

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 111/112 (1938)
Heft: 12

Artikel: Vereinfachte Methoden zur Bestimmung der Festpunkte
Autor: Schneider, Karl
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-49794>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Vereinfachte Methoden zur Bestimmung der Festpunkte. — Alters- und Fürsorgeheim Ruttigerhof bei Olten. — Wettbewerb Kantons-Spital Schaffhausen. — Das Haus als Teil des Ganzen, am Beispiel von Münsterhof und Paradeplatz. — Die erste Einphasenlokomotive der MFO von 1905 im elektrischen Betrieb auf der Sensetalbahn. — Mitteilungen: Eiserzeugung durch Teilverdampfung im Vakuum. Umbau einer englischen

Schnellzug-Lokomotive. Schwimmbalken aus Eisenbeton. Das magnetische Drehfeld. Neue Pariser Auto-Ausfallstrasse. Eidg. Techn. Hochschule. — Nekrolog: Hans Philipp. Rob. E. Schmidt. Paul Weingart. — Wettbewerbe: Kirchgemeindehaus in Burgdorf. — Literatur. — Schweizer Verband für die Materialprüfungen der Technik. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 111

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

Nr. 12

Vereinfachte Methoden zur Bestimmung der Festpunkte

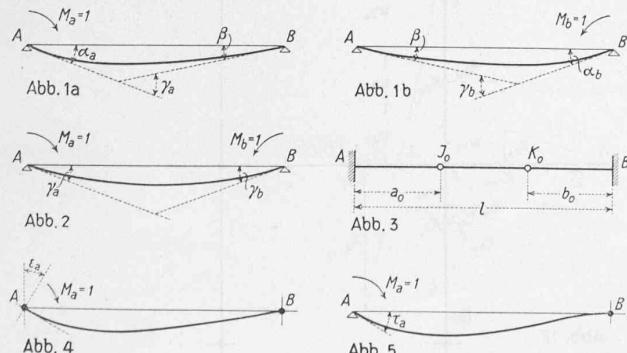
Von Dipl. Ing. E. T. H. KARL SCHNEIDER, São Paulo, Brasilien.

I. Einleitung.

Allgemeines. Die Vorteile der graphischen Berechnungs-Methoden sind wohl jedem in der Praxis stehenden Ingenieur bekannt; sie geben ein anschauliches Bild des Kräfteverlaufs, sind leicht kontrollierbar und führen meist rascher zum Ziel, als analytische Berechnungen. Außerdem wirken sie weniger ermüdend und bieten daher auch nach stundenlanger Arbeit größere Gewähr für fehlerfreie Ergebnisse. Da zudem die Grenzwerte der Momente, Querkräfte usw. doch in den meisten Fällen graphisch aufgetragen werden, ist nicht einzusehen, weshalb die dazu nötigen Berechnungen nicht auch auf graphischem Wege gemacht werden dürfen.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel der graphischen Statik bilden die Festpunkte. Wie weit ihre Anwendung reicht, geht aus dem Buch von Suter: «Die Methode der Festpunkte» hervor. Unsere Untersuchung soll sich auf eine von dem hier tätigen deutsch-russischen Ingenieur Waldemar Tietz gefundene Konstruktion, sowie auf eine Näherungsformel zur Bestimmung der Festpunktstrecken beschränken. Die hier mit Ermächtigung von Ing. Tietz zum ersten Mal veröffentlichte Festpunktkonstruktion ist bedeutend rascher als die bisher bekannten und kann auch bei den kompliziertesten Systemen in gleich einfacher Weise angewandt werden. Die bei andern Konstruktionen vom bekannten Festpunkt bis zur «Verschobenen Auflager senkrechten» beliebig gezogene Gerade wird hier unter einem festen Winkel bis zur Auflager senkrechten geführt. Dadurch fällt die Bestimmung der «Verschobenen Auflager senkrechten» weg, und die Konstruktion wird auch dort unverändert anwendbar, wo in einem Knotenpunkt mehrere Stäbe mit verschiedenen Trägheitsmomenten zusammen treffen.

