

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 111/112 (1938)
Heft: 21

Artikel: Zur Analyse der Druckeinspritzung in Diesel-Motoren
Autor: Grossmann, K.H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-49950>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Zur Analyse der Druckeinspritzung in Diesel-Motoren. — Dieselelektrische Lokomotive der Rumänischen Staatsbahn. — Wärmeschutz in Wohnungsbauten. — Nekrologe: Karl Grüter. — Mitteilungen: Das Baugewerbe und die Finanzvorlage. Die Drosselklappen der «Boulder

Dam»-Turbinen. Anwendung tiefer Temperaturen. Gewichtsbeziehungen im Bahnbetrieb. Italienische Erdgas-Kraftwerke. Das «Eidgen. Amt für geistiges Eigentum». Schweizer Bundesbahnen. Kunststipendien. — Literatur. — Vortrags-Kalender.

Der S.I.A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 21

Zur Analyse der Druckeinspritzung in Diesel-Motoren

Von Dipl. Ing. K. H. GROSSMANN, Zürich.

Die wesentlichen Vorgänge bei der Druckeinspritzung hat G. Eichelberg als Erster blossgelegt¹⁾. Durch seine hilfsbereite Kritik und Anteilnahme ist auch die folgende Studie wesentlich gefördert worden. Sie will an einem Beispiel ein zur Diskussion des Einspritzvorgangs in kompressorlosen Dieselmotoren taugliches, jedoch keineswegs auf dieses Sonderproblem beschränktes Untersuchungsverfahren entwickeln. Elektriker, die sich mit Wanderwellen befassen, werden die (vorteilhaft zuerst zu lesenden) Abschnitte Nr. 1, 2, 7 + 11, 15, 16 leicht auf ihre Verhältnisse übertragen können²⁾; die in den übrigen Abschnitten behandelte Schwierigkeit hingegen, dass die flüssige (oder gasförmige) Materie praktisch bloss positive Drücke kennt, geht nur den Mechaniker an.

Das betrachtete System für die Einspritzung des Brennstoffs in den Zylinder eines schnelllaufenden Dieselmotors besteht aus Pumpe, Oelleitung und Einspritzdüse. Die Pumpe, etwa in der

bis zur Düse eine ununterbrochene, ruhende Oelsäule. Der Druck ist (abgesehen von einer bereits gestörten Zone am Pumpenende) überall null. Irgend eine Eigenschaft der Förderleitung — Druck p , Oelgeschwindigkeit v , Oeldichte ρ , Leitungsquerschnitt q — ändert sich als Funktion der Zeit t und des Abstandes x von der Mündung der Vorkammer V_2 , unter Wahrung der Kontinuitätsbedingung und des Impulssatzes. Um jene zu formulieren, denke man sich zur Zeit t an der Stelle x zwei benachbarte Querschnitte im starren Abstand dl von der Geschwindigkeit $v(x, t)$ erfasst, mit der das Oel im ersten Querschnitt dem zweiten zuströmt. Dann stösst zu der von ihnen begrenzten Masse $dl \rho q$ kein Oel durch den ersten Querschnitt; durch den zweiten aber fliesst mit der Relativgeschwindigkeit $v_x dl$ im Zeitelement dt die Masse $dt q \rho v_x dl$ ab: $-d(\rho q) = dt q \rho v_x$. Die auf die Längeneinheit des Rohrs entfallende Oelmasse ρq variiert mit dem Druck, und zwar kann $d(\rho q)/\rho q = \sigma dp$ gesetzt werden, worin σ eine (in einem gewissen Druckbereich) konstante Grösse bedeutet, die das elastische Verhalten des Oels und der Wandung wiedergibt. Die Kontinuitätsbedingung lautet somit: $-\sigma dp = -\sigma(p_t + p_x v) dt = v_x dt$, oder

$$p_t = -\frac{1}{\sigma} v_x - v p_x \quad \dots \quad (1)$$

Zur Formulierung des (Reibung und Schwerkraft vernachlässigenden) Impulssatzes grenzen wir irgendwo innerhalb der Oelsäule einen kurzen koaxialen Zylinder von der Länge dl und dem Querschnitt q_1 ab ($q_1 < q$) und verfolgen die darin in einem bestimmten Moment enthaltene Oelmasse $\rho q_1 dl$, welche, dem Druck $-q_1 p_x dl$ ausgesetzt, die Beschleunigung $v_t + v_x v$ erfährt: $-q_1 p_x dl = \rho q_1 dl(v_t + v_x v)$.

