

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	113/114 (1939)
Heft:	20
Artikel:	Remarques sur quelques écoulements le long de lits à pente variant graduellement
Autor:	Jaeger, Charles
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-50605

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Remarques sur quelques écoulements le long de lits à pente variant graduellement. — Bernische Landbauten von Arch. A. Wyttensbach, Zollikofen. — Nochmals: Die Automobil-Tunnel-Ventilation. — Eigenschaften und Verwendung von rost- und säurebeständigem Chromstahlguß. — Neue Messungen am Dieselmotor. — Mitteilungen: Brennstoffkette. Wasserabschlusstore bei den Londoner Untergrundbahnen. Spar-

sames Heizen. Signaleinrichtungen des Werkluftschutzes. Schnelltriebwagen auf der Djibouti-Bahn. Lichtelektrische Zählerprüfung. Bau der Pragelstrasse. Eidg. Technische Hochschule. Der elektrische Betrieb Chiasso-Mailand. Die Berliner Nord-Süd-S-Bahn. — Wettbewerbe: Waisenhaus Winterthur. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 114

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 20

Remarques sur quelques écoulements le long de lits à pente variant graduellement

Par CHARLES JAEGER, Dr. ès sc. techn., Zurich

Les problèmes que nous abordons dans cette note ont fait l'objet d'un très grand nombre de publications. Engel¹⁷⁾) dans une bibliographie limitée au seul problème du déversoir cite 112 ouvrages et publications diverses parues entre 1929 et 1935. De tous ces travaux, aucune vue d'ensemble ne se dégage encore. Le but que nous poursuivons ici est de traiter par des méthodes simples et très générales, se rattachant aux travaux de Boussinesq, les problèmes de l'écoulement le long de profils dont la pente varie graduellement.

Boussinesq a donné dans son essai sur «La Théorie des Eaux courantes»¹⁾ une relation fondamentale qui exprime la hauteur de l'eau h en fonction du débit du courant liquide q par unité de largeur du lit, en un point d'abscisse s mesurée le long du lit de pente i . Compte tenu de l'influence de la courbure des filets liquides, il trouve:^{**)} (fig. 1)

$$hi - \frac{b q^2}{h^2} = \left(h - \frac{\alpha' q^2}{gh^2} \right) \frac{dh}{ds} + \frac{q^2}{g} \left\{ \frac{1}{3} \frac{d^3 h}{ds^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2 i}{ds^2} \right\} \quad (1)$$

Cette équation a été obtenue en choisissant comme axe des z et des h la normale à la pente du lit. L'expression entre crochets représente l'influence de la courbure des filets liquides.

α' est le coefficient d'inégale répartition des vitesses au sens que lui a donné Boussinesq; b un coefficient de frottement^{***)} et g l'accélération de la pesanteur.

Aucune hypothèse restrictive de quelque importance n'ayant été faite en cours de route, l'équation (1) a une portée très générale et reste en particulier valable dans tous les cas où l'on peut, dans un écoulement, substituer une droite aux courbes orthogonales aux filets liquides, condition que nous supposons remplie dans ce qui va suivre.

Remarques générales sur l'équation de Boussinesq

On sait tout le parti que Boussinesq a tiré de cette équation (1) qu'il a intégrée dans le cas où la pente i est constante et dans le cas où la pente du lit décrit des sinusoïdes le long d'une pente moyenne i_m constante. Dans l'un et l'autre cas, le terme entre crochets joue un rôle essentiel puisqu'il s'agit de déterminer la forme de la surface liquide et les variations de sa courbure.

Il y a cependant nombre de cas où les variations de la courbure de la surface ou de la courbure du lit ne jouent qu'un rôle secondaire. C'est le cas des problèmes qui nous occupent ici.

Précisons: les quantités entre crochets de l'équation (1) dépendent uniquement de la variation du rayon de courbure du lit de l'écoulement, fonction de $\frac{d^2 i}{ds^2}$ et de la variation du rayon

de courbure de la courbe $h = h(s)$, fonction de $\frac{d^3 h}{ds^3}$. Dans tous les cas où nous pouvons, en certains points du lit et de la surface libre du courant, substituer sans erreur sensible les cercles osculateurs aux courbes elles-mêmes, nous pouvons, sans erreur sensible également, négliger la valeur entre crochets.

Lorsqu'on néglige ainsi la variation de la courbure des filets liquides, on retrouve la forme classique de l'équation des courants liquides:

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_c^3} \quad \dots \quad (2)$$

dans laquelle $h_n^3 = \frac{b q^2}{i}$ et $h_c^3 = \frac{\alpha' q^2}{g}$

Il est essentiel de remarquer ici que, par définition, h_c est indépendant de la pente i et de la courbure des filets liquides.

