Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 111/112 (1938)
Heft: 8

Artikel: Genauere Differenzengleichungen zur Berechnung gebogener Platten
Autor: Amstutz, E. / Stüssi, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49901

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Genauere Differenzengleichungen zur Berechnung gebogener Platten. – Zur Frage der Lüftung langer Autotunnel. — Oeffentlichkeit und Basler Stadtplan. — Erwärmung kalten Wassers in Leitungen, die durch Räume höherer Temperatur führen. — Lokomotivtransport Winterthur-Bombay. — Mitteilungen: Ueber Physik der Raumheizung. Stahlsaitenbeton. Verstellpropeller «Rotol». Die Haltbarkeit von Verzinkungen gegen Korrosionsangriff. Achtzylindrige Kolbenpumpe ohne Kurbelwelle. Rillenrohre für den Kesselbau. Der Einfluss der Fensterbauart auf den Luftdurchgang. Vom Prozess Hollands gegen Belgien wegen Wasserentnahme aus der Maas. Meliorationsprojekt für die rechtsseitige Linthebene. Kantonsbibliothek-Gebäude Aarau. Normalien und Normen für die Schifffahrtsstrasse Basel-Bodensee. — Nekrologe: K. Grütter. — Wettbewerbe: Evangelisches Kirchgemeindehaus St. Gallen. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 112 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nr. 8
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Genauere Differenzengleichungen zur Berechnung gebogener Platten

Von Dipl. Ing. E. AMSTUTZ, Mitarbeiter von Prof. Dr. F. Stüssi, Zürich

Die strenge Berechnung biegsamer Platten stösst in der Praxis immer noch auf Schwierigkeiten. Reihenentwicklungen sind meist sehr umständlich zu handhaben, aber auch die Lösung mittels Differenzengleichungen wird durch die numerische Ausrechnung fast ebenso umfangreich.

Den Bedürfnissen der Praxis entspricht wohl am besten die Methode von Dr. H. Marcus.[1]) Darnach lässt sich die Differentialgleichung für die Plattendurchbiegung durch Systeme von Differenzengleichungen ersetzen, indem man die Platte durch ein Netz unterteilt und für jeden Netzpunkt eine Differenzengleichung anschreibt. Die Genauigkeit des Verfahrens steigert sich mit engerer Netzteilung, zugleich nimmt aber auch die Zahl der Gleichungen und Unbekannten rasch zu. Um zum Beispiel eine quadratische Platte mit befriedigender Genauigkeit zu untersuchen, ist die Quadratseite in mindestens acht Felder zu teilen. Es sind also bei allgemeiner Belastung 49 Gleichungen mit 49 Unbekannten aufzulösen, die sich allerdings im Falle zweiseitiger Symmetrie auf 10 reduzieren lassen. Damit diese Theorie die in der Praxis noch oft verwendete aber gänzlich unzulängliche Streifenmethode verdrängen kann, ist es erforderlich, das Verfahren von H. Marcus soweit zu verbessern, dass selbst mit sehr weiter Netzteilung praktisch noch genaue Resultate erzielt werden. Dies ist das Ziel vorliegender Untersuchung.

Bezeichnen x, y die rechtwinkligen Koordinaten eines Plattenpunktes, ζ die Durchbiegung der Platte unter der Belastung p und $N = \frac{m^2}{m^2-1} \cdot \frac{E\,d^3}{12}$ die Plattensteifigkeit, so lautet die Bestimmungsgleichung für die Durchbiegung der Platte:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p}{N}$$

oder mit $Z = N\zeta$ $\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = p$

Sie lässt sich durch Einführen einer Hilfsgrösse M in zwei Gleichungen aufspalten: $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -M$

Um diese Differentialgleichungen in Differenzengleichungen überzuführen, ersetzt Marcus im Bereiche des untersuchten Punktes die M-, bezw. z-Fläche durch ein Paraboloid. Ich will hingegen eine entsprechende Voraussetzung nicht für M und z selber, sondern für ihre zweiten Ableitungen nach den Koordinaten machen, wodurch die Genauigkeit des Verfahrens offensichtlich stark erhöht wird. Zu diesem Zweck verwende ich die bekannten Beziehungen[2]) zwischen einer Grösse und ihrer zweiten Ableitung, die sich aus den Eigenschaften des Seilpolygones ergeben, wenn diese Grösse als Durchhang eines Seiles gedeutet wird, das unter dem Horizontalzug 1 steht und mit der zweiten Ableitung der Grösse belastet ist (vergl. Abb. 1).

