

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 113/114 (1939)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Schwingungsablenkung durch permanente Teilresonanz  
**Autor:** Grossmann, K.H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50546>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Schwingungsablenkung durch permanente Teilresonanz. — Die Spaltung des Uran. — Kirche in Merligen am Thunersee. — Internat. Vereinigung für Brücken- und Hochbau. — Krematorium mit Abdankungshalle Thun. — Mitteilungen: Neue Brücken und Hochbauten in Finnland. Georg Simon Ohm. Pneumat. Flüssigkeitsstandanzeiger. Sprachmaschine.

Die Abteilung «Soll und Haben». Walenseestrasse. Ein internat. Kongress für Gartenkunst. Elektrische Ae<sup>9</sup>/<sub>8</sub> Lokomotive der BLS. Internationale Tagung für Physik. — Wettbewerbe: «Wohnbedarfs»-Möbelwettbewerb. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortragskalender.

Band 114

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich  
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 5

## Schwingungsablenkung durch permanente Teilresonanz

1. *Das Problem.* Unter stationären Verhältnissen ist das vom Propeller eines Flugzeugs zu überwindende Moment —  $C_0$  konstant, während das Antriebsmoment  $C(t)$  des Motors um den Mittelwert  $C_0$  periodisch schwankt. Die mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  umlaufende Kurbelwelle denken wir uns, um die grösste der zu treffenden Vereinfachungen gleich zu nennen, ersetzt durch ein  $C(t)$  unterworfenen Schwungrad vom Trägheitsmoment  $I$  und eine Welle von der Federkonstanten  $c$ , an deren andern Ende die —  $C_0$  ausgesetzte Luftschraube vom Trägheitsmoment  $I_1$  sitzt. Ein konstantes Antriebsmoment  $C(t) = C_0$  würde eine feste Verdrehung  $\zeta_0 = -C_0/c$  des Propellers gegenüber dem Schwungrad bewirken, ein Antriebsmoment von der Form  $C(t) = C_0(1 + a \sin v\Omega t)$  hingegen eine im gleichen Takt wiederkehrende Verdrehung  $\zeta = C_0 \left[ -\frac{1}{c} + b \sin v\Omega t \right]$ , mit der (theoretischen) Schwingungsamplitude

$$b = \frac{a}{I(v^2\Omega^2 - \omega_0^2)} \quad (1)$$

Hierin ist

$$\omega_0 = \sqrt{c \left( \frac{1}{I} + \frac{1}{I_1} \right)} \quad (2)$$

die freie Pulsation des Verbandes. Diese in Resonanznähe ( $\omega_0 \approx v\Omega$ ) gefährliche Schwingung gilt es von der Kurbelwelle fernzuhalten.

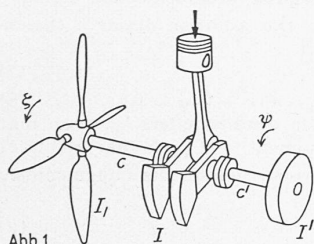


Abb. 1  
Drehzahlbedingter Resonator

2. *Ein drehzahlbedingter Resonator.* Nach Abb. 1<sup>1)</sup> kann man versuchen, die Schwingung auf ein federnd angesetztes zweites Schwungrad abzulenkten (Federkonstante  $c'$ , zusätzliches Trägheitsmoment  $I'$ ), dergestalt, dass, bei gleicher, konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  der Luftschraube  $I_1$  und des Schwungrads  $I$ , also fester Verdrehung  $\zeta_0 = -C_0/c$ , das Moment  $C_0 a \sin v\Omega t$  durch das von der Feder  $c'$  ausgeübte ständig aufgehoben wird:

$$-C_0 a \sin(v\Omega t) = c' \psi; \quad (3)$$

$\psi$  = Verdrehung, gegenüber  $I$ , des Schwungrads  $I'$ . Da dieses andererseits, dem Drallsatz

$$-c' \psi = I'(\Omega + \dot{\psi}) = I' \ddot{\psi}$$

gehorchend, relativ zu  $I$  eine harmonische Schwingung der Pulsation  $\sqrt{\frac{c'}{I'}}$  vollführt, ist die Beziehung (3) nur erfüllbar, wenn

$$v\Omega = \sqrt{\frac{c'}{I'}} \quad (4)$$

d. h. nur dann, wenn die anregende mit der Eigenfrequenz des zusätzlichen Schwingers  $c', I'$  (bei fester Aufhängung) übereinstimmt. Dieses Zusammentreffen, wo die getroffene Frequenz nicht, wie bei eigentlicher Resonanz, eine Eigenfrequenz des Verbandes, sondern eines Teils desselben ist, nenne ich eine *Teilresonanz*. Der zugefügte Resonator, der sie ermöglicht, erhöht zugleich die Zahl der Eigenfrequenzen des Verbandes von 1 auf 2. Da die Teilresonanzbedingung (4) die Drehschnelle  $\Omega$  enthält, bedeutet Teilabstimmung bei einer Umlaufzahl des Motors Verstimmung bei jeder anderen. Bei variabler Drehzahl versagt der Resonator.

