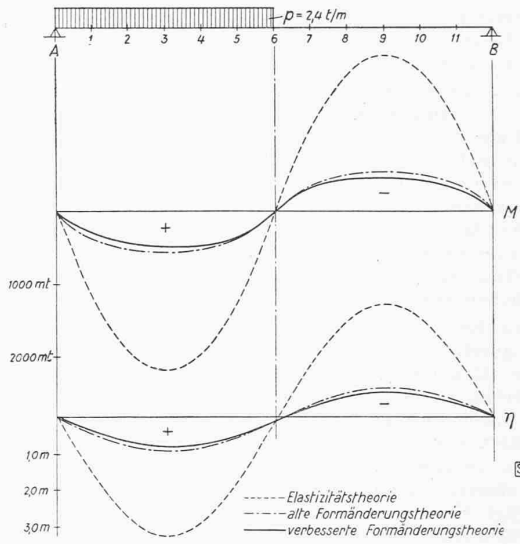

Abb. 12. Momente und Durchbiegungen des Versteifungsbalkens

noch bedenkt, dass die eben dargelegte verbesserte Berechnungsmethode zu Materialersparnissen führen muss, so dürften wohl ihrer praktischen Anwendung keine Hindernisse im Wege liegen.

Zusammenfassung

Durch Vernachlässigung der horizontalen Verschiebungen der Kabel- und Bogenpunkte ergab sich bei der bisher gebräuchlichen Formänderungstheorie verankerter Hängebrücken und Stabbogen ein zu kleiner Formänderungseinfluss, sodass sich Momente und Verformungen bei den Hängebrücken zu gross, bei den Stabbogen zu klein, und die Knicklast zu gross errechneten. Die Berücksichtigung der Horizontalverschiebungen wird durch ein numerisches Verfahren ermöglicht und äussert sich einerseits — mit dem Pfeilverhältnis zunehmend — in der Krümmung des verformten Kabels oder Bogens, anderseits — mit zunehmender Länge der Hänger und Ständer abnehmend — in Horizontalbelastungen von Kabel und Bogen durch Schiefstellen der Hänger und Ständer.

Schweiz. Verein von Dampfkessel-Besitzern

Im Jahresbericht 1939 dieses Verbandes wird darauf hingewiesen, dass in der gegenwärtigen Zeit trotz Personalmangel infolge der Mobilisation von den Mitgliedern und den Inspektoren eine besonders strenge Pflichterfüllung verlangt werden muss, spielen doch die Wirtschaftlichkeit der Anlagen bei den hohen Brennstoffkosten und die Verhütung von Betriebsausfällen eine noch wichtigere Rolle als in Friedenszeiten. Wenn das Heizpersonal militärdienstpflichtig ist, hat das Unternehmen vorsorglich und rechtzeitig geübtes Hilfspersonal heranzubilden, unter Beachtung von Art. 44 der bundesrätlichen Verordnung, wonach es für die Haltung von sachkundigem und zuverlässigem Personal verantwortlich ist. Falsch ist es, dem Heizer nebenbei noch alle möglichen Verrichtungen aufzuerlegen, denn die meisten Schäden und ihre kostspieligen und zeitraubenden Reparaturen werden durch Unachtsamkeit des Personals verursacht. Es soll dieses darum seine ganze Aufmerksamkeit der eigentlichen Aufgabe am Kessel widmen können und die nur so ermöglichte, wirtschaftliche Betriebführung allein wird die Lohnausgaben kompensieren.

Der beträchtliche Zuwachs an überwachten Objekten ist hauptsächlich der neuen Bestimmung über die Kontrolle von

Tabelle III. Momente und Durchbiegungen für die erste Berechnungstufe

	M_0^{sym}	M_0^{ant}	$-M_{X=1} = y$	η_0^{sym}	η_0^{ant}	$-\eta_{X=1}$	$\overline{M}_0^{sym}$	$\overline{M}_0^{ant}$	$-\overline{M}_{X=1}$	$y\,\overline{M}_0^{sym}$	$-y\,\overline{M}_{X=1}$
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	14 520	1200	7,6389	6,5558	0,4371	3,4489	2064,0	369,5	1,0860	15 767	8,296
2	26 400	1920	13,8889	12,3678	0,7416	6,5066	2901,2	511,0	1,5264	40 294	21,200
3	35 640	2160	18,7500	17,0526	0,8487	8,9712	3240,1	547,5	1,7047	60 752	31,963
4	42 240	1920	22,2222	20,4544	0,7416	10,7609	3376,6	511,0	1,7765	75 035	39,478
5	46 200	1200	24,3056	22,5108	0,4371	11,8428	3429,5	369,5	1,8043	83 356	43,855
6	47 520	0	25,0000	23,1985	0	12,2046	3442,9	0	1,8113	86 073	45,283
	mt	mt	m	m	m	10^{-3} m/t	mt	mt	m	m² t	m²