Da wir in den meisten Fällen einen oder mehrere Festpunkte vorerst schätzungsweise annehmen müssen, um durch Konstruktion oder Rechnung die andern bestimmen zu können, bildet die in Abschnitt III behandelte Näherungsformel eine bequeme Ergänzung zum Tietzschen Verfahren. Wir können mit ihr die Festpunkte, von denen aus wir mit der Konstruktion beginnen wollen, so genau berechnen, dass schon für die nächsten Felder der richtige Festpunktstrecken erhalten wird und wir die Rechnung nie, wie bei zu ungenauer Schätzung, zweimal machen müssen. Sie darf aber auch, wie die Genauigkeitsuntersuchung zeigen wird, in den meisten Fällen zur endgültigen Bestimmung aller Festpunkte benutzt werden. Ganz besonders eignet sie sich dort, wo wir nur einzelne Stäbe eines Rahmensystems zur Untersuchung herausgreifen möchten, ohne die Rechnung über alle Stäbe machen zu müssen. Wir werden in Abschnitt III näher darauf eingehen. Sowohl Konstruktion wie Näherungsformel haben sich beim Gebrauch als bequem erwiesen, da sie durch Einfachheit und Zeitsparnis den Bedürfnissen der Praxis entsprechen, aus denen sie entstanden sind. Ich möchte mit ihrer Veröffentlichung den Anhängern der Festpunktmethoden einige neue Anregungen bieten, vielleicht sogar den einen oder andern zu deren vermehrter Anwendung bewegen.



Bezeichnungen. Für den *einfachen Balken* ergeben sie sich aus Abb. 1a, 1b und 2. Ferner führen wir ein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{a_1} + \beta_1} &= \frac{1}{\gamma_{a_1}} = R_{a_1} \\ \frac{1}{\alpha_{b_1} + \beta_1} &= \frac{1}{\gamma_{b_1}} = R_{b_1} \end{aligned} \right\} = \text{Steifigkeitswerte des Stabes 1}$$

Am *vollständig eingespannten* Balken ergeben sich die Bezeichnungen aus Abb. 3, am *elastisch eingespannten* Balken aus Abbildungen 4 und 5 (τ_{a_1} = Drehwinkel des gelenkig gedachten Auflagers auf Seite des Festpunktes J_1 infolge der Belastung $M_{a_1} = 1$). Ferner seien:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\tau_{a_1}} &= w_{a_1} \\ \frac{1}{\tau_{b_1}} &= w_{b_1} \\ \frac{1}{\varepsilon_{a_1}} &= W_{a_1} \\ \frac{1}{\varepsilon_{b_1}} &= W_{b_1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= \text{Drehwiderstände des Stabes 1} \\ &= \text{an den betreffenden Auflagern.} \\ &= \text{Drehwiderstände der betreffenden Auflager.} \end{aligned}$$

Elementare Konstruktionen. Wie wir sehen werden, brauchen wir für die Konstruktion von Tietz (wie auch für alle andern bekannten Verfahren) die Festpunkte der vollständigen Einspannung (Drittelslinien). Ihre Abstände können für die gebräuchlichsten Fälle aus von uns eigens aufgestellten Tabellen sofort erhalten werden, sodass sich ihre Konstruktion erübrigst. Hingegen ist es zur Erläuterung des Späteren doch notwendig, auf einige bekannte Beziehungen hinzuweisen.

Konstruktion der Festpunkte bei vollständiger Einspannung. Tragen wir die reziproken Werte der Auflagerdrehwinkel α_a und β des einfachen Balkens in den entsprechenden Auflagern senkrecht zur Stabaxe in entgegengesetzter Richtung ab und verbinden die Endpunkte dieser Strecken miteinander, so erhalten wir den Festpunkt J_0 als Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der Stabaxe (Abb. 6).