¹⁷⁾ voir la bibliographie à la fin de l'article.

^{**)} Boussinesq: «Théorie des eaux courantes», page 192, formule (156).

^{***)} Voir: Boussinesq, loc. cit. p. 73, formule (46) et Flamant, Hydraulique, 1923, pages 52 et 229/230.

Nous désignons en outre par $H = h + \frac{v^2}{2g}$ la hauteur de la ligne d'énergie.

Dans tous les cas où nous pouvons donc négliger la courbure du lit et celle de la surface, nous pouvons utiliser sans autres la formule simplifiée (2). Cette équation (2) est d'ailleurs limitée dans son application par l'hypothèse faite en déduisant l'équation plus générale (1); hypothèse qui nous permet de substituer, sans erreur sensible, des droites aux courbes orthogonales aux filets liquides.

Ainsi défini et restreint, le domaine d'application des formules (1) et (2) reste très vaste.

Sur l'un des points en question, M. Massé²²⁾ a utilement élargi nos connaissances en traitant le cas où dans la formule (2) la pente du lit varie graduellement entre une valeur i_1 et une valeur i_2 , l'écoulement passant du régime fluvial au régime torrentiel ou inversement. Cet auteur a montré quelle était alors l'allure générale des courbes intégrales $h(s)$, représentant la surface du courant liquide. Nous retiendrons de cette étude très générale que toutes ces courbes $h(s)$ présentent un point singulier lorsque la hauteur passe par la valeur critique $h = h_c$, mais que seule entre toutes les intégrales, la courbe représentant le ressaut hydraulique positif possède une discontinuité en ce point. Il n'existe point de solution correspondant à un ressaut négatif avec tangente verticale ou discontinuité de la surface de l'eau. L'analyse de M. Massé confirme entièrement ce que nous savions par expérience. C'est donc en toute légitimité que nous appliquerons, ainsi que M. Massé l'a déjà fait, l'équation (2) au lieu de l'équation (1) à l'étude du passage graduel de l'écoulement fluvial au régime torrentiel.

Le point singulier, correspondant à la hauteur critique se trouve dans un profil où:

$$\frac{dh}{ds} = i_c \frac{h^3 - h_{nc}^3}{h^3 - h_c^3} = \frac{0}{0} \quad \dots \quad (3)$$

équation qui nous permet de définir aisément ce profil en écrivant que, en ce point:

$$h = h_{nc} = h_c$$

h_{nc} étant la valeur particulière de h_n correspondant à la pente critique i_c .

Il est en outre facile de tirer de l'équation (3) et des diverses définitions données plus haut la valeur de la pente critique qui correspond au profil critique. On a:

$$i_c h^3 - i_c h_{nc}^3 = 0 \quad \text{et:} \\ i_c = \frac{q^2 b}{h^3} = \frac{g b}{\alpha'} \quad \dots \quad (4)$$

Lorsque la pente du courant liquide varie graduellement de i_1 à i_2 en passant par la valeur $i_c = \frac{g b}{\alpha'}$, le point singulier de la courbe se trouve dans un profil ayant une inclinaison i_c sur la verticale. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, en donnant au coefficient b les valeurs extrêmes qu'il peut adopter en pratique, l'inclinaison i_c correspond à un angle faible, qu'on peut confondre avec sa tangente. La hauteur h est alors telle que $h = h_c$.

Les résultats indiqués ici ne sont exacts que dans la mesure où nous pouvons confondre les courbes orthogonales aux filets liquides avec leurs propres tangentes. Cette substitution nous donne donc une approximation du premier degré.

Le domaine d'application de la méthode que nous allons employer nous paraît donc bien défini par les diverses remarques que nous venons de faire.

I. Déversoirs à crête arrondie de forme quasi-circulaire, sans contraction latérale. Théorie approchée pour le cas où le rayon de courbure au sommet est suffisamment grand (fig. 2, page 232).

Les déversoirs à crête arrondie de forme quasi-circulaire rentrent manifestement dans le groupe des écoulements hydrauliques, dont nous venons de décrire les propriétés: la pente de ces déversoirs varie graduellement entre la valeur $i = 0$ et une valeur beaucoup plus grande que i_c . La vitesse de l'eau d'abord

faible s'accélère et dépasse la vitesse critique, la ligne de surface passant quelque part par le point singulier ou profil critique, sans qu'on observe de discontinuité en surface. En outre, les vitesses possèdent un potentiel.