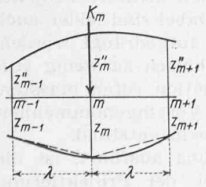


Abb. 1

Die Seillinie z wird durch das Sehnenpolygon ersetzt, sofern die Knotenlast K, d. i. der Auflagerdruck der benachbarten Felder, als Belastung gewählt wird. Es ist daher

$$K_m = \frac{z_{m-1} - 2\,z_m + z_{m+1}}{\lambda}$$

Ich nehme an, dass die Belastungsfunktion z'' stetig sei und kann sie daher im Bereiche $m-1$ bis $m+1$ durch eine Parabel ersetzen (im Falle unstetiger Belastung wie Einzel- oder Streckenlasten wäre zweckmässiger linearer Verlauf anzunehmen). Es gilt somit anderseits auch

$$K_m = \frac{\lambda}{12}\,(z''_{m-1} + 10\,z''_m + z''_{m+1})$$

und wir gewinnen die Beziehung

$$\frac{12}{\lambda^2}\,(z_{m-1} - 2\,z_m + z_{m+1}) = z''_{m-1} + 10\,z''_m + z''_{m+1} \qquad (1)$$

[1]) Dr. *H. Marcus:* Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten.

[2]) Dr. *F. Stüssi:* Baustatische Methoden, «SBZ» Band 107, Seite 277 (20. Juni 1936).

Diese Beziehung lässt sich für die 9 Punkte des Plattenabschnittes der Abb. 2 (unten) sechsmal anschreiben:

$$\frac{12}{\lambda^2_x}\,(z_i - 2\,z_k + z_l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(z_i + 10\,z_k + z_l)$$

$$\frac{12}{\lambda^2_y}\,(z_n - 2\,z_k + z_m) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,(z_n + 10\,z_k + z_m)$$

$$\frac{12}{\lambda^2_x}\,(z_q - 2\,z_n + z_r) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(z_q + 10\,z_n + z_r)$$

$$\frac{12}{\lambda^2_x}\,(z_o - 2\,z_m + z_p) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(z_o + 10\,z_m + z_p)$$

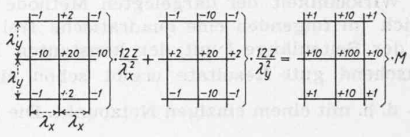
$$\frac{12}{\lambda^2_y}\,(z_q - 2\,z_i + z_o) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,(z_q + 10\,z_i + z_o)$$

$$\frac{12}{\lambda^2_y}\,(z_r - 2\,z_l + z_p) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,(z_r + 10\,z_l + z_p)$$

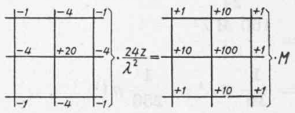
Addiere ich die beiden zehnfach genommenen ersten Gleichungen mit den übrigen, so treten die zweiten Ableitungen nur noch in der Verbindung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ auf, wofür ich den Wert $-M$ einsetze und erhalte:

$$\frac{12}{\lambda^2_x}\,(20\,z_k + 2\,z_m + 2\,z_n - 10\,z_i - 10\,z_l - z_o - z_p - z_q - z_r)$$
$$+ \frac{12}{\lambda^2_y}\,(20\,z_k + 2\,z_i + 2\,z_l - 10\,z_m - 10\,z_n - z_o - z_p - z_q - z_r)$$
$$= 100\,M_k + 10\,(M_i + M_l + M_m + M_n) + M_o + M_p + M_q + M_r \qquad (2)$$

was sich symbolisch auch so schreiben lässt



Für $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ gilt speziell:



Entsprechende Gleichungen gelten zwischen M und p, wenn man z durch M und M durch p ersetzt.