Beweis:

$$\frac{1}{\frac{\alpha_a}{\beta}} = \frac{a_0}{l - a_0} \quad a_0 = \frac{\beta}{\alpha_a + \beta} l$$

Auf die gleiche Art erhalten wir:

$$b_0 = \frac{\beta}{\alpha_b + \beta} l$$

Konstruktion der Festpunkte bei elastischer Einspannung. Tragen wir den Drehwiderstand W_a in seinem Auflager, die Steifigkeit R_a im Festpunkt J_0 der vollständigen Einspannung senkrecht zur Stabaxe in entgegengesetzten Richtungen ab, und verbinden die Endpunkte dieser Strecken miteinander, so schneidet die Verbindungsgerade die Stabaxe im Festpunkt J der elastischen Einspannung (Abb. 7).

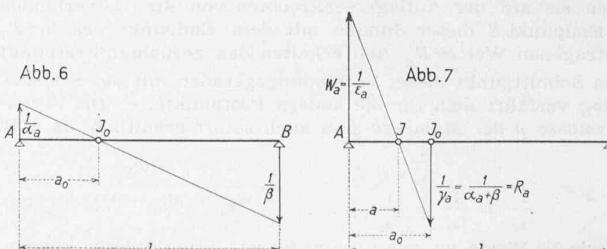
Beweis:

$$\frac{1}{\frac{\alpha_a}{\beta}} = \frac{a}{a_0 - a} = \frac{a}{\frac{\beta}{\alpha_a + \beta} l - a} ; a = \frac{\beta}{\alpha_a + \beta + \varepsilon_a} l$$

Analog erhalten wir:

$$b = \frac{\beta}{\alpha_b + \beta + \varepsilon_b} l$$

Abb. 6



Da, wie bekannt,

$$W_{a_1} = \frac{1}{\varepsilon_{a_1}} = w_{b_2} + w_{b_3} + w_{b_4} + \dots = \frac{n}{2} w_b$$

erhalten wir aus Abb. 7 die Relation:

$$\frac{W_{a_1}}{R_{a_1}} = \frac{a}{a_0 - a} = \frac{\frac{n}{2} w_b}{R_{a_1}}$$

Nach a aufgelöst und den Wert für w_b eingesetzt, ergibt uns die allgemeine Formel für den Festpunktabstand a des Stabes 1 bei beliebig veränderlichen Trägheitsmomenten:

$$a_1 = \frac{\frac{n}{2} \left(R_b \frac{l-a}{l-a-b_0} \right)}{\frac{n}{2} \left(R_b \frac{l-a}{l-a-b_0} \right) + R_{a_1}} a_0$$

Daraus erhalten wir die *allgemeine Formel für über die einzelnen Stäbe konstantes Trägheitsmoment*, indem wir setzen:

$$a_0 = b_0 = \frac{l}{3} \text{ und } R_a = R_b = \frac{2EJ}{l} = 2ER; R = \frac{J}{l}$$

$$a_1 = \frac{\frac{n}{2} \left(R 3 \frac{l-a}{2l-3a} \right)}{\frac{n}{2} \left(R 3 \frac{l-a}{2l-3a} \right) + R_1} \frac{l_1}{3}$$

Sind die in A mit Träger 1 biegsfest verbundenen Stäbe 2, 3, 4, ..., n an ihren andern Enden fest eingespannt, so setzen wir für $a = \frac{l}{3}$ in die obige Formel ein und erhalten die Formel (1) für vollständige Einspannung:

$$a_1^{(1)} = \frac{\frac{n}{2} \left(R \right)}{\frac{n}{2} \left(R \right) + \frac{1}{2} R_1} \frac{l_1}{3} \quad \dots \quad (1)$$

Sind die Stäbe 2 bis n gelenkig gelagert, so setzen wir für $a = 0$ und erhalten:

$$a_1^{(2)} = \frac{\frac{n}{2} \left(R \right)}{\frac{n}{2} \left(R \right) + \frac{2}{3} R_1} \frac{l_1}{3} \quad \dots \quad (2)$$

Sobald wir über den Einspannungsgrad der an Träger 1 angeschlossenen Stäbe genau Bescheid wissen, werden wir entweder Formel (1) (bei vollständiger Einspannung) oder Formel (2) (bei gelenkiger Auflagerung) anwenden und erhalten damit die für diese extremen Fälle genauen Festpunktabstände.