3. *Ein permanenter Resonator.* Aus (4) würde  $\Omega$  herausfallen, wenn dieser Grösse auch die Eigenfrequenz des zusätzlichen Schwingers proportional wäre. Das trifft aber, bei vernachlässigter Schwerkraft, für kleine Schwingungen eines Pendels zu, dessen Aufhängepunkt eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  ausführt: Denken wir uns in Abb. 1 den Schwinger  $c', I'$  ersetzt durch ein nach Abb. 2 an dem Schwungrad  $I$  im Punkt  $Z$  vom Axabstand  $r$  aufgehängtes mathematisches Pendel von der Länge  $l$  und der im Punkt  $S$  konzentrierten Masse  $M$ : Ist es wirksam, so rotieren Propeller

und Kurbelwelle wiederum mit konstanter Drehschnelle  $\Omega$ ; unter dem Einfluss der in Abb. 2 eingezeichneten Trägheitskräfte, d. h. der Bewegungsgleichung  $l\ddot{\psi} + R\Omega^2 \sin \gamma \approx l\ddot{\psi} + r\Omega^2 \psi = 0$ , ist die kleine relative Schwingung des Pendels harmonisch von der

Pulsation  $\sqrt{\frac{r}{l}} \Omega$ ; das von ihm um die Motoraxe ausgeübte Moment ist, bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung, wegen  $2l\dot{\psi} \ll R\Omega$ , einerseits gleichfalls harmonisch von dieser Pulsation, nämlich  $= MR\Omega^2 r \psi$ , andererseits  $= -C_0 a \sin(v\Omega t)$ ,

woraus jetzt die Teilresonanzbedingung  $v\Omega = \sqrt{\frac{r}{l}} \Omega$ , oder

$$\frac{r}{l} = v^2 \quad (5)$$

folgt. Da diese Gleichung  $\Omega$  nicht enthält, besteht jetzt Teilresonanz entweder bei keiner oder bei jeder Drehzahl: (5) ist die Bedingung für *permanente* Teilresonanz<sup>2)</sup>. Konstruktiv ist sie leichter als mit einem rotierenden, mit einem Translationspendel zu verwirklichen.

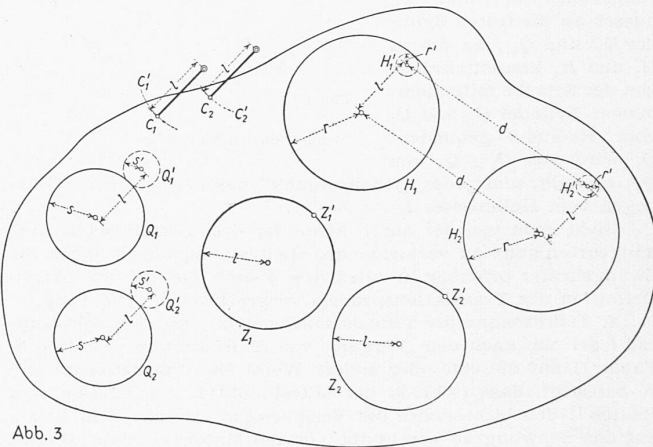


Abb. 3  
Translationspendel

4. *Translationspendel.* So nenne ich eine Scheibe dann, wenn sie erstens kreisförmige Translationen ausführen kann, und wenn zweitens die ihre Bewegungsfreiheit einschränkende Zwangskräfte stets senkrecht zu der jeweiligen Geschwindigkeit, d. h. der momentanen Kreistangente stehen. Z. B. beschreiben bei einer Bewegung des in Abb. 3 skizzierten sog. Viergelenkpendels alle Scheibenpunkte Kreisbögen vom Radius  $l$ . Dabei werden die verschiedenen Lagen irgend eines in der Scheibe geritzten Kreises  $K$  (z. B.  $H_1, Q_2$ ) vom Radius  $r \pm l$  offenbar von einem festen Kreis  $K'$  ( $H_1', Q_2'$ ) vom Radius  $|r - l|$  umhüllt:  $K$  und  $K'$  sind konjugierte Profile. Zu einem Kreis vom Radius  $l$  (z. B.  $Z_1$ ) ist ein Punkt ( $Z_1'$ ), zu einem Punkt (z. B.  $C_2$ ) ein Kreis ( $C_2'$ ) vom Radius  $l$  konjugiert. Durch Verschiebung der aus der augenblicklichen Lage eines Scheibenkreises  $K_1$  und seines konjugierten Kreises  $K_1'$  gebildeten Figur erhält man ein zweites Paar  $K_2, K_2'$  von konjugierten Kreisen. Die momentane Translationsgeschwindigkeit hat die Richtung der ge-

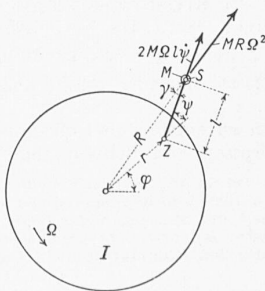


Abb. 2  
Permanenter Resonator

<sup>2)</sup> Auf eine solche zielt auch der Vorschlag von E. Meissner ab, mit der Welle quecksilbergefüllte, im Zentrifugalfeld kommunizierende Röhren umlaufen zu lassen und die Eigenschwingung des Flüssigkeitsfadens auf die Störfrequenz abzustimmen — eine der im Text behandelten hinsichtlich des Verschleisses offenbar überlegene Lösung. Siehe Verhandlungen des 3. Internat. Kongresses für techn. Mechanik (1930), T. III, S. 199.

<sup>1)</sup> Entnommen dem Aufsatz von O. Kraemer «Schwingungstilgung durch das Taylor-Pendel» in Z.VDI, Bd. 82 (1938), Nr. 45.

meinsamen Tangente an  $K_1$  und  $K_1'$  oder auch an  $K_2$  und  $K_2'$ , beziehungsweise, wenn einer der beiden konjugierten Kreise zu einem Punkt entartet, die Richtung der Tangente an den andern Kreis. Umgekehrt ist durch die Vorschrift, dass sowohl im Berührungspunkt von  $K_1$  und  $K_1'$ , als auch in jenem von  $K_2$  und  $K_2'$  die Geschwindigkeit stets in die Tangente falle, die Bewegungsart der Scheibe offenbar als eine kreisförmige Translation bestimmt: Statt a) durch die zwei Scheibenzentren  $C_1$  und  $C_2$  vorgezeichneten kongruenten Kreisbahnen  $C_1'$  und  $C_2'$  kann man die gewollte Bewegungsfreiheit der Scheibe auch verwirklichen b) durch Aufhängen an zwei gleichen, um  $d$  abstehenden Kreiszyklindern  $H_1'$  und  $H_2'$  vom Radius  $r'$  vermittelst zweier darüber geschobener, aus der Scheibe im gleichen Abstand  $d$  gestanzter, kongruenter, kreisrunder Löcher  $H_1$  und  $H_2$  vom Radius  $r > r'$ .