Pour que l'hypothèse relative à la possibilité de substituer, en première approximation, les tangentes aux courbes équipoientielles elles-mêmes, soit satisfaita, il nous faut admettre que le rayon de courbure au sommet du déversoir est lui-même assez grand. Une remarque d'ordre pratique justifie en une large mesure notre hypothèse restrictive. En effet la tendance actuelle est de ne construire que des déversoirs ne présentant pas de pressions négatives le long du parement aval⁷⁾, ce qui limite le choix du rayon de courbure $R = R_c$ au sommet. En pratique,

on aura $\lambda = \frac{R_c}{H} > 0.5$. (L'indice c se rapporte au profil critique.)

Cette restriction que nous avons le droit de nous imposer sans être en contradiction avec les conditions de la pratique, nous permettra de développer dans la première partie de ce travail un calcul simple et de suivre une marche analogue à celle adoptée par Boussinesq pour le déversoir en mince paroi.²⁾ Cette similitude dans les développements n'est pas sans présenter certains avantages.

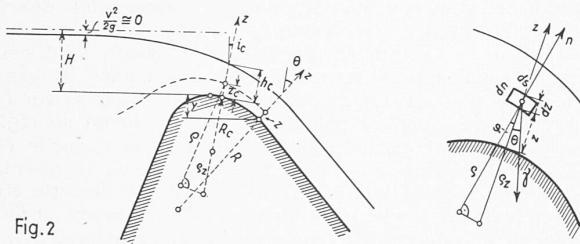


Fig. 2

Fig. 2 a

Considérons (fig. 2) un déversoir à crête arrondie. La vitesse d'approche de l'eau est supposée négligeable. Soit R_c le rayon de courbure dans la section critique d'inclinaison i_c . Soit R un rayon de courbure quelconque en un point du parement aval, dont la tangente fait un angle θ avec l'horizontale et y l'ordonnée d'un point quelconque du parement aval, mesurée à partir du sommet de la crête, h étant comme précédemment l'épaisseur de la nappe et z l'ordonnée d'un point quelconque de la section d'inclinaison θ , comptée positivement vers le haut à partir du parement.

En suivant un même filet liquide, nous écrivons le théorème de Bernoulli (γ = poids spécifique de l'eau, H = hauteur de la ligne d'énergie mesurée à partir du sommet du déversoir).

$$H + y = z \cos \theta + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

p et v désignant la pression et la vitesse au point d'ordonnée z de la section. Dérivons (5) par rapport à z :

$$0 = \cos \theta + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dz} + \frac{v}{g} \frac{dv}{dz} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

Pour écrire l'équation générale de l'équilibre hydrodynamique, dans laquelle intervient l'accélération centrifuge, nous devons faire une hypothèse quant à la valeur de la projection $\varrho_z = \varrho / \cos \varphi$ selon l'axe des z du rayon de courbure ϱ d'un filet liquide en un point d'ordonnée z , φ étant l'angle compris entre le rayon et l'axe des z . Dans sa théorie du déversoir en mince paroi, Boussinesq²⁾ avait admis qu'aux environs du sommet de l'intrados de la lame déversante, les filets liquides décrivent des cercles concentriques et que

$$\varrho = \varrho_z \doteq F(R, z) \doteq R + z$$

hypothèse plausible et qui se révéla très satisfaisante, puisque les calculs de Boussinesq sont confirmés par de très nombreuses mesures expérimentales.

Fawer²¹⁾ pense qu'il convient de poser:

$$\frac{1}{\varrho_z} = \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R + nh} - \frac{1}{R} \right) \left(\frac{z}{h} \right)^K$$

relation empirique dans laquelle n et K sont des coefficients qu'il convient de déterminer de cas en cas en traçant une épure des lignes de courant d'après la méthode de Prašil⁵ et²⁰⁾.

Il est à notre avis une hypothèse bien plus simple à faire et qui consiste à développer ϱ_z sous la forme d'un polynôme. Nous verrons d'ailleurs que les variations de ϱ_z n'exercent sur la valeur du débit qu'une influence très faible, en sorte qu'on pourra, en pratique, pour une étude en première approximation telle que celle entreprise ici, limiter le développement de ϱ_z aux environs du sommet du déversoir à un binôme du premier degré de la forme:

$$\varrho_z = R + \beta z \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

C'est en partant de cette dernière hypothèse très simple, que nous écrivons l'équation d'équilibre hydrodynamique.