Zur Ableitung einer allgemeingültigen Näherungsformel setzen wir nun voraus, alle in A an Träger 1 angeschlossenen Stäbe besässen den gleichen mittleren Einspannungsgrad. Wie uns die Rechnung an vielen Beispielen gezeigt hat, schwankt dieser mittlere Einspannungsgrad um den Wert $k = \frac{a}{a_0} = \frac{2}{3}$.

Setzen wir also für $a = \frac{2}{3} a_0 = \frac{2l}{9}$ in die allgemeine Formel ein, so erhalten wir

$$a_1^{(3)} = \frac{\frac{n}{2} \left(R \right)}{\frac{n}{2} \left(R \right) + 0,57 R_1} \frac{l_1}{3} \quad \dots \quad (3)$$

Wir sehen, dass in diesem Fall der Koeffizient 0,57 von R_1 ziemlich genau das Mittel der Koeffizienten 0,5 aus Formel (1) und 0,667 aus Formel (2) ist. Formel (3) wird in allen Fällen, wo die Einspannungen der mit Träger 1 verbundenen Stäbe unsicher und voneinander verschieden sind, angewendet.

Genauigkeitsuntersuchung.

Wie leicht einzusehen ist, muss der tatsächliche Festpunktabstand zwischen den extremen Werten $a^{(1)}$ für vollständige Einspannung und $a^{(2)}$ für gelenkiges Auflager liegen. Wir erhalten also den grösstmöglichen Fehler Δ , indem wir die Differenzen zwischen dem mit Formel (3) errechneten Festpunktabstand $a^{(3)}$ und den extremen Werten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ bestimmen.

Es sei

$$\frac{\frac{n}{2} \left(R \right)}{R_1} = n$$

Dann lautet Formel (1): $a_1^{(1)} = \frac{n}{n + \frac{1}{2}} \frac{l_1}{3}$

Formel (2): $a_1^{(2)} = \frac{n}{n + \frac{2}{3}} \frac{l_1}{3}$

Formel (3): $a_1^{(3)} = \frac{n}{n + 0,57} \frac{l_1}{3}$

Die Fehler sind

$$\Delta_1 = a_1^{(3)} - a_1^{(1)} \quad \Delta_2 = a_1^{(3)} - a_1^{(2)}$$

Allgemein:

$$\Delta = \frac{l_1}{3} \left(\frac{n}{n + c_1} - \frac{n}{n + c_2} \right)$$

Durch Differenzieren erhalten wir das Maximum für Δ , wenn $n^2 = c_1 c_2$. Die entsprechenden Zahlen für c_1 und c_2 eingesetzt, ergibt die maximalen Fehler:

$$\Delta_{1\max} = -0,011 l_1 = 1,1\% \text{ der Stablänge bei } n = 0,534$$

$$\Delta_{2\max} = +0,013 l_1 = 1,3\% \text{ der Stablänge bei } n = 0,617$$

Schon diese grosse Genauigkeit genügt für alle graphischen Berechnungen, zu denen die Festpunkte ja gebraucht werden. Bedenken wir aber, dass bei Vorkommen der Extrema vollständiger Einspannung oder gelenkiger Auflagerung (z. B. bei einfachen Rahmen) Formel (1) oder (2) angewendet werden, so wird sich der grösstmögliche Fehler in allen praktischen Fällen auf rd. die Hälfte vermindern, sodass mit $\Delta_{\max} = 0,65\%$ der Stablänge gerechnet werden darf. Für die Praxis kann diese Genauigkeit als vollkommen genügend angesehen werden, da auch das Moment einen Fehler gleicher Größenordnung aufweisen wird.

