Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 113/114 (1939)

Heft: 20

Inhaltsverzeichnis

Band 114 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 20

Remarques sur quelques écoulements le long de lits à pente variant graduellement

Par CHARLES JAEGER, Dr. ès sc. techn., Zurich

Les problèmes que nous abordons dans cette note ont fait l'objet d'un très grand nombre de publications. Engel[17] *) dans une bibliographie limitée au seul problème du déversoir cite 112 ouvrages et publications diverses parues entre 1929 et 1935. De tous ces travaux, aucune vue d'ensemble ne se dégage encore. Le but que nous poursuivons ici est de traiter par des méthodes simples et très générales, se rattachant aux travaux de Boussinesq, les problèmes de l'écoulement le long de profils dont la pente varie graduellement.

Boussinesq a donné dans son essai sur «La Théorie des Eaux courantes»[1]) une relation fondamentale qui exprime la hauteur de l'eau h en fonction du débit du courant liquide q par unité de largeur du lit, en un point d'abscisse s mesurée le long du lit de pente i. Compte tenu de l'influence de la courbure des filets liquides, il trouve: **) (fig. 1)

$$h i - \frac{b q^2}{h^2} = \left(h - \frac{\alpha' q^2}{g h^2}\right) \frac{d h}{d s} + \frac{q^2}{g} \left\{ \frac{1}{3} \frac{d^3 h}{d s^3} - \frac{1}{2} \frac{d^2 i}{d s^2} \right\} \qquad (1)$$

Cette équation a été obtenue en choisissant comme axe des z et des h la normale à la pente du lit. L'expression entre crochets représente l'influence de la courbure des filets liquides.

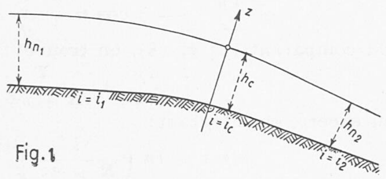

Fig. 1

α' est le coefficient d'inégale répartition des vitesses au sens que lui a donné Boussinesq; b un coefficient de frottement ***) et g l'accélération de la pesanteur.

Aucune hypothèse restrictive de quelque importance n'ayant été faite en cours de route, l'équation (1) a une portée très générale et reste en particulier valable dans tous les cas où l'on peut, dans un écoulement, substituer une droite aux courbes orthogonales aux filets liquides, condition que nous supposons remplie dans ce qui va suivre.

Remarques générales sur l'équation de Boussinesq

On sait tout le parti que Boussinesq a tiré de cette équation (1) qu'il a intégrée dans le cas où la pente i est constante et dans le cas où la pente du lit décrit des sinuosités le long d'une pente moyenne i_m constante. Dans l'un et l'autre cas, le terme entre crochets joue un rôle essentiel puisqu'il s'agit de déterminer la forme de la surface liquide et les variations de sa courbure.

Il y a cependant nombre de cas où les variations de la courbure de la surface ou de la courbure du lit ne jouent qu'un rôle secondaire. C'est le cas des problèmes qui nous occupent ici.

Précisons: les quantités entre crochets de l'équation (1) dépendent uniquement de la variation du rayon de courbure du lit de l'écoulement, fonction de $\frac{d^2 i}{d s^2}$ et de la variation du rayon de courbure de la courbe $h = h\,(s)$, fonction de $\frac{d^3 h}{d s^3}$. Dans tous les cas où nous pouvons, en certains points du lit et de la surface libre du courant, substituer sans erreur sensible les cercles osculateurs aux courbes elles-mêmes, nous pouvons, sans erreur sensible également, négliger la valeur entre crochets.

Lorsqu'on néglige ainsi la variation de la courbure des filets liquides, on retrouve la forme classique de l'équation des courants liquides:

$$\frac{d h}{d s} = i \, \frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_c^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dans laquelle $h_n^3 = \frac{b q^2}{i}$ et $h_c^3 = \frac{\alpha' q^2}{g}$

Il est essentiell de remarquer ici que, par définition, h_c est indépendant de la pente i et de la courbure des filets liquides.