Rappelons d'abord qu'on peut déduire comme suit l'équation dynamique en considérant un élément de fluide compris entre deux lignes de courant et deux normales à ces lignes: Soient ds et dn les longueurs des côtés de cet élément (voir figure 2a). Nous avons:

$$\frac{dn}{dz} = \cos \varphi \text{ et } \frac{ds}{dz} = \sin \varphi$$

où l'angle φ a déjà été défini plus haut. D'autre part:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial n} dn + \frac{\partial p}{\partial s} ds$$

et:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial n} &= -\gamma \cos(\varphi + \theta) + \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{\varrho} \\ \frac{\partial p}{\partial s} &= -\gamma \sin(\varphi + \theta) - \frac{\gamma}{g} \frac{dv_s}{dt} \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= \cos \varphi \left[-\gamma \cos(\varphi + \theta) + \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{\varrho} \right] + \\ &\quad + \sin \varphi \left[-\gamma \sin(\varphi + \theta) - \frac{\gamma}{g} \frac{dv_s}{dt} \right] \end{aligned}$$

En négligeant le terme $\frac{dv_s}{dt} = \frac{vdv_s}{ds}$ (voir Fawer²¹⁾; on trouve bien:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \cos \theta + \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{\varrho} \cos \varphi$$

Compte tenu de la relation (7), l'équation d'équilibre hydrodynamique s'écrit comme suit:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \cos \theta + \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{(R + \beta z)} \quad \dots \dots \quad (8)$$

En comparant (6) et (8), on trouve:

$$\frac{l}{v} \frac{dv}{dz} + \frac{l}{R + \beta z} = 0$$

ou encore, en intégrant:

$$\ln v = \ln \left(\frac{l}{R + \beta z} \right)^{1/\beta} + \text{const.}$$

et:

$$\begin{cases} \frac{v}{v_i} = \left(\frac{R}{R + \beta z} \right)^{1/\beta} \\ \frac{v}{v_e} = \left(\frac{R + \beta h}{R + \beta z} \right)^{1/\beta} \end{cases} \quad \dots \dots \quad (9)$$

v_i et v_e représentant la vitesse des filets liquides extrêmes, intérieur et extérieur, de la nappe déversante. On trouve successivement, en partant de la relation (5):

Pour $z = 0$, $p = p_0$:

$$v_i = \sqrt{2g(H + y - \frac{p_0}{\gamma})}$$

Pour $z = h$, $p = 0$:

$$v_e = \sqrt{2g(H + y - h \cos \theta)}$$

Pour z quelconque:

$$v = \sqrt{2g(H + y - \frac{p_0}{\gamma})} \left(\frac{R}{R + \beta z} \right)^{1/\beta} \quad \dots \quad (10)$$

En remarquant que:

$$\frac{v_i}{v_e} = \left(\frac{R + \beta h}{R} \right)^{1/\beta} = \sqrt{\frac{H + y - \frac{p_0}{\gamma}}{H + y - h \cos \theta}}$$

on trouve:

$$\frac{p_0}{\gamma} = H + y - \left(\frac{R + \beta h}{R} \right)^{2/\beta} (H + y - h \cos \theta) \quad (11)$$

et

$$v = \sqrt{2g(H + y - h \cos \theta)} \left(\frac{R + \beta h}{R + \beta z} \right)^{1/\beta} \quad (12)$$

Il est aisément d'intégrer l'équation (12). On trouve:¹⁰⁾

$$q = mH \sqrt{2gH} \quad \dots \dots \quad (13)$$

$$m = \frac{(R + \beta h)^{1/\beta}}{H} \sqrt{1 + \frac{y}{H} - \frac{h \cos \theta}{H}} \int_0^h \frac{dz}{(R + \beta z)^{1/\beta}}$$

Si nous appliquons la relation (13) à deux sections différentes, d'inclinaison θ' et θ'' , nous obtiendrons une nouvelle relation entre h' et h'' , qui impliquerait, pour autant que l'écoulement obéit aux hypothèses faites au cours de cette étude, certaines conditions de forme et d'épaisseur auxquelles la nappe déversante doit satisfaire. En posant dans l'équation (11) $p_0 = 0$ on pourrait déterminer pour le parement aval une forme satisfaisant assez rigoureusement à la condition posée par Creager et reprise par Escande⁷ et²⁴⁾, pour des déversoirs sans sous-pression. Malheureusement cette équation n'est point susceptible d'une intégration simple.