Verteilungsmasse μ der Momente.

Es ist

$$\mu_{1-2} = \frac{w_{b_2}}{\frac{n}{2} (w_b)}$$

und

$$w_b = 3R_b \frac{l-a}{2l-3a} = R6E \frac{l-a}{2l-3a}$$

Setzen wir für

$$a = k a_0 \frac{l}{3}$$

so erhalten wir

$$w_b = R \left(6E \frac{3-k}{6-3k} \right) = cR$$

Nach unserer Annahme ist k (und natürlich auch E) für jeden Stab gleich, also wird auch der Koeffizient c für alle Stäbe gleich gross sein, und wir erhalten die in der Praxis schon längst verwendete Beziehung:

$$\mu_{1-2} = \frac{c R_2}{c R_2 + c R_3 + c R_4 + \dots} = \frac{R_2}{\frac{n}{2} (R)}$$

Anwendung.

Die Näherungsformel darf bei normalen Verhältnissen, besonders im Hochbau, zur endgültigen Bestimmung der Festpunkte verwendet werden, liegt doch ein maximaler Fehler von rd. 1% der Stablänge bei Aufzeichnen des Trägers im Maßstab 1:50 nicht wesentlich über der Zeichnungsgenauigkeit. Wir können mit Hilfe dieser Formel beliebige Festpunkte eines Rahmensystems berechnen, ohne von schon bekannten Festpunkten ausgehen zu müssen, und ersparen damit den zeitraubenden Rechnungsgang über oft zahlreiche Stäbe. Ganz besonders aber eignet sich das Verfahren zur Ermittlung von Festpunkten, die andernfalls zur Konstruktion der übrigen Festpunkte geschätzt werden müssten (siehe Beispiel) und bildet damit eine Ergänzung zur Tietzschen Konstruktion.

IV. Beispiel.

Es sollen die Festpunkte des in Suters «Die Methode der Festpunkte» auf Seite 102, II. Band, behandelten Erzsilos ermittelt werden. Der zweistöckige Rahmenbinder, dessen Ausmasse aus Abb. 13a ersichtlich sind, hat über die einzelnen Stäbe konstantes Trägheitsmoment.

Vorerst berechnen wir die Steifigkeitswerte $R = \frac{J}{l}$ für sämtliche Stäbe: $R_1 = 34,5 = R_3$; $R_2 = 51,0$; $R_4 = 61,75 = R_6$; $R_5 = 29,9$; $R_7 = 204,5 = R_9$; $R_8 = 14,6 = R_{10}$.

Dann bestimmen wir mit Näherungsformel (3) die von Suter geschätzten Festpunktabstände b_4 und b_5 :

$$\text{Punkt } G: b_4 = \frac{R_9}{R_9 + 0,57 R_4} \frac{l_4}{3} = 0,49 \text{ m}$$

(Genauer Wert nach Suter: $b_4 = 0,51 \text{ m}$).

$$\text{Punkt } H: b_5 = \frac{29,2}{29,2 + 17,03} \cdot \frac{5,02}{3} = 1,06 \text{ m}$$

(Genauer Wert nach Suter: $b_5 = 1,09 \text{ m}$).