Der frei aufliegende Rand einer Platte ist charakterisiert durch $M = o$ und $z = o$, und es gelingt daher in einer ersten Berechnungsstufe die Werte M zu ermitteln und daraus in der zweiten Stufe die elastische Fläche ζ, bezw. z festzulegen. Es bleibt noch die Aufgabe zu lösen, aus der elastischen Fläche die Beanspruchungen, insbesondere die Biegungsmomente der Platte zu ermitteln. Dazu greife ich auf die Gleichung (1) zurück, die ich für jeden Punkt einer Netzlinie anschreiben kann. Diese nur dreigliedrigen Gleichungssysteme sind mit geringem Aufwand nach z'' auflösbar, sodass anhand der bekannten Beziehung

$$m_x = \frac{-\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

die biegenden Momente berechnet werden können.

Von Interesse ist oft noch der Verlauf der Auflagerkräfte. Diese setzen sich zusammen aus der Rand-Scherkraft

$$v = \frac{\partial M}{\partial x}$$

und den zusätzlichen Auflagerkräften

$$v' = \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} = -\frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$$

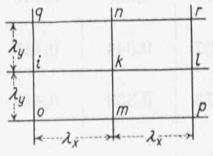


Abb. 2

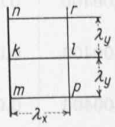


Abb. 3

die die Rand-Drillungsmomente ersetzen sollen (vergl. Abb. 3). Beachten wir, dass auf dem Rande nicht nur z und M, sondern auch ihre sämtlichen Ableitungen nach y zu Null werden, so folgen aus der Plattengleichung die weiteren Beziehungen:

$$\frac{\partial^2 M_k}{\partial x^2} = -p_k \qquad \frac{\partial^4 z_k}{\partial x^4} = +p_k$$

Zur Berechnung der Randquerkraft finden wir die erste Derivierte wieder aus den Eigenschaften des Seilpolygons (Abb. 4). Der Winkel $\frac{\partial M_k}{\partial x}$ setzt sich nämlich zusammen aus der Sehnenneigung $\frac{M_l}{\lambda_x}$ und dem Sehnen-Tangenten-Winkel, der bekanntlich gleich dem Auflagerdruck der M''-Fläche in k ist. Ich ersetze die M''-Fläche im Bereiche k bis l durch eine Gerade und erhalte:

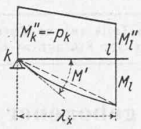


Abb. 4

$$v = \frac{\partial M_k}{\partial x} = \frac{M_l}{\lambda_x} - \frac{\lambda_x}{6}\left(2 \cdot \frac{\partial^2 M_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_l}{\partial x^2}\right)$$

worin $\frac{\partial^2 M_k}{\partial x^2} = -p_k$ ist. $\frac{\partial^2 M_l}{\partial x^2}$ will ich noch zur Erhöhung der Genauigkeit durch die andere partielle Ableitung ausdrücken und erhalte: $\frac{\partial^2 M_l}{\partial x^2} = -p_l - \frac{\partial^2 M_l}{\partial y^2}$. Da das zweite Glied gegenüber p_l klein ist, genügt es, den Verlauf von M über die Punkte $r - l - p$ als parabelförmig vorauszusetzen, womit

$$\frac{\partial^2 M_l}{\partial y^2} = -\frac{2 M_l - M_r - M_p}{\lambda^2_y}$$

wird, und die Rand-Scherkraft erhalte ich zu

$$v = \frac{M_l}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{6}(2 p_k + p_l) - \frac{\lambda_x}{6 \lambda^2_y}(2 M_l - M_r - M_p) \qquad (3)$$

Ganz entsprechend finde ich, wenn ich noch $\frac{\partial^4 z_k}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$ beachte, die zusätzlichen Auflagerdrücke:

$$v' = -\frac{m-1}{m}\left(\frac{\partial^2 z_l}{\lambda_x \partial y^2} - \frac{\lambda_x}{6} \cdot \frac{\partial^4 z_l}{\partial x^2 \partial y^2}\right)$$

$$v' = -\frac{m-1}{m}\left[\frac{1}{\lambda_x} \cdot \frac{\partial^2 z_l}{\partial y^2} + \frac{\lambda_x}{6 \lambda_y^2}\left(2 \frac{\partial^2 z_l}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z_r}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z_p}{\partial x^2}\right)\right] \qquad (4)$$

die Glieder z'' wurden schon bei der Momentenbestimmung berechnet.