$$\therefore v_t = -\frac{1}{\rho} p_x - v v_x \quad \dots \quad (2)$$

Das sind recht komplizierte Differentialbedingungen für v und p . Ist vielleicht eine lineare Kombination dieser Grössen einfacheren Gesetzen unterworfen? Addieren wir die mit einer Konstanten λ multiplizierte Gleichung (1) zu (2), so erhalten wir links die partielle Ableitung h_t der Linearkombination $h(x, t) = v + \lambda p$:

$$h_t = -\left(\frac{\lambda}{\sigma} + v\right) v_x - \lambda\left(v + \frac{1}{\lambda \rho}\right) p_x$$

Wählen wir speziell $\lambda = \pm \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$, so wird $h_t = -(v \pm a) h_x$, worin

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \sigma}} \quad \dots \quad (3)$$

Fassen wir also statt v und p zunächst die beiden Linearkombinationen

$$2\varphi = v + \frac{1}{\rho a} p \quad \text{und} \quad 2\psi = v - \frac{1}{\rho a} p \quad \dots \quad (4)$$

ins Auge, die den Bedingungen genügen:

$$\varphi_t = -(a + v) \varphi_x \approx -a \varphi_x, \quad \psi_t = (a - v) \psi_x \approx a \psi_x; \quad (5)$$

gegenüber der Geschwindigkeit a — etwa 1,5 km/sec — ist die Oelgeschwindigkeit $v(x, t)$ — höchstens 50 m/sec — in der Tat immer und überall zu vernachlässigen. Zur Kennzeichnung des raum-zeitlichen Zustands taugen die Grössen φ und ψ ebenso gut wie die Funktionen

$$v = \varphi + \psi \quad \text{und} \quad p = \rho a (\varphi - \psi) \quad \dots \quad (6)$$

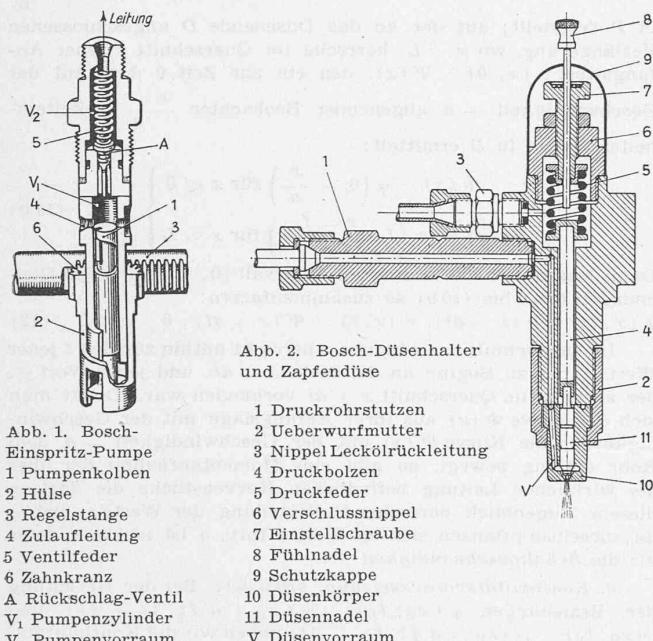
Über einer p , v -Ebene stellen die Gleichungen (4) zwei Ebenen dar; deren Höhenlinien, $\varphi = \text{const}$ und $\psi = \text{const}$, sind zwei zur p -Axe symmetrisch geneigte Geradenscharen.

Die Bedeutung des Gleichungspaares (5) erfährt ein mit passender Geschwindigkeit \dot{x} längs des Rohres bewegter Beobachter. Im Zeitelement dt gewahrt er an φ und ψ die Änderungen

$$d\varphi = (\varphi_t + \varphi_x \dot{x}) dt = \varphi_x (\dot{x} - a) dt \quad \text{und}$$

$$d\psi = (\psi_t + \psi_x \dot{x}) dt = \psi_x (\dot{x} + a) dt$$

Ein mit der Geschwindigkeit a von der Pumpe zur Düse laufender Beobachter bemerkt somit an φ , ein ihm mit der gleichen