Eine Modifikation dieser Aufhängung besteht darin, c) die Axen der beiden Führungszyklinder  $H_1'$  und  $H_2'$  nicht festzulegen, sondern ihnen freizustellen, als Erzeugende je einen von zwei kongruenten, festen, ihrerseits um  $d$  abstehenden Kreiszyklindern  $Q_1'$ , bzw.  $Q_2'$  vom Radius  $s'$  zu beschreiben, etwa indem man  $H_1'$  und  $H_2'$  als Rollen in zwei feste Hohlzyklinder  $L_1$  und  $L_2$  vom Axabstand  $d$  und Radius  $r' + s'$  legt, Abb. 4. Gibt man den beiden aus der Scheibe gestanzten Hohlzylindern  $H_1$  und  $H_2$  den Radius  $r = r' + s$ , so sind die Axen der Führungsrollen  $H_1'$  und  $H_2'$  ausser an die festen Zylinder  $Q_1'$  und  $Q_2'$ , an die zu  $H_1$  und  $H_2$  konzentrischen, von der Scheibe mitgenommenen Zylinder  $Q_1$  und  $Q_2$  vom Radius  $s$  gebunden:  $Q_1$  wird von  $Q_1'$ ,  $Q_2$  von  $Q_2'$  umhüllt, und jeder Scheibenzentrum beschreibt einen Kreisbogen vom Halbmesser  $l = s + s'$ .

Sieht man von der durch keine der drei geschilderten Aufhängearten ganz zu vermeidenden Gleitreibung ab, so haben die Zwangskräfte offenbar in allen drei Fällen die bei der obigen Definition des Translationspendels vorgeschriebene Richtung.

5. Teilresonanz des Translationspendels. An dem Schwungrad  $I$  sei nun nach dem Vorgang von R. R. Sarazin<sup>4)</sup> und E. S. Taylor<sup>5)</sup> auf die eine oder andere Weise ein Translationspendel so befestigt, dass (Abb. 2) der Mittelpunkt  $Z$  des Kreises vom Radius  $l$ , den insbesondere der Scheibenschwerpunkt  $S$  in Bezug auf das Schwungrad beschreibt, von der Motoraxe um  $r$  absteht. Laufen Propeller und Schwungrad mit der konstanten Drehschleife  $\Omega$  um, so bestimmt sich die relative Tangentialbeschleunigung des Schwerpunkts  $S$  aus der Normalprojektion der Resultierenden der an der Scheibe angreifenden Zentrifugalkräfte auf die Richtung der jeweiligen Kreistangente, da zu dieser die Zwangskräfte, wie auch die Coriolis-Kräfte, ja immer senkrecht stehen, und wir die Schwerkraft vernachlässigen. Ist  $M$  die Scheibenmasse und  $R$  der momentane Axabstand des Schwerpunkts  $S$ , so ist  $MR\Omega^2$  der Betrag,  $-MR\Omega^2 \sin \gamma \approx -Mr\Omega^2 \psi$  die genannte Normalprojektion der resultierenden Zentrifugalkraft, und mithin  $l\ddot{\psi} + r\Omega^2 \psi = 0$ . Die Translation ist also, kleine Schwingungen vorausgesetzt, wiederum harmonisch von der Kreisfrequenz  $\Omega \sqrt{r/l}$ . Unter dieser Voraussetzung beträgt die zeitliche Ableitung der (absoluten) kinetischen Energie  $T$  des Translationspendels bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung, wie man leicht einsieht,  $\dot{T} = MRl\Omega \dot{\psi} \approx M(r+l)l\Omega \dot{\psi}$ ; auch  $\dot{T}$  schwingt mit der Kreisfrequenz  $\Omega \sqrt{r/l}$ . Da nach unserer Annahme die übrigen Teile des Verbandes keine Energieänderung erfahren, ist  $\dot{T}$  gleich der diesem zugeführten Leistung:  $\dot{T} = C_0 a \sin(\nu \Omega t) \Omega$ . Daraus ergibt sich wieder die Teilresonanzbedingung (5).

6. Die Bewegungsgleichungen. Um zu entscheiden, ob diese notwendige Bedingung (5) zur Absorption von Schwingungen

<sup>3)</sup> Bei den Aufhängungsarten b) und c) ist ein Abheben der Scheiben-Hohlzylinder von ihren Führungszyklindern natürlich nicht ausgeschlossen, ebensowenig, im Fall c), eine Verschiebung der Stellungen der beiden Führungsrollen in ihren festen Hohlzylindern. Beiderlei Unregelmässigkeiten werden indes in unserm Fall dank der Zentrifugalkraft nicht von Bestand sein können.

<sup>4)</sup> DRP 597091.

<sup>5)</sup> Crankshaft torsional vibration in radial aircraft engines. «S A E Journal» (Transactions), Vol. 38 (1935), Section 2, p. 81.

der Pulsation  $\nu \Omega$  auch hinreicht, hat man, (5) vorausgesetzt, die Bewegungsgleichungen des Verbandes zu integrieren.