Um die Wirksamkeit der dargelegten Methode zu belegen, untersuche ich im folgenden eine quadratische frei aufliegende Platte von der Seitenlänge l mit der konstanten Belastung p.

Ueberraschend gute Resultate ergibt schon ein Netz mit $\lambda_x = \lambda_y = \frac{l}{2}$ d. h. mit einem einzigen Netzpunkt. Die Beziehungen (2) lauten: $20\,M = \frac{144\,p\,\lambda^2}{24}$, ferner, da für den Rand $M = o$ ist,

$$20\,z = \frac{100\,M\,\lambda^2}{24}$$

Somit folgt $z = \frac{1}{16}\,p\,\lambda^4 = \frac{1}{256}\,p\,l^4$

$$M = \frac{-\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3}{10}\,p\,\lambda^2 = \frac{3}{40}\,p\,l^2$$

und daher ergibt sich mit $m = \infty$ (keine Querkontraktion) unter Beachtung der Symmetrie das Biegungsmoment in Plattenmitte zu

$$m_x = m_y = \frac{3}{80}\,p\,l^2$$

Für den Auflagerdruck in Mitte der Plattenseite erhalte ich schliesslich nach Formel (3) und (4) und in der selben Reihenfolge:

$$v = (0{,}30 + 0{,}50 - 0{,}10)\,p\,\lambda = 0{,}35\,p\,l\,; \quad v' = (0{,}15 + 0{,}05)\,p\,\lambda = 0{,}10\,p\,l$$

$$a = v + v' = 0{,}450\,p\,l$$

Ich habe die Rechnung mit $\lambda = \frac{l}{4}$ d. h. mit drei Unbekannten wiederholt. Die Resultate sind zum Vergleich mit den Werten von Marcus für $m = \frac{10}{3}$ in folgender Tafel zusammengestellt:

	ζ_{max}	m_{max}	v_{max}	a_{max}
Genauer Wert	0,00406	0,0479	0,337	—
Netz mit $\lambda = \frac{l}{2}$	0,00391	0,0487	0,350	0,420
Netz mit $\lambda = \frac{l}{4}$	0,00406	0,0479	0,339	0,418
Nach Marcus mit $\lambda = \frac{l}{4}$	0,00403	0,0457	0,344	0,415
Nach Marcus mit $\lambda = \frac{l}{8}$	0,00406	0,0473	0,339	0,419
	$\cdot\, p\,\frac{l^4}{N}$	$\cdot\, pl^2$	$\cdot\, pl$	$\cdot\, pl$

Es zeigt sich deutlich, dass mit einem halb so engen Netz die selbe oder noch grössere Genauigkeit (insbesondere für die Momente) erzielt wird als nach Marcus, m. a. W. die Zahl der Gleichungen und Unbekannten kann auf den dritten bis vierten Teil herabgesetzt werden.

Die guten Werte, die ich mit einem einzigen Netzpunkt erhielt, veranlassten mich, Näherungsformeln für eine rechteckige Platte von der Länge l und der Breite b abzuleiten. Gleichung (2) lautet für die Plattenmitte

$$20\left(\frac{4}{l^2} + \frac{4}{b^2}\right) M = \frac{144}{12}\,p \qquad M = \frac{3}{20}\,p\,\frac{l^2 b^2}{l^2 + b^2}$$

und analog $$20\left(\frac{4}{l^2} + \frac{4}{b^2}\right) z = \frac{100}{12}\,M \qquad z = \frac{1}{64}\,p\,\frac{l^4 b^4}{(l^2 + b^2)^2}$$

