

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 109/110 (1937)  
**Heft:** 13

**Artikel:** Berechnung des eingespannten Bogens für verschiedene Elastizitätsziffern im Hohlquerschnitt nach der Elastizitätstheorie  
**Autor:** Hawranek, Alfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49122>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Berechnung des eingespannten Bogens für verschiedene Elastizitätsziffern im Hohlquerschnitt nach der Elastizitätstheorie. — Wettbewerb für eine Schulhausanlage im Marzillmoos in Bern. — Die Internationale Rheinregulierung von der Illmündung bis zum Bodensee. — Vom Rheindelta in der Fussacher Bucht. — Von der Weltkraftkonferenz. — Mitteilungen: Grossräumige Salzlagerhalle in Holz. Schweiz. Pumpen

und Turbinen für Aegypten. Der Lauf der Drehgestellradsätze in der Geraden. Führerkurse des psychotechn. Institutes Zürich. Betoninstruktionskurs. Wirtschaftliches Autofahren. Ortsbewegliche Kirchen. Die Störström-Brücke. Die Graphische Sammlung der E. T. H. — Nekrologe: Franz Küppel. Carl Strasser. — Wettbewerbe: Neue Pfarrkirche in Littau (Luzern). — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 110

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 13

## Berechnung des eingespannten Bogens für verschiedene Elastizitätsziffern im Hohlquerschnitt nach der Elastizitätstheorie

Von Dr. Ing. ALFRED HAWRANEK, o. Prof. der Deutschen Technischen Hochschule Brünn

Die Herstellung von Eisenbeton-Bogenbrücken mit Hohlquerschnitt führt aus praktischen Gründen und wie Ausführungen beweisen, zur Betonierung des Bogens in mehreren Abschnitten. Es wird vorerst die untere Platte 1 bis 2 (Abb. 1) betoniert, dann erfolgt die Ausführung der Wände  $W$ , und schliesslich der oberen Platte 3 bis 4. Manchmal wurden auch mit der unteren Platte Teile der Wände gleichzeitig betoniert. Der für diese Arbeit bei grossen Spannweiten nötige, beträchtliche Zeitaufwand ist abhängig von der täglichen Leistung beim Betonieren (die etwa mit 100 m<sup>3</sup>/Tag angenommen werden kann), von der Brückenbreite und von der Stützweite. Selbst wenn man die beim Bau auftretenden Streuungen der Betongüte, die etwa 15 bis 20% ausmachen können, berücksichtigt, ergeben sich doch wegen des verschiedenen Alters des Betons in der unteren, bzw. oberen Platte verschiedene Elastizitätsziffern, die im geschlossenen Bogen für die weiteren Belastungen, für das Schwinden und für die plastische Verformung Änderungen der statisch unbestimmten Grössen und damit der Momente und Normalkräfte gegenüber einer Rechnung mit konstantem  $E$ -Wert bedingen. Deshalb sollen die bezüglichen Gleichungen für die statisch unbestimmten Grössen nach der Elastizitätstheorie abgeleitet werden. Diese Untersuchungen werden besonders dann notwendig werden, wenn man anlässlich der Ausrüstung des Bogens, behufs besserer Verteilung der Grösstwerte der Spannungen, mit hydraulischen Pressen arbeitet.

### I. Ableitung der allgemeinen Formeln

Allgemein soll angenommen werden, dass in irgend einem Bogenquerschnitt die untere Platte eine Elastizitätsziffer  $E_1$ , die obere  $E_2$  besitzt. Dazwischen erfolge der Uebergang in den Wänden linear (Abb. 2). Sonst seien die  $E_1$  und  $E_2$  in den einzelnen Bogenquerschnitten beliebig angenommen, aber für symmetrisch gelegene Bogenpunkte in der gleichen Verteilung.  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  seien die Randspannungen und  $\Delta u$ ,  $\Delta o$  die Faserverkürzungen durch die exzentrische Normalkraft  $N_x$ . Weiter wird angenommen, dass die Querschnitte eben bleiben und im Bogen nur Druckspannungen, bzw. keine unzulässigen Zugspannungen im Beton auftreten. Eisenbetonbogen seien symmetrisch bewehrt. Dann sind die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{N_x}{F} - \frac{M_x v}{J}, \quad \sigma_2 = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{J} \quad \dots \quad (1)$$

Die Verdrehung des Querschnittes sei  $d\varphi$ , wobei mit den Bezeichnungen der Abb. 2:

$$d\varphi = \frac{\Delta o - \Delta u}{2v} = \frac{ds}{2v} \left( \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\sigma_1}{E_1} \right) = \frac{ds}{2v} \left[ \frac{N_x}{F} \left( \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) + \frac{M_x v}{J} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \right] \quad (2)$$