An dem Schwungrad  $I$  seien  $n$  gleiche Translationspendel gleich, nämlich so angebracht, wie es Abb. 5 für jedes einzelne Pendel angibt<sup>6)</sup>; dessen Masse sei  $M$ , sein Trägheitsmoment um eine zur Motoraxe parallele Axe durch seinen Schwerpunkt  $S_i$  sei  $I_i$ . Der jeweilige Stellungswinkel  $\psi$  erhält jetzt einen Index:  $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \dots, \psi^{(n)}$ . Als die beiden übrigen Lagekoordinaten wählen wir zwei weitere Stellungswinkel: jenen,  $\varphi$ , des Schwungrads  $I$  und den Verdrehungswinkel  $\zeta$  gegenüber diesem Schwungrad des Propellers vom Trägheitsmoment  $I_p$ . Da wir die eintretenden Schwingungen als klein voraussetzen, können wir zwar nicht  $\ddot{\varphi}$ , wohl aber  $\dot{\varphi}$  einer Konstanten,  $\Omega$ , annähern.

Um erstens die Tangentialbeschleunigung  $l\ddot{\psi}^{(i)}$  des  $i$ -ten Schwerpunkts bezüglich des mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  umlaufenden Schwungrads zu bestimmen, hat man für jedes Massenelement  $m$  der Scheibe im Axabstand  $f$  ausser der zentrifugalen Trägheitskraft  $m f \dot{\varphi}^2$  eine dazu orthogonale vom Betrag  $m f |\ddot{\varphi}|$  zu berücksichtigen. Sind  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{h}$  die in Abb. 5 eingezeichneten Einheitsvektoren, so haben die zentrifugalen Trägheitskräfte die Resultierende  $M R_i \dot{\varphi}^2 \mathbf{g}$ , die dazu orthogonale die Resultante  $M R_i \ddot{\varphi} \mathbf{h}$ . Mit  $\cos \gamma_i \approx 1$ ,  $\sin \gamma_i \approx \psi^{(i)} r / R_i$  und  $R_i \approx r + l$  wird daher

$$l\ddot{\psi}^{(i)} + k_i \dot{\psi}^{(i)} + r \Omega^2 \psi^{(i)} + (r + l) \ddot{\varphi} = 0 \quad i = 1, 2 \dots n \quad (6)$$

sofern man eine der Relativbewegung widerstrebende Reibung vom Betrag  $k_i M \dot{\psi}^{(i)}$  unterstellt. Die Addition dieser  $n$  Gleichungen ergibt, bei Einführung von

$$\psi = \sum \psi^{(i)} \dots \dots \dots (7)$$

$$l\ddot{\psi} + k_i \dot{\psi} + r \Omega^2 \psi + n(r + l) \ddot{\varphi} = 0 \dots \dots (8)$$

Zweitens gehorcht die Rotation des Propellers  $I_p$ , wenn man ausser dem konstanten Bremsmoment  $-C_0$  ein der relativen Verdrehungsgeschwindigkeit  $\dot{\zeta}$  proportionales Reibungsmoment annimmt, der Gleichung

$$I_p \ddot{\zeta} + k_2 \dot{\zeta} + c \zeta + I_1 \ddot{\varphi} = -C_0 \dots \dots \dots (9)$$

Betrachten wir drittens den aus dem Schwungrad  $I$  und den  $n$  Translationspendeln bestehenden Verband für sich. Das auf ihn wirkende axiale Moment schreiben wir  $c \zeta + C_0(1 + f(t))$ ; bei einem Viertakt-Motor ist  $f(t)$  eine wiederkehrende Funktion der Periode

$$T = \frac{4\pi}{\Omega} \dots \dots \dots (10)$$

Dieses Moment ist gleich der zeitlichen Ableitung der axialen Drallkomponente  $\dot{D} = I \dot{\varphi} + D^*$ . Der axiale Drall  $D^*$  der  $n$  Translationspendel ergibt sich angenähert zu  $D^* = n(I_s + M(r + l)^2) \dot{\varphi} + M(r + l) l \dot{\psi}$ , der erste Anteil herrührend von der Fortführungs-, der zweite von der Relativbewegung.

$$\therefore M(r + l) l \ddot{\psi} - c \zeta + [I + n(I_s + M(r + l)^2)] \ddot{\varphi} = C_0(1 + f(t)) \quad (11)$$

Durch Elimination von  $\ddot{\varphi}$  aus (8), (9) und (11) erhält man, mit der Abkürzung

$$I^* = I + n(I_s + M(r + l)^2) : \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} (I + n I_s) l \ddot{\psi} + k_1 I^* \dot{\psi} + r \Omega^2 I^* \psi \\ + n c (r + l) \zeta = -n C_0 (r + l) (1 + f(t)) \\ I_1 l \ddot{\psi} + k_1 I_1 \dot{\psi} + r \Omega^2 I_1 \psi - n(r + l) I_1 \dot{\zeta} - \\ - k_2 n(r + l) \dot{\zeta} - n c (r + l) \zeta = n C_0 (r + l) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wir wollen einen  $z$ -zylindrigen Sternmotor voraussetzen, in dessen Antriebsmoment sämtliche Harmonische, deren Ordnungszahl nicht durch  $z$  teilbar ist, sich gegenseitig auslöschen. Dann hat die Fourier-Reihe, in die sich  $f(t)$  entwickeln lässt, bei Beachtung von (10) die Form:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \left( k z \frac{\Omega}{2} t + \gamma_k \right) \dots \dots (14)$$

Da die Koeffizienten dieser Reihe rasch (etwa wie  $1/k^2$ ) abnehmen, pflegt nur das erste Glied eine gefährliche Rolle zu spielen.

<sup>6)</sup> Vergl. hinsichtlich der konstruktiven Verwirklichung durch R. Chilton von der Wright Aeronautical Corp. den in Fussnote 5 zitierten Aufsatz durch Gebrüder Sulzer, Winterthur: «Ein dynamischer Drehschwingungs-Dämpfer», «SBZ», Bd. 111 (1938), Nr. 24, S. 303\*.