Aus Gleichung (1) ergibt sich ferner $10\,z''_l\,\frac{l^2}{4 \cdot 12} = -2\,z$

Setze ich zudem $m = \infty$, wie es im Eisenbetonbau oft üblich ist, so betragen die Momente $m_l = \frac{3}{20}\,p\,\frac{l^2 b^4}{(l^2 + b^2)^2}$

$$m_b = \frac{3}{20}\,p\,\frac{l^4 b^2}{(l^2 + b^2)^2}$$

Der Unterschied gegenüber der Streifenmethode zeigt sich — abgesehen vom Zahlenfaktor — darin, dass im Nenner das Doppelprodukt $2\,l^2 b^2$ hinzutritt, das die Drillingssteifigkeit der Platte zum Ausdruck bringt. — Die Formeln gelten vorzüglich, solange das Seitenverhältnis der Platte den Wert 2 : 1 nicht wesentlich übersteigt, und zwar approximitiert m_l das maximale Moment in Längsrichtung der Platte. Für $l : b = 2$ ergibt sich beispielsweise

$$\zeta = \frac{1}{100}\,p\,\frac{b^4}{N} = 0{,}010 \cdot p\,\frac{b^4}{N}$$

$$m_b = \frac{12}{125}\,p\,b^2 = 0{,}0960 \cdot p\,b^2$$

$$m_l = \frac{3}{500} \cdot p\,l^2 = 0{,}0060 \cdot p\,l^2$$

Die Behauptung ist jedenfalls gerechtfertigt, dass diese Werte noch genauer sind als jene, die Marcus aus einem Netz mit $\lambda = \frac{l}{4}$ findet, nämlich

$$\zeta = 0{,}0103 \cdot p\,\frac{b^4}{N}$$

$$m_b = 0{,}0938 \cdot p\,b^2$$

$$m_l^{max} \cong 0{,}00582 \cdot p\,l^2$$

wenn man sich erinnert, dass Marcus schon bei der quadratischen Platte etwas zu kleine Momente erhielt.

Zur Frage der Lüftung langer Autotunnel

Die unter diesem Titel in der «SBZ» vom 30. April 1938 erschienene Abhandlung von Prof. Dr. C. Andreae veranlasst mich, zu dieser Frage einige ergänzende und kritische Bemerkungen anzubringen.

Die Motorisierung der Landstrasse hat die Auffassung über die Anlage von Strassen — besonders im Gebirge — in den letzten Jahren geändert. Bei dem grossen Kostenaufwand, den solche Strassen heute bedingen, muss man sich fragen, ob es zweckmässig sei, sie so zu bauen, dass sie nur vier bis fünf Monate des Jahres befahrbar sind. Die Frage stellt sich sowohl vom volkswirtschaftlichen, wie auch vom militärischen Standpunkt. Diese Ueberlegung hat in jüngerer Zeit mehrere Projekte mit längern Autotunneln entstehen lassen. Dabei sind leider auch solche aufgetaucht und der Oeffentlichkeit aufgedrängt worden, die besser unterblieben wären[1]), da sie technisch zu wenig studiert und derart sind, dass sie einer Opposition rufen mussten, woraus dann eine zu sehr verallgemeinernde Voreingenommenheit gegen alle solche Projekte mit langen Tunneln entstand.

Wie Prof. Andreae in seiner Abhandlung ausführt, ist die Lüftung das wichtigste Problem, das bei der Projektierung langer Autotunnel abzuklären ist. Die von ihm entwickelten Grundsätze sind u. a. beim Projekt für den Gotthardtunnel («SBZ» 1935, Bd. 106, S. 171*), sowie beim hier veröffentlichten Projekt für einen Titlis-Tunnel (Verbindung des Engelbergertales mit der im Bau begriffenen Sustenstrasse, Abb. 1 und 2) von 5,8 km Länge, bereits berücksichtigt worden. Für den Entwurf der Lüftungsanlage des zweitgenannten hat der Unterzeichnete eingehende Beobachtungen im Scheide-Tunnel in Antwerpen[2]), und im Mersey-Tunnel in Liverpool[3]) durchgeführt, die ihn ebenfalls zum eindeutigen Schlusse führten, dass für einen langen Autotunnel nur Querlüftung in Betracht kommen kann. Allein, die Lösungen, die bei den bereits be-

[1]) z. B. Simplon, vergl. «SBZ» Bd. 106, S. 174*! — Red.
[2]) Bd. 106, S. 158*. — [3]) Bd. 106, S. 160*.
(Ein * bedeutet stets, dass der betreffende Artikel illustriert ist. Red.)