Nous nous contenterons d'écrire l'équation (12) pour le seul profil critique. En substituant à l'élément de courbe «s» une parabole, on peut écrire que: (a = paramètre) $2ay = x^2$, ou en dérivant:

$$2a \frac{dy}{dx} = 2ai = 2x$$

et pour $y = y_c$, $i = i_c = \frac{b g}{a'}$

$$y_c = \frac{x^2}{2a} = \frac{a i_c^2}{2}$$

L'équation (13) devient alors:

$$m = \sqrt{1 - \frac{h_c}{H} + \frac{i_c^2}{2H}} (a + h_c) \frac{(R_c + \beta h_c)^{1/\beta}}{H} \int_0^{h_c} \frac{dz}{(R + \beta z)^{1/\beta}} \quad \dots \quad (14)$$

La valeur i_c dépend du coefficient de frottement b . Or, ce coefficient est, dans les cas usuels, très petit, en sorte que i_c est également très petit et que son carré peut être négligé. Il reste donc, avec une approximation bien suffisante:

$$q = m H \sqrt{2gH}$$

$$h_c^3 = \frac{a' q^2}{g}$$

$$\text{Pour } \beta \neq 1, m = \frac{1}{H(\beta-1)} \sqrt{1 - \frac{h_c}{H}} [R_c + \beta h_c - R^{1-1/\beta} (R_c + \beta h_c)^{1/\beta}] \quad (15)$$

$$\text{Pour } \beta = 1, m = 2,3 \frac{R_c + h_c}{H} \sqrt{1 - \frac{h_c}{H}} \log \frac{R_c + h_c}{R_c}$$

Le groupe d'équations (15) résoud entièrement le problème; la seule hésitation que nous puissions encore avoir est le choix des coefficients α' et β , qu'il serait très ardu, sinon vain, de chercher à déterminer par voie analytique. Or, il est aisément de se rendre compte, en traçant des familles de courbes $m = m(R_c, \alpha', \beta)$ que α' et β n'ont qu'une faible influence sur la valeur de m . En étudiant un certain nombre de lames déversantes tracées par Escande²⁴⁾ et Fawer²¹⁾, pour des déversoirs quasi-circulaires, nous avons été conduits à admettre

$$\alpha' = 1 \text{ à } 1,1 \text{ et } \beta = 2^*)$$

Il ne faut pas oublier que le calcul par lui-même tient compte de l'inégale répartition des vitesses et que une valeur $\alpha' \neq 1$ signifie ici uniquement qu'il y a perturbation de cette répartition par suite des frottements.

Nous trouvons alors:

$\frac{R_c}{H} = \lambda = 0,5$	1	2	4	20
$\alpha' = 1 \quad m = 0,483$	0,459	0,432	0,414	0,390
$\alpha' = 1,1 \quad m = 0,458$	0,452	0,430	0,414	0,390

Comparons ces valeurs déterminées par le calcul aux coefficients trouvés expérimentalement au Laboratoire de Lausanne²¹⁾ par Fawer et à Karlsruhe par Rehbock⁴⁾ ***):

$m_L = 0,515$	0,460	0,425	0,406	0,385
$m_{Rh} = -$	-	0,414	0,390	0,364

Nous constatons que la concordance est entièrement satisfaisante pour un calcul de première approximation, tout au moins pour $\lambda > 1$. On peut d'ailleurs admettre que le choix du coefficient α' est influencé également par l'inégale répartition des vitesses à l'amont du déversoir, par la hauteur du déversoir au dessus du fond du canal d'aménée, par les frottements et mouvements tourbillonnaires dans ce canal et enfin, peut-être en une mesure non moindre lorsque les dimensions du modèle sont faibles, par les tensions superficielles. Il serait donc vain de vouloir prétendre à une exactitude beaucoup plus grande dans les calculs.

Il est donc bien démontré, en partant de l'équation (1) de Boussinesq, que la notion de hauteur critique est très générale et reste valable même dans le cas où la courbure du lit est loin d'être négligeable (par exemple jusqu'à la limite $\lambda > 1$). La va-

*) Le cas du déversoir en mince paroi étudié par Boussinesq correspond à $\beta = 1$.

**) Formule de Lausanne pour les déversoirs circulaires (1937):

$$m = 0,385 + 0,085 \frac{H}{H_1} - 0,010 \left(\frac{H}{R_1} \right)^2$$

où R_1 est mesuré dans une section verticale.

Formule de Rehbock :

$$m + \frac{2}{3} \left[0,845 - 0,0206 \left(3,8 - \frac{h'}{R_1} \right)^2 + \frac{h'}{12 H''} \right]$$

valable pour $h' < 0,4 H'' + 0,5 R_1$

Dans cette dernière formule, h' représente la hauteur d'eau à l'amont mesurée à partir de la crête et H'' la hauteur du barrage. Si H'' est très grand, h' tend vers la valeur H définie dans cet article, $v^2/2g$ tendant vers 0.

lité de cette notion essentielle semble limitée bien moins par le choix du coefficient β de l'équation (7) que par le fait que, pour des courbures trop prononcées, l'équation de Boussinesq n'est plus valable. Par contre, il n'y a aucun inconvénient, ainsi que nous le remarquions dès le début, à négliger dans cette équation les termes du troisième ordre qui représentent les variations de la courbure.