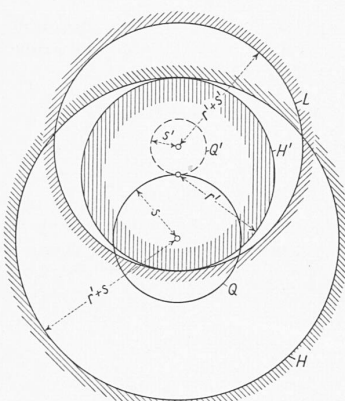


Abb. 4  
Pendelnde Aufhängung

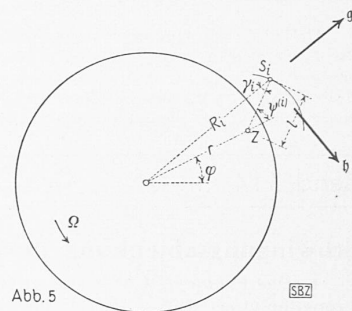


Abb. 5  
Zur Geometrie eines Translationspendels



Es unschädlich zu machen, bezweckt unsere Konstruktionsregel (5); sie sei verwirklicht, mit:

$$\nu = \frac{z}{2} \dots \dots \dots (15)$$

7. Die Eigenschwingungen. Das die freien Schwingungen regelnde reduzierte, d. h. der rechten Seiten beraubte Gleichungssystem (13) lautet, bei Ignorierung der  $\dot{\psi}$  oder  $\dot{\zeta}$  enthaltenden Reibungsglieder:

$$\begin{aligned} (I + nI_s) \ddot{\psi} &= -\nu^2 \Omega^2 I^* \psi - n(\nu^2 + 1) c \dot{\zeta} \\ I_1 \ddot{\psi} - n(\nu^2 + 1) I_1 \dot{\zeta} &= -\nu^2 \Omega^2 I_1 \psi + n(\nu^2 + 1) c \dot{\zeta} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Lösung  $\{\psi = A \sin \sqrt{\varrho} t, \zeta = B \sin \sqrt{\varrho} t\}$  bedingt, dass  $\varrho$  eine Wurzel der charakteristischen Gleichung  $D(\varrho) = 0$  ist, worin

$$\nu^2 \Omega^2 D(\varrho) = \begin{vmatrix} -(I + nI_s)\varrho + \nu^2 \Omega^2 I^*, & c \\ -\varrho + \nu^2 \Omega^2, & \varrho - \frac{c}{I_1} \end{vmatrix} = -P\varrho^2 + Q\varrho - R \dots \dots \dots (17)$$

Die beiden Wurzeln sind positiv und verschieden, da  $Q/P > 0$  und selbst das Minimum des Ausdrucks  $F(\Omega^2) = Q^2 - 4PR > 0$  ist. (Je kleiner  $M$  und  $I_s$ , desto näher kommen die beiden Eigenfrequenzen beziehentlich jener des ursprünglichen Verbandes  $c$ ,  $I$ ,  $I_1$  und der zugefügten Translationspendel:  $\sqrt{\varrho_1} \rightarrow \omega_0$ ,  $\sqrt{\varrho_2} \rightarrow \nu\Omega$ .) Relativ zu einem mit der Drehschnelle  $\Omega$  rotierenden Bezugssystem besteht bei Fehlen äusserer Kräfte offenbar dann Gleichgewicht der Trägheitskräfte, wenn  $\varphi = \Omega t$ ,  $\psi = 0$  und  $\zeta = 0$ . Wir sehen, dass der Verband, wie gross immer  $\Omega$  sei, auf eine geringe Störung dieses Gleichgewichtes, sich selber überlassen, stets mit harmonischen Schwingungen der Kreisfrequenzen  $\sqrt{\varrho_1}$  und  $\sqrt{\varrho_2}$  antwortet. Um solche Schwingungen unterscheiden sich die möglichen Lösungen von (13) (für  $k_1 = k_2 = 0$ ) voneinander.

8. Die erzwungenen Schwingungen. Die vorher vernachlässigten Reibungsterme in der reduzierten Gl. (16) bewirken, ausser einer leichten Verschiebung der Eigenfrequenzen, ein Abklingen der freien Schwingungen, mit denen die Lösungen der ungedämpften Gl. (13) anfänglich behaftet sind<sup>7)</sup>. Uebrig bleibt in jedem Fall die solcher Schwingungen ledige partikuläre Lösung. Bei geringer Dämpfung weicht diese ihrerseits nicht merklich von der eigenschwingungsfreien Lösung des folgenden, bei Beachtung von (5) aus (13) durch Streichen der Reibungsglieder hervorgehenden Gleichungspaares ab:

$$\begin{aligned} (I + nI_s) \ddot{\psi} + \nu^2 \Omega^2 I^* \psi + n c (\nu^2 + 1) \dot{\zeta} &= -n C_0 (\nu^2 + 1) \cdot \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\nu\Omega t + \gamma_k) \right] \\ I_1 \ddot{\psi} + \nu^2 \Omega^2 I_1 \psi - n(\nu^2 + 1) I_1 \dot{\zeta} - n c (\nu^2 + 1) \dot{\psi} &= n C_0 (\nu^2 + 1) \end{aligned} \quad (18)$$

Die gesuchte partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin(k\nu\Omega t + \gamma_k), \\ \zeta &= -\frac{C_0}{c} + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \sin(k\nu\Omega t + \gamma_k) \end{aligned} \quad (19)$$

worin

$$\psi_k = -\frac{n(1 + 1/\nu^2)(k^2\nu^2 - c/I_1\Omega^2)}{D(k^2\nu^2\Omega^2)} C_0 a_k, \quad Z_k = -\frac{(k^2 - 1)}{D(k^2\nu^2\Omega^2)} C_0 a_k$$

Wie erstrebt, ist

$$Z_1 = 0, \dots \dots \dots (20)$$

ferner, mit Rücksicht auf (17), (12) und (5)

$$\psi_1 = -\frac{C_0 a_1}{\Omega^2 M r^2 \left(1 + \frac{1}{\nu^2}\right)} \dots \dots \dots (21)$$

— vorausgesetzt, dass die Pulsation  $\nu\Omega = z\Omega/2$  nicht mit jener des Schwingers  $c$ ,  $I_1$  zusammenfällt, dass also die Drehschnelle  $\Omega$  von dem die Teilresonanz auch mit diesem Schwinger herstellenden Wert

$$\Omega_1 = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{c}{I_1}} \dots \dots \dots (22)$$

verschieden ist, bei dem, gemäss (17),  $D(\nu^2\Omega^2) = 0$  wird.