Vereinfachte Methode zur Bestimmung der Festpunkte

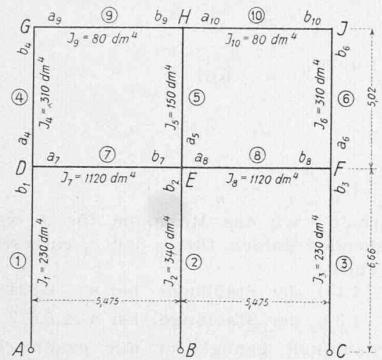


Abb. 13 a

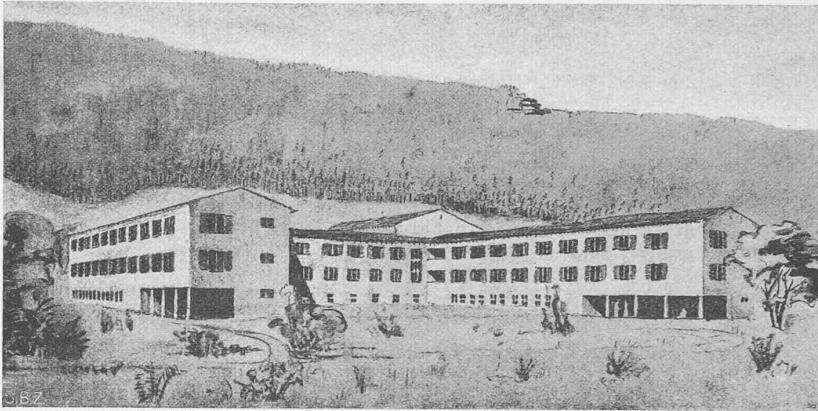


Abb. 4. Gesamtbild des Altersheims Ruttigerhof, aus Südosten

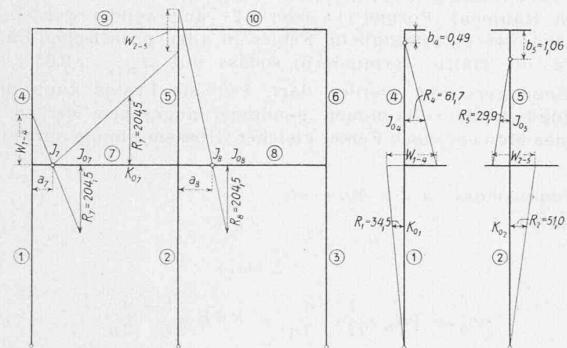


Abb. 13 b

Von diesen Festpunkten und den in A , B und C angenommenen Gelenken aus lassen sich nun die andern Festpunkte mit der Tietzschen Konstruktion bestimmen, was in Abb. 13 b für die Festpunkte J_7 und J_8 durchgeführt ist. Bei Aufzeichnung im Maßstabe 1 : 50 erhielten wir die genauen Werte: $a_7 = 0,77\text{ m}$; $a_8 = 1,26\text{ m}$. Dabei sind die Säulendrehwiderstände nur der Deutlichkeit halber in besonderen Figuren konstruiert worden. Durch Fortführen der Konstruktion liessen sich alle andern Festpunkte bestimmen.

Zur Kontrolle und zum Vergleich berechnen wir die Festpunktabstände noch mit unserem Näherungsverfahren:

a_7 : Wir wissen, dass Säule 1 unten gelenkig gelagert, Säule 2 oben sehr schwach

$$\left(k = \frac{a}{a_0} = \frac{0,49}{\frac{5,02}{3}} = 0,29 \right)$$

eingespannt ist, werden also mit Formel (2) für gelenkige Auflagerung rechnen und erhalten:

$$R_1 + R_4 = 96,25; 0,667 R_2 = 136,34;$$

$$a_7 = \frac{96,25}{232,59} \cdot \frac{5,475}{3} = 0,76 \text{ m}$$

a_8 : Hier sind wir über den mittleren Einspannungsgrad der an Träger 8 angeschlossenen Stäbe im Unklaren und wählen deshalb Formel (3):

$$R_2 + R_5 + R_7 = 285,4; 0,57 R_8 = 116,5;$$

$$a_s = \frac{285,4}{401,9} \cdot \frac{5,475}{3} = 1,29 \text{ m}$$

V. Tabellen.

Um die für die Konstruktion benötigten Festpunktabstände vollständiger Einspannung und die Steifigkeitswerte ohne grosse Rechnung zu erhalten, haben wir für die meistvorkommenden Fälle gerader und parabolischer Vouten entsprechende Tabellen aufgestellt¹⁾. Zu ihrer Berechnung sind die Strassnerschen Tabellen benutzt worden.