Nous désignons en outre par $H = h + \frac{v^2}{2 g}$ la hauteur de la ligne d'énergie.

Dans tous les cas où nous pouvons donc négliger la courbure du lit et celle de la surface, nous pouvons utiliser sans autres la formule simplifiée (2). Cette équation (2) est d'ailleurs limitée dans son application par l'hypothèse faite en déduisant l'équation plus générale (1); hypothèse qui nous permet de substituer, sans erreur sensible, des droites aux courbes orthogonales aux filets liquides.

Ainsi défini et restreint, le domaine d'application des formules (1) et (2) reste très vaste.

Sur l'un des points en question, M. Massé[22]) a utilement élargi nos connaissances en traitant le cas où dans la formule (2) la pente du lit varie graduellement entre une valeur i_1 et une valeur i_2 l'écoulement passant du régime fluvial au régime torrentiel ou inversement. Cet auteur a montré quelle était alors l'allure générale des courbes intégrales $h\,(s)$, représentant la surface du courant liquide. Nous retiendrons de cette étude très générale que toutes ces courbes $h\,(s)$ présentent un point singulier lorsque la hauteur passe par la valeur critique $h = h_c$, mais que seule entre toutes les intégrales, la courbe représentant le ressaut hydraulique positif possède une discontinuité en ce point. Il n'existe point de solution correspondant à un ressaut négatif avec tangente verticale ou discontinuité de la surface de l'eau. L'analyse de M. Massé confirme entièrement ce que nous savions par expérience. C'est donc en toute légitimité que nous appliquerons, ainsi que M. Massé l'a déjà fait, l'équation (2) au lieu de l'équation (1) à l'étude du passage graduel de l'écoulement fluvial au régime torrentiel.

Le point singulier, correspondant à la hauteur critique se trouve dans un profil où:

$$\frac{d h}{d s} = i_c \, \frac{h^3 - h_{nc}^3}{h^3 - h_c^3} = \frac{0}{0} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

équation qui nous permet de définir aisément ce profil en écrivant que, en ce point:

$$h = h_{nc} = h_c$$

h_{nc} étant la valeur particulière de h_n correspondant à la pente critique i_c.

Il est en outre facile de tirer de l'équation (3) et des diverses définitions données plus haut la valeur de la pente critique qui correspond au profil critique. On a:

$$i_c h^3 - i_c h_{nc}^3 = 0 \quad \text{et:}$$

$$i_c = \frac{q^2 b}{h^3} = \frac{g b}{\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Lorsque la pente du courant liquide varie graduellement de i_1 à i_2 en passant par la valeur $i_c = \frac{g b}{\alpha'}$, le point singulier de la courbe se trouve dans un profil ayant une inclinaison i_c sur la verticale. Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, en donnant au coefficient b les valeurs extrêmes qu'il peut adopter en pratique, l'inclinaison i_c correspond à un angle faible, qu'on peut confondre avec sa tangente. La hauteur h est alors telle que $h = h_c$.

Les résultats indiqués ici ne sont exacts que dans la mesure où nous pouvons confondre les courbes orthogonales aux filets liquides avec leurs propres tangentes. Cette substitution nous donne donc une approximation du premier degré.

Le domaine d'application de la méthode que nous allons employer nous paraît donc bien défini par les diverses remarques que nous venons de faire.

I. Déversoirs à crête arrondie de forme quasi-circulaire, sans contraction latérale. Théorie approchée pour le cas où le rayon de courbure au sommet est suffisamment grand (fig. 2, page 232).

Les déversoirs à crête arrondie de forme quasi-circulaire rentrent manifestement dans le groupe des écoulements hydrauliques, dont nous venons de décrire les propriétés: la pente de ces déversoirs varie graduellement entre la valeur $i = 0$ et une valeur beaucoup plus grand que i_c. La vitesse de l'eau d'abord

*) voir la bibliographie à la fin de l'article.

**) *Boussinesq:* «Théorie des eaux courantes», page 192, formule (156).

***) Voir: *Boussinesq*, loc. cit. p. 73, formule (46) et *Flamant*, Hydraulique, 1923, pages 52 et 229/230.