Nous allons voir qu'il est possible d'aborder le cas général d'un déversoir à crête arrondie en faisant intervenir le principe du débit maximum, principe dont on connaît l'efficacité en hydraulique, quoiqu'il n'ai fait à ce jour l'objet d'aucune étude d'ensemble.

II. Extension de la théorie à un cas de déversoir quelconque, sans contraction latérale, et ne présentant pas de décollement de la lame déversante. Débit maximum.

Bélanger, étudiant l'écoulement au dessus d'un seuil, introduit la notion de débit maximum ***), qui fut reprise par Boussinesq pour le cas du déversoir en mince paroi. Fawer, dans son étude des écoulements permanents à filets courbes à montré l'intérêt de cette même notion. Nous la reprendrons ici:

Posons $\frac{R_c}{H} = \lambda$; $\frac{h_c}{H} = k$ et $\beta = 2$. On peut écrire l'équation (15) sous la forme:

$$m = \sqrt{1 - k} [\lambda + 2k - \sqrt{\lambda(\lambda + 2k)}] \dots (16)$$

Pour trouver le maximum de m , prenons la dérivée par rapport à k :

$$\frac{dm}{dk} = \sqrt{1 - k} \left\{ \left[2 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda + 2k)}} \right] - \left[\lambda + 2k - \sqrt{\lambda(\lambda + 2k)} \right] \frac{1}{2(1-k)} \right\}$$

Pour que $\frac{dm}{dk} = 0$, avec $\sqrt{1 - k} \neq 0$, il faut que:

$$\lambda(\lambda + 2k) = \frac{\lambda^2 [2 - \lambda - 4k]^2}{[4 - \lambda - 6k]^2} \dots (17)$$

En posant $\beta = 1$, on aurait obtenu de façon analogue****):

$$\log \left(1 + \frac{k}{\lambda} \right) = \frac{2(1-k)}{2,3(\lambda + 3k - 2)} \dots (17a)$$

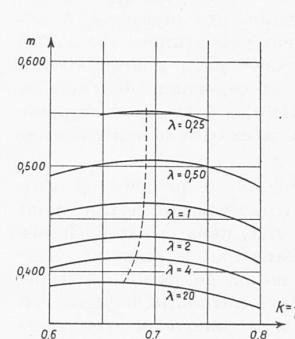


Fig. 3
Coefficients m en fonction de $\lambda = \frac{R_c}{H}$ et de $k = \frac{h_c}{H}$

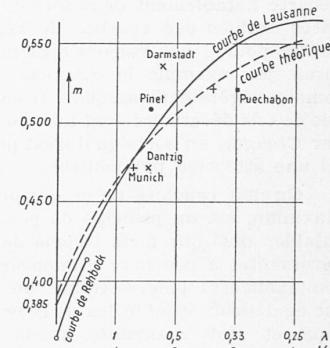


Fig. 4
Coeff. m en fonction de $\lambda = \frac{R_c}{H}$
Mesures effectuées et courbe théorique.

Les valeurs de k obtenues par l'une et l'autre dès formules (17) et (17a) ne diffèrent que peu entre elles et peu des valeurs $\frac{h_c}{H} = k$ trouvées par la méthode de la hauteur critique. A titre

***) Dans sa thèse, page 52, Böss¹¹⁾ appliquant le principe de Gauss, parle du «minimum de la hauteur de la ligne d'énergie».

****) Nous aurions aussi pu ne point donner dès le début une valeur particulière à ϱ_z . En ce cas, les équations (6) et (7) donnent alors:

$$\frac{dv}{v} = - \frac{dz}{\varrho_z}, \text{ d'où: } \frac{v_e}{v} = e^{- \int \frac{dz}{\varrho_z}}$$

et enfin:

$$\frac{\partial q}{\partial h_c} = \frac{\partial}{\partial h_c} \int_0^{h_c} v dz = \frac{\partial}{\partial h_c} \int_0^{h_c} \frac{v_e}{e^{- \int \frac{dz}{\varrho_z}}} dz = 0 \quad (18)$$

Si nous faisons dans cette équation intégrale $\varrho_z = R + \beta z$, nous retrouvons la solution (15). L'équation (18) semble cependant se prêter assez mal à une discussion générale et nous doutons quelque peu qu'on puisse la prendre comme point de départ d'une théorie plus générale.