Ausführung von Abb. 1, quetscht periodisch, sagen wir 15 mal in der sec, etwas Oel unter einigen 100 at Druck aus dem Pumpenzylinder V_1 in die Leitung, solange — während ein paar Tausendstel sec — das Rückschlagventil A offen steht. Im Nu ist das Nadelventil der Einspritzdüse, Abb. 2, von dem mit Schallgeschwindigkeit fortgepflanzter Stoß getroffen, eröffnet, hat einen Oeltropfen ausgespuckt und sich wieder geschlossen. Schon vorher ist das Rückschlagventil am Pumpenende zugeschnappt; der Druck stürzt dort auf Null, was einen fortschreitenden Zerfall der Oelsäule zur Folge hat. Fast während der vollen Umdrehungszeit der Pumpenwelle ($1/15$ sec) hat das Oel Musse, sich unter dem Einfluss der inneren Reibung über die ganze Leitungslänge auf die Geschwindigkeit Null und den Druck Null zu beruhigen. Nach Wiederaufladung des Pumpenraums V_1 setzt der Füllvorgang vom neuen ein:

1. Grundbeziehungen: Wir nehmen an, dass weder im Leitungsröhr selbst, noch im Düsenvorraum V (Abb. 2) grössere ölfreie Zwischenräume zurückgeblieben sind. Nachdem ein in der Vorkammer V_2 (Abb. 1) bei Förderschluss allenfalls entstandener Hohlraum von dem zuerst wieder eindringenden Oel ausgefüllt ist, besteht jetzt, zu Beginn unserer Zeitrechnung, von der Pumpe

¹⁾ «Über die Mittel zur kompressorlosen Brennstoffeinspritzung», Z. VDI, Bd. 70 (1926), Nr. 32, S. 1079. Ferner: «Dynamische Vorgänge in Luft- und Brennstoffleitungen», Z. techn. Physik, 1929, Nr. 10.

²⁾ Vergl. L. Bergeron: «Propagation d'ondes le long des lignes électriques. Méthode graphique», Bull. S. F. E., Oktober 1937.

Geschwindigkeit entgegenlaufender Beobachter bemerkt an ψ keine Veränderung; die vom ersten Beobachter gleichzeitig notierten Wertepaare p, v liegen alle auf einer Geraden der Schar $\varphi = \text{const}$, die vom zweiten Beobachter festgestellten Punkte auf einer Geraden der Schar $\psi = \text{const}$. Das Düsenende liege links vom Pumpenende, der Leitungsquerschnitt L links vom Querschnitt R . Der erste Beobachter, zur Zeit t_R den Querschnitt R passierend, notiere dort die Werte $p_R(t_R), v_R(t_R)$ (in der p, v -Ebene die Koordinaten des Punktes R_{t_R} , Abb. 3); der zweite Beobachter stelle beim Passieren des Querschnitts L zur Zeit t_L das Wertepaar $p_L(t_L), v_L(t_L)$ (Punkt L_{t_L} , Abb. 3) fest. Im Zeitpunkt t mögen sie sich im Querschnitt N — im Abstand $a(t - t_R)$ links von R , $a(t - t_L)$ rechts von L — begegnen. Das zur Zeit t von Beiden beobachtete Wertepaar $p_N(t), v_N(t)$, ist in der p, v -Ebene durch den Schnittpunkt N_t der R_{t_R} enthaltenden Geraden $\varphi = \text{const}$ mit der L_{t_L} enthaltenden Geraden $\psi = \text{const}$ von den Neigungstangenten $\pm \frac{1}{\varphi a}$ bestimmt (Abb. 3).

Diese, für den ähnlichen Fall ebener Luftwellen von *Bernhard Riemann* allgemeiner formulierte Tatsache³⁾ ist für das Folgende fundamental. In der technischen Literatur ist sie zuerst von *O. Schnyder*⁴⁾ bei der Untersuchung des Widerstosses in Wasserleitungen verwertet worden; *K. J. DeJuhasz*⁵⁾ hat sie bereits zu einer graphischen Ueberprüfung der Einspritzvorgänge herangezogen.

Wenn wir den zur Zeit t in einem bestimmten Leitungsquerschnitt N herrschenden Zustand p, v in einem t, p, v -Raum durch den «Zustandspunkt» N_t mit den Koordinaten t, p, v darstellen und Abb. 3 als Projektion dieses Raumes auf die p, v -Ebene auffassen, können wir unser Ergebnis auch so aussprechen: Die beiden Zustandspunkte, die ein mit der Geschwindigkeit $\pm a$ der Leitung entlang laufender Beobachter für zwei beliebige Querschnitte A und B ermittelt, liegen, auf die p, v -Ebene projiziert, auf einer Geraden vom Neigungstangens $\pm \frac{1}{\varphi a}$.