9. Die kritischen Drehzahlen. Allgemeiner setzt die Lösung (19) eine Drehzahl voraus, bei der  $D(k^2\nu^2\Omega^2) \neq 0$  für alle natürlichen Zahlen  $k$ . Mit den Verhältnissen

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{I + nI_s} \text{ und } \sigma^* = \frac{I^*}{I + nI_s} = 1 + \frac{nMr^2(1 + 1/\nu^2)}{I + nI_s} \quad (23)$$

ist nach (17) der kritische Fall  $D(k^2\nu^2\Omega^2) = 0$  gleichbedeutend mit

<sup>7)</sup> Dass die Reibung die Eigenschwingungen nicht aufschauelt, sondern dämpft, leuchtet ein.

$$\begin{aligned} \Phi\left(k^2, \left(\frac{\Omega}{\Omega_1}\right)^2\right) &= \frac{D(k^2\nu^2\Omega^2)}{\nu^2\Omega_1^2(I + nI_s)} = \\ &= \begin{vmatrix} -k^2 + \sigma^*, & 1 \\ -\sigma_1(k^2 - 1), & k^2(\Omega/\Omega_1)^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Aus Abb. 6 geht die Gestalt der Fläche

$$u = \Phi(k^2, (\Omega/\Omega_1)^2)$$

hervor unter der Annahme

$$\sigma_1 + \sigma^* \leq 4 \quad (25)$$

Die kritischen, d. h. die Bedingung (24) erfüllenden Punkte liegen auf den beiden Schnittpunkten dieser Fläche mit der Ebene  $u = 0$ , und zwar in den Ebenen  $k^2 = 1, 4, 9, 16 \dots$ . Dank (25) ist schon

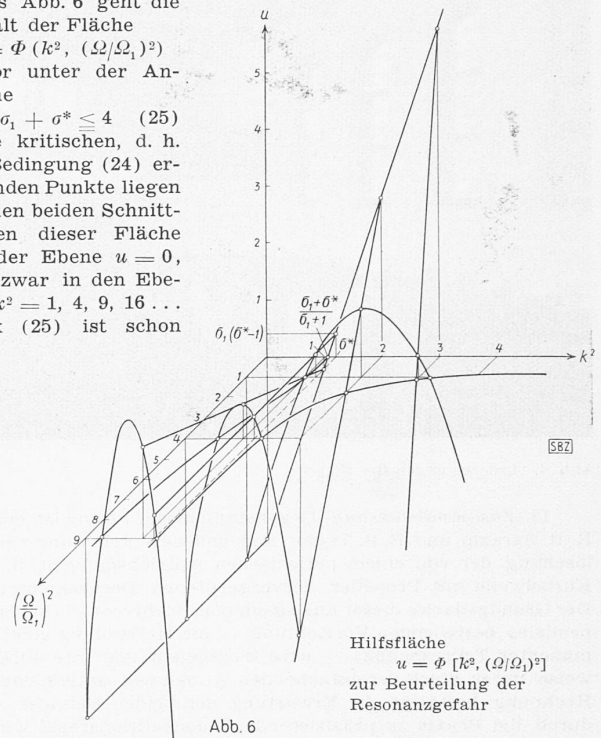


Abb. 6

das zu  $k^2 = 4$  gehörige kritische Verhältnis  $\Omega/\Omega_1 < 1$ , und die Ordinaten  $(\Omega/\Omega_1)^2$  der kritischen Punkte bilden eine mit wachsenden Abszissen  $k^2$  absteigende Folge: Jede Resonanzgefahr entfällt, sobald  $\Omega > \Omega_1$ . Bei fester Drehschnelle  $\Omega > \Omega_1$  nehmen mit höheren Werten der ganzzahligen Quadrate  $k^2$  die Beträge  $|\Phi(k^2, (\Omega/\Omega_1)^2)|$  und damit die in (19) auftretenden Nenner  $|D(k^2\nu^2\Omega^2)|$  rasch zu.

10. Die höheren Harmonischen. Die vollständige Ausmerzung der Grundharmonischen durch unsern Resonator (Gl. (20)) wird nur im angenommenen Idealfall der Dämpfungsfreiheit möglich sein. In diesem Idealfall ergibt ein leicht anzustellender Vergleich, dass, immer  $\Omega > \Omega_1$  vorausgesetzt, von der kleinsten Ordnung  $k$  an, die der Ungleichung  $I_s(k^2 - 1) > Mr^2(1 + 1/\nu^2)^2$  genügt, auch die höheren Harmonischen dank den Translationspendeln an Amplitude einbüßen. Die besonders die höheren Harmonischen beschlagende Dämpfung dürfte diesen Vergleich noch günstiger gestalten.

11. Die Kleinheit der Schwingungen. Unsere approximativen Ergebnisse werden der Wirklichkeit nur dann nahekommen, wenn sich die Schwingungen  $\psi^{(i)}$ , wie angenommen, als klein erweisen. Andernfalls entziehen sich die Bewegungen einer einfachen Kontrolle.