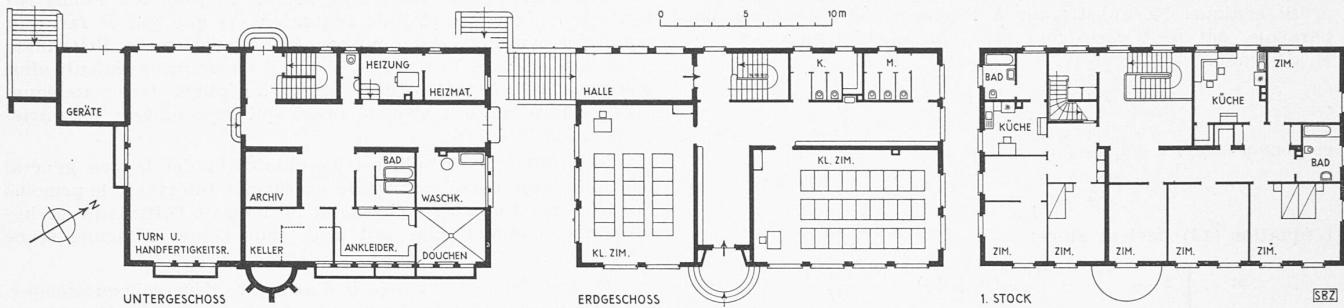


Abb. 1 bis 3. Grundrisse 1:400 und Abb. 4 (rechts): Schulhaus Baggwil

d'exemple, nous avons obtenu, en partant de l'équation (17) (Voir fig. 3 et 4, page 233):

$$\lambda = 0,25 \quad 0,50 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 20$$

$$\text{équation (17)}: k = \frac{h_c}{H} = 0,693 \quad 0,693 \quad 0,690 \quad 0,686 \quad 0,680 \quad 0,680$$

$$\text{équation (16)}: m_{\max} = 0,552 \quad 0,506 \quad 0,466 \quad 0,433 \quad 0,413 \quad 0,390$$

essais: $m_L = 0,565 \quad 0,515 \quad 0,460 \quad 0,425 \quad 0,406 \quad 0,385$

On constate que les valeurs m_{\max} coïncident, pour $\lambda > 1$, avec les valeurs précédemment trouvées au moyen de la théorie de la hauteur critique. D'autre part, la concordance entre les valeurs théoriques et les valeurs m_L mesurées expérimentalement à Lausanne nous semble très satisfaisante, l'écart entre valeurs théoriques et valeurs expérimentales ne dépassant pas 2 %. Le domaine d'application de cette nouvelle méthode, dérivée du principe du débit maximum, est d'ailleurs plus étendu que celui de la méthode dérivée de la notion de hauteur critique.

Il serait d'ailleurs vain, nous l'avons déjà dit, de vouloir rechercher, par exemple en ajustant mieux le coefficient β , une approximation plus grande, car trop de facteurs sont négligés dans cette théorie. (Contraction latérale, influence du nombre de Reynolds, tension superficielle, hauteur du barrage, etc.)

Remarquons cependant que lorsque la forme du déversoir s'écarte notablement de la forme circulaire, on peut être amené, après examen des courbes de répartition des pressions, à admettre pour β des valeurs sensiblement plus grandes que 2. Tel serait par exemple le cas pour les déversoirs triangulaires à sommet légèrement arrondi. Il convient cependant de rappeler que de tels déversoirs sont loin de satisfaire à la condition posée par Creager, en sorte qu'il n'est point nécessaire de leur accorder ici une attention particulière.

On doit conclure de ce qui précède que le principe du débit maximum est un principe de portée très générale, certainement valable, ainsi que nous venons de le voir, dans le cas de lames déversantes à courbure prononcée. Dans tout le domaine, vraisemblablement plus restreint, où la notion de hauteur critique est également valable, les deux principes introduits, hauteur critique et débit maximum, semblent se recouvrir et n'être que deux aspects d'un théorème plus général qu'il reste encore à découvrir.

Bibliographie.

- 1) 1877 Boussinesq: Essai sur la théorie des eaux courantes, Paris.
- 2) 1907 Boussinesq: Théorie approchée de l'écoulement de l'eau sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale. Paris.
- 3) 1910 Blasius: Funktionen-theoretische Methoden in der Hydrodynamik. Zeitschrift für Math. und Physik, Tome 58/1910, pp. 90–110.
- 4) 1911 Rehbock: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. Tome 83. 1911.
- 5) 1913/26 Prasit: Technische Hydrodynamik. Berlin.
- 6) 1917 v. Mises: Berechnung von Ausfluss und Ueberfallzahlen. Zeitschrift des VDI 1917.
- 7) 1917 Creager: Engineering for masonry dams. New York, 1917.
- 8) 1923 Flamant: Hydraulique, Paris, 1923.
- 9) 1925 Lauck: Der Ueberfall über ein Wehr. Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik. Tome 5/1925, pp. 1–16.
- 10) 1927 Dernedde: Die Bautechnik, 1927. Nr. 48.
- 11) 1927 Boess: Berechnung der Wasserspiegellage. VDI-Verlag, Berlin, 1927.
- 12) 1928/33 Thomas: Mitteilungen des hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. Fasc. 2 et 7.
- 13) 1929 Ledoux: Contribution à l'étude théorique et expérimentale de l'écoulement par déversoirs. Thèse, Toulouse, 1929.
- 14) 1931 Eisner: Ueberfallversuche in verschiedenen Modellgrößen. Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik, 1931, pp. 416–422.
- 15) 1931 Boujon: Expériences sur l'écoulement en déversoir. Thèse, Toulouse, 1931.
- 16) 1933 Jaeger: Notes sur le calcul des déversoirs et seuils. Bulletin technique de la Suisse Romande, 24 juin et 8 juillet 1933.
- 17) 1935 Engel: Der heutige Stand der Wehrforschung. Archiv für Technisches Messen, Novembre 1935.
- 18) 1935 Vitols: Contribution à la question du profil du barrage au point de vue hydraulique, Riga 1935.