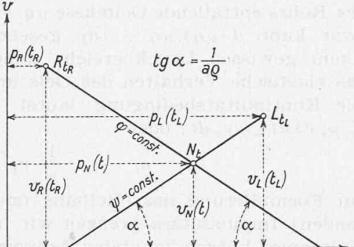


Abb. 3. Gemeinsame Wahrnehmung zweier mit Schallgeschwindigkeit bewegter Beobachter

2. Konstruktive Lösung der Differentialgleichungen (5). Zur Zeit 0 sei der Zustand längs der gesamten, zusammenhängenden Oelsäule der Länge L gegeben durch die beiden Funktionen $\varphi(x, 0)$ und $\psi(x, 0)$ ($0 \leq x \leq L$). Dann kennen wir für die Dauer a der zum Durchlaufen der Strecke L mit der Geschwindigkeit a erforderlichen Durchlaufzeit $T = L/a$ am Pumpenende die Zustandsfunktion $\psi(0, t)$, am Düsenende die Zustandsfunktion $\varphi(L, t)$. In der Tat ist ja für $0 \leq t \leq T$: $\psi(0, t) = \psi(at, 0)$ und $\varphi(L, t) = \varphi(L - at, 0)$.

Die Werte $\varphi(0, t)$ und $\psi(L, t)$ in diesem Zeitintervall erhalten wir aus den für die beiden Enden geltenden Randbedingungen. Diese bestehen, wie wir sehen werden, entweder in einer Beziehung zwischen t, p und v von der Form

$$F(t, p, v) = 0 \quad \dots \quad (7)$$

oder aber in einer linearen Relation zwischen den Differentialen dt, dp, dv von den Formen

$$dp = f(t, p, v) dt \quad \dots \quad (8a)$$

oder

$$dv = g(t, p, v) dt \quad \dots \quad (8b)$$

Der Anfangszustand etwa am Pumpenende P ist in der p, v -Ebene durch einen auf der Geraden $\psi = \psi(0, 0)$ liegenden Punkt $P_0 = (p_0, v_0)$ ⁶⁾ dargestellt. Die Projektion des Zustandspunktes P_{dt} liegt erstens auf der Geraden $\psi = \psi(0, dt)$. Zweitens liegt sie, je nach der Form der Randbedingung, entweder auf der Kurve $F(dt, p, v) = 0$, oder auf der Ordinaten-Parallelen $p = p_0 + f(0, p_0, v_0) dt$, oder schliesslich auf der Abszissen-Parallelen $v = v_0 + g(0, p_0, v_0) dt$. Ebenso bestimmen sich $P_{2dt}, \dots, P_{3dt}, \dots$, und mit P_t der Wert $\varphi(0, t)$ im Intervall $[0, T]$. Analog erhält man für diesen Zeitabschnitt den Zustand am Düsenende und damit die Funktion $\psi(L, t)$.

³⁾ «Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite». Ges. math. Werke, Leipzig 1876, S. 148.

⁴⁾ «Über Drucktösse in Rohrleitungen». Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1932, H. 5, S. 50.

⁵⁾ «Graphical analysis of hydraulic phenomena in fuel injection systems». Vortrag am White Sulphur Springs meeting der Soc. Automotive Eng., Juni 1935.

⁶⁾ Die Zustandspunkte und ihre Projektionen auf die p, v -Ebene können wir ohne Preisgabe der Deutlichkeit gleich bezeichnen.

Durch den Anfangszustand der Oelsäule ist aber nicht nur an den Leitungsenden, sondern auch in jedem dazwischen liegenden Querschnitt der Abszisse x der weitere Verlauf für die Dauer T bestimmt: Die Zustandsfunktion φ an der Stelle x erhält man aus der Gleichung

$$\varphi(x, t) = \varphi(x - at, 0) \quad \text{für } 0 \leq t \leq x/a \quad \dots \quad (9a)$$

aus der Gleichung

$$\varphi(x, t) = \varphi(0, t - \frac{x}{a}) \quad \text{für } t > x/a \quad \dots \quad (9b)$$

Von der Funktion ψ gilt

$$\psi(x, t) = \psi(x + at, 0) \text{ solange } 0 \leq t \leq \frac{L-x}{a} \quad (10a)$$

$$\psi(x, t) = \psi\left(L, t - \frac{L-x}{a}\right) \text{ für } t > \frac{L-x}{a} \quad (10b)$$