¹⁾ Auf Wunsch vermittelt die Redaktion der «SBZ» den Bezug dieser Tabellen vom Verfasser.

Alters- und Fürsorgeheim Ruttigerhof bei Olten

Von Arch. ADOLF SPRING, Olten

Allgemeines. Das Heim dient zur Aufnahme älterer und fürsorgebedürftiger Personen. Demgemäß lag der Projektierung von Anfang an zu Grunde, ein sonniges, wohnliches Heim zu schaffen, bei dem alles Anstaltmässige auf ein Minimum beschränkt würde. Die Ausführung erfolgte auf Grund eines Wettbewerbsergebnisses. Bestimmende Programmfpunkte waren: Vorauslagerer Ausbau für 70 bis 90 Insassen, alle in Einer- und Zweierzimmern; Erweiterungsmöglichkeit durch Anbau auf 120 bis 140 Personen; Geschlechtertrennung; zwei Wohngeschosse. Der schmale, aber sehr tiefe Bauplatz führte zu einer Gebäudegruppierung, die den erwähnten Forderungen in idealer Weise entsprechen konnte; die innere Aufteilung geht aus den Plänen hervor. Große Rasenflächen, bepflanzt mit Obstbäumen und wenigen Ziersträuchern, freigeführte Plattenwege, die an bunten Blumenbeeten vorbeiführen, fügen das Gebäude unaufdringlich in die ruhige Landschaft ein (Abb. 1 bis 6).

Konstruktives. Der Bau wurde mit möglichst einfachen, schllichten Mitteln erstellt. Umfassungsmauern: Keller Beton, übrige innen Backstein, aussen Kalksandstein 39 cm stark. Decken: über Keller und sämtlichen Korridoren Massivplatten; über den Insassenzimmern Holzgebälk mit Schlackenauflistung; über Speisesaal und Küche Tonhohlkörperdecken. Bodenbeläge: Insassenzimmer Eichen-Langriemen, Gänge und Speisesaal Marboleum; Aufenthaltsräume, Bureau, Krankenabteilung Jaspe; Arbeitsräume

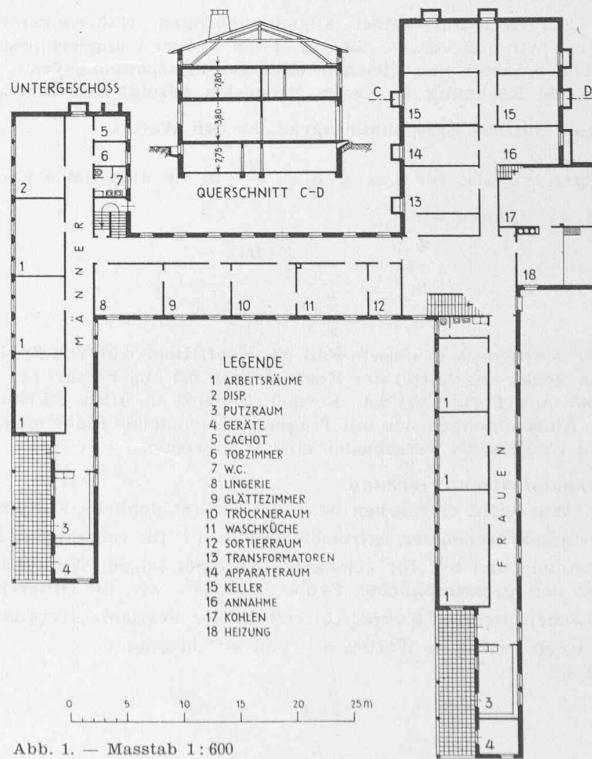


Abb. 1. — Masstab 1:600