19) 1936 Laffer: Strömung in Kanälen mit gekrümmter Sohle. Wasserwirtschaft, 1er et 16 octobre 1936.

20) 1936 Barrillon: Note sur les rayons de courbure intervenant dans la construction des réseaux hydrodynamiques. Revue générale de l'hydraulique. No. 8, mars-avril 1936.

21) 1937 Fawer: Etude de quelques écoulements permanents à filets continus. Thèse, Lausanne 1937.

22) 1938 Masset: Ressaut et ligne d'eau dans les cours d'eau à pente variable. Revue générale de l'hydraulique. No. 19 et 20, janvier-avril 1938.

23) 1938 Vitols: Ist die heutige Lösung des Ueberfallproblems einwandfrei? Wasserwirtschaft. 8 avril 1938.

24) 1938 Escande: Barrages. Hermann. 1938.

25) 1939 di Ricco: Stramazzi con data equazione di portata. Energia Elettrica, février 1939.

Bernische Landbauten von Arch. A. Wyttensbach, Zollikofen

Schulhaus in Baggwil. Die kleine Schulgemeinde Baggwil bildet eine Sektionsgemeinde derjenigen von Seedorf im Amt Aarberg. Ihr neues Schulhaus, das vor einigen Monaten bezogen wurde, umfasst zwar blos zwei Klassenzimmer, dafür aber zwei Wohnungen und Sonderräume in neuzeitlicher Vollständigkeit, wie den Grundrissen in Abb. 1 bis 3 abzulesen ist. Das schmucke Schulhäuschen ist erstellt worden um einen Preis von 52,20 Fr./m², was einer Bausumme von 131 600 Fr., ohne Umgebungsarbeiten, entspricht.

Protestantische Kirche in Zollikofen. Für die äussere Gestaltung der neuen Kirche wurde in erster Linie Rücksicht genommen auf die Lage und Umgebung des Bauplatzes: er liegt auf dem Hochplateau an der Wahlackerstrasse in unmittelbarer Nähe des neuangelegten Friedhofes, fast genau im Zentrum des Gemeindegebiets. Im Bestreben, der in einem grossen Umkreis verstreuten Ortschaft durch den Kirchenbau ein weithin sichtbares Wahrzeichen zu geben, wurde in Anlehnung an alte bernische Landkirchen ein schlanker, hochragender Turm gewählt.

Durch eine offene Eingangshalle an der Wahlackerstrasse gelangt man in den Vorraum, von diesem aus links zur Emporentreppe, zum Turm und zum Pfarrzimmer, während auf der rechten Seite ein Wartezimmer für Taufen und dergl. sowie die Toilettenanlage sich befinden. Geradeaus führen drei Glastüren in den Kirchenraum. Beim Eintritt richtet sich das Hauptaugenmerk auf das Chor.¹⁾ Dieses erhält durch drei farbige figurale Fenster eine stimmungsvolle Beleuchtung. Die Mitte des Chores schmückt der aus grünem Andeer-Granit gehauene achteckige

¹⁾ Entsprechend einem Beschluss der Synode der Berner Kirche vom Jahre 1936 wird die Gliederung in Kirchenschiff und Chor ausdrücklich gewünscht, um den Ort, wo die Sakramente (Taufe und Abendmahl) gespendet werden, auch architektonisch hervorzuheben. Diese, von der in Zürich sich durchsetzenden Vorliebe für den einen und ungeteilten Kirchenraum (vgl. Bd. 112, S. 42) grundsätzlich abweichende Auffassung vertritt Pfr. Prof. A. Schädelin (Bern) mit einlässlicher Begründung im «Werk» vom März d. J. Red.