Der Zustand der Oelsäule zu einem beliebigen Zeitpunkt t legt sonach ihren Zustand im Intervall $[t, t+T]$ fest, dieser den Zustand im Intervall $[t+T, t+2T]$, und so fort. Zur Schilderung ihrer raum-zeitlichen Veränderungen ist es bequem, sie beidseitig unbegrenzt verlängert zu denken: Auf der wirklichen Säule ist der Anfangszustand gegeben durch die beiden Funktionen

$$\Phi(x) = \varphi(x, 0), \quad \Psi(x) = \psi(x, 0), \quad 0 \leq x \leq L \quad (11a)$$

Auf der am Pumpenende P angesetzten Verlängerung, wo $x < 0$, sei in einem beliebigen Querschnitt x der Anfangswert $\varphi(x, 0) = \Phi(x)$ gleich jenem Wert von φ , den ein zur Zeit 0 in x losgelassener Beobachter von der Geschwindigkeit a zur Zeit $-\frac{x}{a}$ in P feststellt; auf der an das Düsenende D angeschlossenen Verlängerung, wo $x > L$, herrsche im Querschnitt x jener Anfangswert $\psi(x, 0) = \Psi(x)$, den ein zur Zeit 0 dort mit der Geschwindigkeit $-a$ abgehender Beobachter $\frac{x-L}{a}$ Zeiteinheiten später in D ermittelt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= \varphi\left(0, -\frac{x}{a}\right) \text{ für } x < 0, \\ \Psi(x) &= \psi\left(L, \frac{x-L}{a}\right) \text{ für } x > L \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (11b)$$

Dann lassen sich die in unserem Intervall $[0, L]$ geltenden Gleichungen (9a) bis (10b) so zusammenfassen:

$$\varphi(x, t) = \Phi(x - at), \quad \psi(x, t) = \Psi(x + at), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (12)$$

Im Querschnitt der Abszisse x herrscht mithin zur Zeit t jener Wert φ , der zu Beginn an der Stelle $x - at$, und jener Wert ψ , der anfangs im Querschnitt $x + at$ vorhanden war. Denkt man sich die Kurve $\Phi(x)$ aus ihrer Anfangslage mit der Geschwindigkeit a , die Kurve $\Psi(x)$ mit der Geschwindigkeit $-a$ dem Rohr entlang bewegt, so gibt eine Momentaufnahme der über der wirklichen Leitung befindlichen Kurvenstücke die dort in diesem Augenblick herrschende Verteilung der Werte φ und ψ an; dieselben pflanzen sich als Wellen fort; a ist nichts anderes als die Schallgeschwindigkeit.

3. Kontinuitätsvoraussetzung, präzisiert. Bei der Herleitung der Beziehungen $\varphi(x_0, t_0) = \varphi(x_0 + a\Delta t, t_0 + \Delta t)$ und $\psi(x_0, t_0) = \psi(x_0 - a\Delta t, t_0 + \Delta t)$ haben wir die Kontinuitätsgleichung (1), d. h. eine im Zeitabschnitt $[t_0, t_0 + \Delta t]$ zusammenhängende Oelsäule $[x_0, x_0 + a\Delta t]$, bzw. $[x_0 - a\Delta t, x_0]$ vorausgesetzt. Es genügt jedoch, die Gültigkeit von (1) in dem raum-zeitlichen (dreieckigen) Intervall $t_0 \leq t, x_0 + a(t - t_0) \leq x \leq x_0 + a\Delta t$, bzw. $t_0 \leq t, x_0 - a\Delta t \leq x \leq x_0 - a(t - t_0)$ vorauszusetzen, d. h. es genügt, wenn ein zur Zeit t_0 mit der Geschwindigkeit $\pm a$ in x_0 abgehender Beobachter in jedem Moment das noch vor ihm liegende Stück als zusammenhängende Säule sieht, gleichgültig, ob der bereits durchlaufene Teil nachträglich zerfällt⁷⁾.

4. Bedeutung einer Druckkontrolle. Im nächsten Abschnitt werden wir während einer gewissen Zeitspanne $[0, Z]$ die Zustandsveränderung eines Säulenstücks $[g(t), L]$ verfolgen, dessen rechter Endpunkt $g(t)$, anfänglich mit 0 zusammenfallend, mit der Zeit nach links rückt. Diese Veränderung bestimmen, heisst, über dem Bereich $\mathfrak{B}: 0 \leq t \leq Z, g(t) \leq x \leq L$ der x, t -Ebene, Abb. 4, die beiden Flächen $\varphi(x, t)$ und $\psi(x, t)$ errichten. Die Fahrpläne von mit Schallgeschwindigkeit längs des Rohrs bewegten Beobachtern sind die Geradenstücke $x - at = \text{const}$, bzw. $x + at = \text{const}$. Wir wissen: Jeder den Bereich \mathfrak{B} durchquerende Fahrplan $x - at = c$ ist Höhenlinie der Fläche $\varphi(x, t)$,