Nach (6) genügen alle  $\psi^{(i)}$  der selben linearen Differentialgleichung mit einem zu  $\ddot{\varphi}$  proportionalen Störungsterm;  $\ddot{\varphi}$  folgt gemäss (9) aus den Grössen  $\zeta$ ,  $\dot{\zeta}$  und  $\dot{\psi}$ , die ihrerseits aus (13) und (14) hervorgehen, unter Beachtung von (15) und (5). Beschränken wir uns auf die Grundharmonische ( $k = 1$ ), so würde die Vernachlässigung der Reibung wegen (19), (20) und (9) zu dem Schluss führen, dass  $\ddot{\varphi} = 0$  und somit  $\psi^{(i)}$  nach (6) eine Eigenschwingung von unbestimmter Amplitude sei. In Wahrheit haben wegen der Reibungsglieder für  $k = 1$  die mit (13), (14) und (9) verträglichen harmonischen Schwingungen  $\zeta$  und  $\ddot{\varphi}$  der Kreisfrequenz  $\nu\Omega$  von Null verschiedene Amplituden, und sämtliche, (6) gehorchenden  $\psi^{(i)}$  führen alsbald die selbe erzwungene Schwingung von dieser Frequenz aus: Nach dem Verebben der Eigenschwingungen ist, mit Rücksicht auf (7), für alle  $i$ :  $\psi^{(i)} = \psi/n$ ; die Amplitude dieser Schwingung ist nach (19) und (21):

$$-\frac{\psi_1}{n} = \frac{C_0 a_1}{n M r^2 \left(1 + \frac{1}{\nu^2}\right) \Omega^2}$$

woraus sich die, kleine Schwingungen  $\psi^{(i)}$  gewährleistende Konstruktionsregel

$$n M r^2 \Omega^2 \gg C_0 a_1 \dots \dots \dots (26)$$

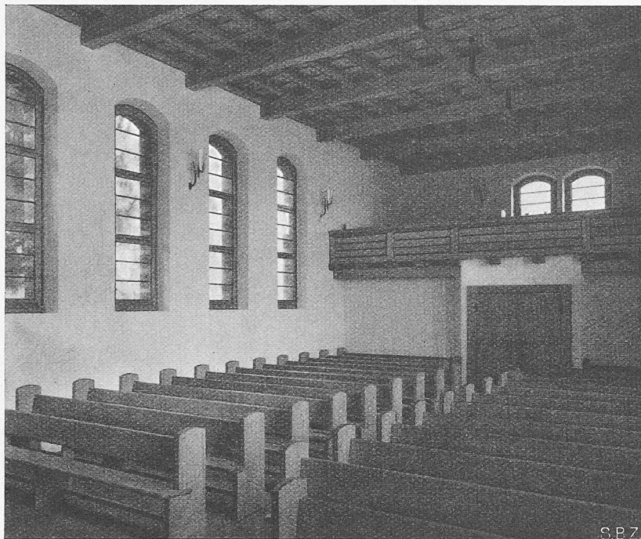


Abb. 4. Inneres gegen die Empore



Abb. 3. Westseite (Chorwand) und Seeseite (Fenster Unterrichtszimmer)

12. Zusammenfassung. Gegenstand dieser Studie ist eine von R. R. Sarazin und E. S. Taylor angegebene Vorrichtung zur Auslöschung der von einem periodischen Antriebsmoment in einer Kurbelwelle mit Propeller hervorgerufenen Drehschwingungen. Der Grundgedanke dieser aus einem oder mehreren «Translationspendeln» bestehenden Vorrichtung — die Herstellung einer «permanenten Teilresonanz» — wird blossgelegt und ihre Wirkungsweise unter stark vereinfachenden Annahmen untersucht. Die Rechnung bestätigt die Erwartung der beiden Erfinder. Eine, durch die Praxis zu präzisierende, Konstruktionsregel wird angegeben, deren Missachtung eine wesentliche Voraussetzung unserer Schlüsse, die Kleinheit der Pendelausschläge, illusorisch machen würde.

K. H. Grossmann.

## Die Spaltung des Urans

Die Umwandlung eines Elements in ein anderes, im periodischen System seitlich benachbartes, gehört nun schon seit Jahren zum täglichen Brot des Kernphysikers<sup>1)</sup>. Die Nummer eines Elements in diesem System deutet man bekanntlich als Kernladungszahl, d. h. als die Anzahl  $Z$  der positiven Elementarladungen seines Kerns, den man sich aus Protonen (Masse 1, Ladung 1), Neutronen (Masse 1, Ladung 0), Elektronen (Masse 0, Ladung -1) und Positronen (Masse 0, Ladung 1) aufgebaut denkt. (Als Masseneinheit die Masse eines Wasserstoffatoms = Protons genommen; Masse 0 heisst: noch nicht  $\frac{1}{1000}$  dieser Masse.) Es sind verschiedene Zusammensetzungen dieser Bausteine denkbar, die, bei verschiedener Gesamtmasse, die gleiche Kernladungszahl  $Z$  und darum das gleiche chemische Verhalten ergeben; in der Tat kennt man von zahlreichen Elementen verschiedene schwere, chemisch aber nicht unterscheidbare Sorten (Isotope). Zerfällt nun z. B. die Stickstoff-Isotope ( $Z = 7$ ) vom Atomgewicht 13 spontan in Kohlenstoff ( $Z = 6$ ) vom selben Atomgewicht, so erklärt sich dies durch den Verlust eines (masselosen) Positrons. Wird ein Aluminiumkern ( $Z = 13$ ) von einem  $\alpha$ -Strahl, d. h. Heliumkern ( $Z = 2$ ) getroffen, so entsteht Silizium ( $Z = 14$ ), weil entweder ein Proton, oder ein Neutron und ein Positron frei werden. Ferner hat man bis vor kurzem eine Umwandlung von Uran ( $Z = 92$ ) in Elemente noch höherer Kernladungszahl ( $Z = 93, 94 \dots$ ) festzustellen geglaubt und mit sukzessiven Abspaltungen je eines Elektrons ( $\beta$ -Strahls) gedeutet. Umwandlungen in seitlich benachbarte Elemente lassen sich so verstehen.