⁷⁾ Denken wir uns nämlich das ganze Stück $[x_0, x_0 + a\Delta t]$ bzw. $[x_0 - a\Delta t, x_0]$ n -fach unterteilt, so gelten die fraglichen Beziehungen offenbar dann, wenn jeder Unterabschnitt solange in seiner Gänze intakt bleibt, als der Beobachter ihn noch nicht vollständig zurückgelegt hat. Unbegrenzt feine Unterteilung führt zu der obigen, allgemeineren Behauptung.

jeder Fahrplan $x + at = k$ Höhenlinie der Fläche $\psi(x, t)$ — sofern der beobachtende Beobachter in jedem Augenblick t seiner Durchquerung das Stück $[c + a\tau, L]$, bzw. $[g(t), k - a\tau]$ als intakte Säule sieht, Abb. 4. Das trifft dann und nur dann für jeden \mathfrak{B} durchkreuzenden Fahrplan zu, wenn in jedem Moment t das Stück $[g(t), L]$ zusammenhängt. Ob aus der Gültigkeit dieser Voraussetzung im Zeitpunkt 0 ihre weitere Gültigkeit auch für spätere Zeiten folgt, lässt sich entscheiden: Die weitere Gültigkeit angenommen, bestimmt der Anfangszustand der Säule $[0, L]$ zusammen mit den Randbedingungen an den Endquerschnitten $g(t)$ und L , kraft der soeben genannten Eigenschaften der beiden Zylinderflächen $\varphi(x, t)$ und $\psi(x, t)$, über \mathfrak{B} dieselben eindeutig. Der so bestimmte Druck $p(x, t) = \varphi a \cdot [\varphi(x, t) - \psi(x, t)]$ braucht aber nicht überall in \mathfrak{B} physikalisch sinnvoll, d. h. ≥ 0 zu sein: Wo $p(x, t) < 0$ wird, ist die fragliche Annahme widerlegt; die Säule zerfällt. Ist jedoch der durch die Annahme fortwährender Kontinuität der jeweiligen Säule $[g(t), L]$ erzwungene Druckverlauf überall in \mathfrak{B} ein möglicher, so ist damit für \mathfrak{B} die Annahme bestätigt und der aus ihr fließende Ablauf der wirkliche^{a)}. Unser Vorgehen wird daher aus dreierlei bestehen: der vorläufigen Annahme Gl. (1); der Konstruktion des daraus folgenden Zustandsablaufs; dessen Sicherung durch die Kontrolle, ob er der Bedingung $p \geq 0$ genügt.

5. Bereich der sinnvollen Lösung. Hat man nach Nr. 1 und 2 den Zustand φ, ψ der Säule $[0, L]$ für einen gewissen Zeitabschnitt $[0, Z]$, zunächst ohne Rücksicht auf die Beschränkung $p \geq 0$, ermittelt, d. h. über dem Rechteck $\mathfrak{E}: 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq Z$ der x, t -Ebene die beiden Zylinderflächen $\varphi(x, t) = \Phi(x - at)$ und $\psi(x, t) = \Psi(x + at)$ konstruiert, so kann man \mathfrak{E} nach wesentlichen Nullstellen des Drucks absuchen. So nenne ich eine Stelle (x_0, t_0) mit folgenden zwei Eigenschaften: 1) $p(x_0, t_0) = 0$, d. h. $\Phi(x_0 - at_0) = \Psi(x_0 + at_0)$. 2) In jedem noch so kleinen Kreis um (x_0, t_0) als Mittelpunkt liegt eine Stelle (x, t) , wo gemäß Konstruktion $\Phi(x - at) < \Psi(x + at)$, d. h. $p(x, t) < 0$. Zum Absuchen von \mathfrak{E} benutzen wir die Gerade $t = \tau$, die bei von 0 an wachsendem τ das Rechteck überstreicht, bis sie, etwa für den Wert $\tau_k < Z$, auf eine, oder mehrere, wesentliche Nullstellen $(x_1, \tau_k), (x_2, \tau_k) \dots$ stößt. Im Querschnitt x_i , in dessen unmittelbarer Nähe einen Augenblick später als τ_k die Säule zerfällt, wird der Druck fortan null bleiben. Die größte der Abszissen x_i heisse die Zerfallsgrenze $g(\tau_k)$; wir nehmen $g(\tau_k) < L$ an; es ist

$$p[g(\tau_k), t] = 0 \quad \text{für } t \geq \tau_k \quad \dots \quad (13)$$

^{a)} Ein analoger Fall: das Fadenpendel. Solange die (zentripetale) Fadenspannung $S > 0$, befindet sich der Massenpunkt auf einer Kugel um den Aufhängepunkt. (Solange der Flüssigkeitsdruck $p > 0$, hängt die Flüssigkeitssäule zusammen.) Anfänglich, zur Zeit $t = 0$, bewege sich der schwere Punkt auf dieser Kugel. Aus der Annahme, dass er dies weiterhin tue, folgt ein bestimmter zeitlicher Verlauf der Fadenspannung $S(t)$, der aber nicht dauernd physikalisch möglich zu sein braucht: In dem Moment, wo $S < 0$ wird, ist die Annahme widerlegt; der Massenpunkt verlässt die Kugeloberfläche. Folgt jedoch aus der Annahme ein Spannungsverlauf, der der Bedingung $S(t) \geq 0$ genügt, so ist dadurch die Annahme bestätigt und der aus ihr folgende Spannungsverlauf der wirkliche. Ein allmählich von $S(t)$ abweichender, gleichfalls stetiger Verlauf $S^*(t)$ ist ja solange unmöglich, als $S^*(t) > 0$ und der gespannte Faden nur die Spannung $S^*(t) = S(t)$, zulässt, also solange als $S(t) > 0$. Auf diese Analogie hat mich Prof. G. Polya aufmerksam gemacht.

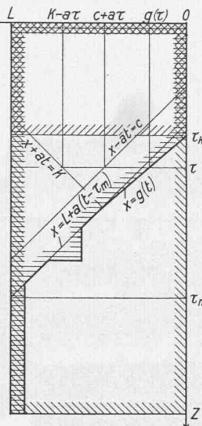


Abb. 4. Lösungsbereich und Fahrpläne

Der konstruierte Verlauf ist nicht in ganz \mathfrak{E} , wohl aber in dem Teilrechteck $\mathfrak{F}: 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq \tau_k$ überall realisierbar; überdies lässt sich in einem \mathfrak{F} umfassenden Bereich \mathfrak{B} der Verlauf physikalisch sinnvoll fortsetzen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Der erste Fall, der weichenden Zerfallsgrenze, ist in Abb. 5 skizziert, welche die Schnitte der Flächen $\varphi(x, t)$ und $\psi(x, t)$ mit den Ebenen $t = \tau_k$ und $t = \tau_k + \Delta t$ andeutet: Wegen $\psi_x[g(\tau_k), \tau_k] > 0$ ist $g(\tau_k + \Delta t) > g(\tau_k)$. Die Alternative der festen Zerfallsgrenze, Abb. 6, ist charakterisiert durch die Bedingung $\psi_x[g(\tau_k), \tau_k] \leq 0$. In diesem Fall konstruiere man über dem durch die Geraden $x = g(\tau_k)$, $x = g(\tau_k) + a(t - \tau_k)$ und $t = Z$ begrenzten Teil von \mathfrak{E} die Fläche $\varphi(x, t)$ neu, wiederum ohne Rücksicht auf die Beschränkung $p \geq 0$, indem man die vordem für das Ende 0 gültigen Randbedingungen durch die neue Randbedingung (13) für das Ende $g(\tau_k)$ ersetzt. Für den so abgeänderten Verlauf bleibt der Punkt $(g(\tau_k), \tau_k)$ Nullstelle, aber keine wesentliche mehr, wie aus Abb. 6 hervorgeht. Dort ist das über der Strecke $[g(\tau_k), g(\tau_k) + a\Delta t]$ neu konstruierte Stück der Kurve $\varphi(x, \tau_k + \Delta t)$ gestrichelt so angedeutet, wie es (13) erheischt, nämlich symmetrisch zur Kurve $\psi(x, \tau_k + \Delta t)$ bezüglich der Vertikalen durch $g(\tau_k)$.

Abb. 7 stellt drei Grenzfälle mit weichender Zerfallsgrenze dar: An den Sprungstellen sind die Wellenbilder in Wirklichkeit natürlich gegen die Vertikale um einen kleinen Winkel ε geneigt; die Skizzen folgen aus dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$. Jedenfalls gilt bei weichender Zerfallsgrenze:

$$g(\tau_k + \Delta t) - g(\tau_k) \geq a\Delta t \quad \dots \quad (14)$$

Darum erheischt in diesem Fall die neue Randbedingung (13) keine Neukonstruktion der Fläche $\varphi(x, t)$.