Nun haben aber im «J. de Physique et Radium» vom September 1938 Irene Curie und P. Savitch (Paris) über ein merkwürdiges Element berichtet, das sie durch Beschussung von Uran mit Neutronen erhielten. Chemisch benahm es sich genau wie Lanthan ( $Z = 57$ ). Ihm eine Kernladungszahl in der Nachbarschaft von 92 zuzuweisen, machte solche Schwierigkeiten, dass die beiden Forscher darauf verzichteten. Am 6. Januar 1939 haben in den «Naturwissenschaften» O. Hahn und F. Strassmann (Berlin) «nur zögernd» ein ähnliches Ergebnis veröffentlicht.

<sup>1)</sup> Vgl. zahlreiche von G. Herzog angeführte Beispiele in «SBZ» Bd. 102 (1933), Nr. 11, S. 134. Ueber den gegenwärtigen Stand der Kernphysik, unter Berücksichtigung der hier behandelten Entdeckungen, gibt R. Grégoire in «RGE» vom 24. Juni 1939 eine umfassende Uebersicht. Vgl. auch einen bezüglichen Aufsatz von Harnwell in «J. Franklin Inst.» vom April 1939.

Auch sie stiessen bei der Bestrahlung von Uran mit Neutronen auf seltsame «Radiumisotope» ( $Z = 88$ ), die alle Eigenschaften von Barium ( $Z = 56$ ) besaßen. Sie geraden Barium zu nennen, zu diesem, den bisherigen Erfahrungen widersprechenden Sprung konnten sich die beiden Forscher «noch nicht» entschliessen.

Einen Monat später, in den «Naturwissenschaften» vom 10. Februar 1939, entschlossen sie sich dazu, in Uebereinstimmung mit F. Joliot («Comptes Rendus Ac. Sciences» vom 30. Januar 1939). Auch Lise Meitner und O. R. Frisch, sowie Niels Bohr haben, in «Nature» vom 11. Februar, bzw. 25. Februar 1939, diese und andere Befunde als Beweis dafür gedeutet, dass schwere Kerne nicht auf gewohnte, sondern auf eine noch nie angetroffene (wenn schon theoretisch erwogene<sup>2)</sup>) Weise zerfallen können. Den bisher bekannten Kernzerfall kann man der Verdunstung eines Moleküls aus einem Flüssigkeitstropfen vergleichen, einen schweren Kern einem grossen Tropfen: Wie ein solcher in zwei kleinere zerfallen kann, spaltet sich ein schwerer Kern, von einem Neutron getroffen, in zwei leichtere. So scheint sich Uran ( $Z = 92$ ) z. B. in Barium ( $Z = 56$ ) und Krypton ( $Z = 36$ ) zu spalten. Die beiden neu gebildeten Kerne stossen sich ab; ihre gesamte kinetische Energie wurde von Meitner und Frisch auf 200 MeV<sup>3)</sup> geschätzt; ausgeschleuderte Spaltprodukte von ungefähr dieser Energie hat Frisch experimentell nachgewiesen<sup>4)</sup>. Bestätigungen der neuen Ansichten folgten sich innert wenigen Tagen Schlag auf Schlag: In den Laboratorien der alten und der neuen Welt wurde die Spaltung von Uran und Thorium jetzt nachgewiesen. Die bezügliche Literatur schwillt wöchentlich an. Eine zurückhaltende und sachkundige Erörterung dieser Entdeckungen gibt N. Feather in «Nature» vom 27. Mai 1939. Die aufgeworfenen Probleme zu klären, ist Sache der Kernphysiker; hier muss ein Hinweis auf ihre mögliche Tragweite genügen.

Wenn man das System von Mendeleeff durchläuft, so nimmt bekanntlich das Atomgewicht  $A$  stärker zu als die Kernladungszahl; z. B. ist für Helium  $v = A/Z = 4/2$ , für Palladium  $v = 106,7/46$ , für Uran  $v = 238,1/92$ . M. a. W.: Das aus dem periodischen System ablesbare Verhältnis  $v = A/Z$  ist eine ansteigende Funktion von  $Z$ . Isotopie bedeutet Abweichung von dieser Kurve und damit oft Instabilität. Dies trifft insbesondere für die Spaltprodukte von Uran zu, deren, vom Uran übernommenes, Verhältnis  $A/Z$  nicht mehr der ungefähr halbierten Kernladungszahl entspricht: Es sind höchst instabile Isotope, die sich sofort, z. B. durch Abstossen von Neutronen, zu stabilisieren suchen<sup>5)</sup>. Auf diese Neutronen haben namentlich Joliot, Fermi und ihre Mitarbeiter ihr Augenmerk gerichtet. Anscheinend werden bei jeder durch einen Neutronentreffer bewirkten Spaltung von Uran wenigstens zwei Neutronen frei, die beim Aufprall auf einen weiteren Urankern auch diesen zerspalten können. Darum ist, in Feather's phlegmatischer Ausdrucksweise, «die Möglichkeit eines kumulativen Prozesses eines exothermen Zerfalls in Betracht zu ziehen». Exotherm, denn nach vollendetem Spaltungs-

<sup>2)</sup> So von Ida Noddack in «Angew. Chemie» Bd. 47 (1934), S. 654.

<sup>3)</sup> Das ist der Energiezuwachs, den ein Elektron durch eine Spannung von 200 Millionen V erfährt.

<sup>4)</sup> «Nature» Bd. 143 (1939), S. 276.

<sup>5)</sup> Der Nachweis, dass bei der Uranspaltung Neutronen frei werden, wurde von M. Dodé, H. v. Halban, F. Joliot und L. Kowarski erbracht. Siehe «Comptes Rendus Académie des Sciences» Bd. 208 (1939), S. 208.