Nun verfolgen wir die jeweilige Lage der Zerfallsgrenze weiter in Funktion der von τ_k an wachsenden Zeit. Liegt bei fester Zerfallsgrenze in dem Rechteck: $\tau_k \leq t \leq \theta, g(\tau_k) \leq x \leq L$ keine wesentliche Nullstelle des (korrigierten) Drucks, so bezeichnen wir im Intervall $[\tau_k, \theta]$ als Zerfallsgrenze (entsprechend der anschaulichen Bedeutung des Wortes) die Abszisse des rechten Endquerschnitts der Säule $[g(\tau_k), L]; g(t) = g(\tau_k)$. In beiden Fällen kann in einem bestimmten Zeitpunkt τ_h eine feste Zerfallsgrenze $g(\tau_h) > g(\tau_k)$ auftreten. Dann ändere man wie soeben über dem analogen Teil von \mathfrak{E} mit der Spitze in $(g(\tau_h), \tau_h)$ die (eventuell bereits modifizierte) Fläche $\varphi(x, t)$ ab gemäß der neuen Randbedingung $p[g(\tau_h), t] = 0$, usw.

Die den verschiedenen Zeitpunkten zugeordneten Zerfallsgrenzen liegen auf einer, in einzelnen Zeitpunkten möglicherweise unstetigen, Kurve $x = g(t)$, Abb. 4. Wo die Zerfallsgrenze zurückweicht, gilt wegen (14):

$$\frac{dg}{dt} \geq a \quad \dots \quad (15)$$

Über dem in Abb. 4 hervorgehobenen, das Rechteck \mathfrak{F} umfassenden Bereich \mathfrak{B} ist jetzt der aus dem Anfangszustand und den jeweiligen Randbedingungen zwangsläufig konstruierte Zustandsverlauf offenbar realisierbar und darum nach der vorangegangenen Nummer der wirkliche.

Benennen wir einen die Säule $[0, L]$ mit der Geschwindigkeit $+a$ durchlaufenden Beobachter nach dem Zeitpunkt ϑ seiner Ankunft am Düsenende D . Ein früh genug am Pumpenende P abgehender Beobachter ϑ sieht das noch vor ihm liegende Stück der Strecke $[0, L]$ immer als intakte Säule; der Fahrplan des spätesten Beobachters τ_m , für den dies noch zutrifft, $x = L + a(t - \tau_m)$, ist in Abb. 4 eingezeichnet. Für $T \leq t \leq \tau_m$ ist $\varphi(L, t) = \varphi(0, t - T)$ und fällt die Schnittkurve $\varphi(L, t)$ der endgültigen Fläche $\varphi(x, t)$ mit der Ebene $x = L$ in jene der zuerst errichteten, unkorrigierten Fläche.

(Schluss folgt.)

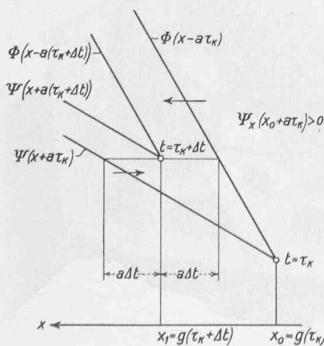


Abb. 5. Weichende Zerfallsgrenze

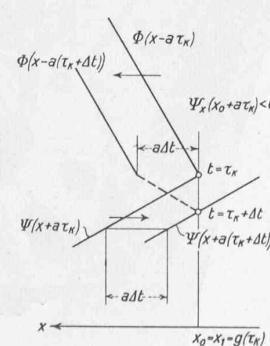


Abb. 6. Feste Zerfallsgrenze

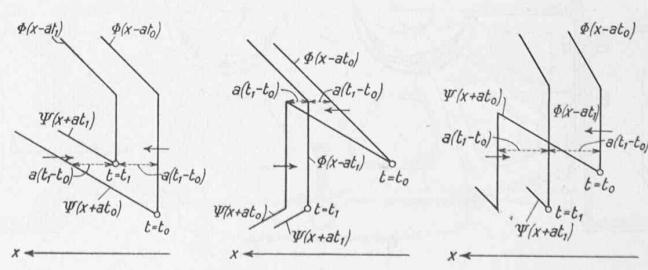


Abb. 7. Grenzfälle mit weichender Zerfallsgrenze