Wir bezeichnen mit

$$k_1 = \frac{E_1}{E_2} + 1, \quad k_2 = \frac{E_1}{E_2} - 1, \quad k = \frac{k_2}{k_1} \quad \dots \quad (3)$$

dann ergibt sich

$$d\varphi = \frac{k_2 ds}{2v E_1} \left[ \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{k J} \right] \quad \dots \quad (4)$$

Die Verkürzung der Bogenaxe  $\Delta ds = \frac{1}{2} (\Delta o + \Delta u)$  rechnet sich zu

$$\Delta ds = \frac{ds}{2} \left( \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} \right) = \frac{ds}{2 E_1} \left[ \frac{N_x}{F} \left( \frac{E_1}{E_2} + 1 \right) + \frac{M_x v}{J} \left( \frac{E_1}{E_2} - 1 \right) \right] \quad \text{oder} \quad \Delta ds = \frac{k_1 ds}{2 E_1} \left[ \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v k}{J} \right] \quad (5)$$

Ausserdem wird

$$\begin{aligned} \Delta dx &= \Delta ds \cos \varphi \\ \Delta dy &= \Delta ds \sin \varphi \end{aligned} \quad \dots \quad (6)$$

Wir behandeln einen *symmetrischen, eingespannten Bogen*. Der Koordinatenanfangspunkt wird in den elastischen Schwerpunkt verlegt, die positiven Axrichtungen sind für  $x$  nach links, für  $y$  nach oben angenommen (Abb. 3).

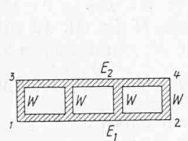


Abb. 1

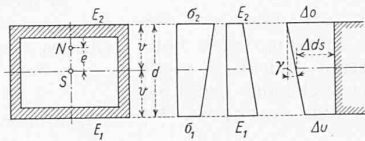


Abb. 2

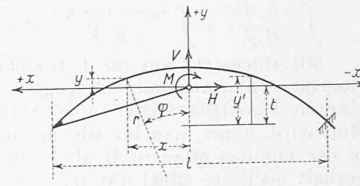


Abb. 3

Die Verschiebung  $\Delta l$  eines Elementes in der Richtung der  $x$ -Achse ist

$$\Delta l = y d\varphi - \Delta ds \cos \varphi + \alpha t ds \cos \varphi$$

Für unverschiebliche Widerlager ist

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int \frac{y k_2 ds}{2v E_1} \left[ \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{k J} \right] - \int \frac{k_1 ds \cos \varphi}{2 E_1} \left[ \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v k}{J} \right] + \alpha t l = 0 \\ \text{Die Verschiebung in der Richtung der } y\text{-Achse wird} \\ & \Delta v = -x d\varphi + \Delta ds \sin \varphi - \alpha t ds \sin \varphi, \text{ daraus} \\ 2. \quad & - \int \frac{x k_2 ds}{2v E_1} \left[ \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{k J} \right] + \int \frac{k_1 ds \sin \varphi}{2 E_1} \left[ \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v k}{J} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

die Verdrehung

$$3. \quad \int \frac{k_2 ds}{2v E_1} \left[ \frac{N_x}{F} + \frac{M_x v}{k J} \right] = 0$$

Alle Integrale sind über die ganze Bogenlänge auszudehnen.

Die drei im elastischen Schwerpunkt angreifenden statisch unbestimmten Grössen sind  $H$ ,  $V$ ,  $M$ . Das statisch bestimmte Grundsystem ist der nur im rechten Kämpfer eingespannte Freitrag.

Das Moment  $M_x = M_x + M - H y - V x$   
Die Normalkraft  $N_x = H \cos \varphi + Q_x \sin \varphi$

$$\left. \begin{aligned} \text{wobei die lotrechte Querkraft } Q_x &= V + Q_x = V - \sum_x G \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Mit diesen Werten erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & H \left[ \int \frac{y^2 k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 ds \cos \varphi}{v E_1 F} \right] + \int \frac{k_1 ds \cos^2 \varphi}{E_1 F} = \int \frac{M_x y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{M_x k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J} + \int \frac{Q_x y k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} - \int \frac{Q_x k_1 ds \sin \varphi \cos \varphi}{E_1 F} + 2 \alpha t l \\ 2. \quad & V \left[ \int \frac{x^2 k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{k_1 ds \sin^2 \varphi}{E_1 F} \right] = \int \frac{M_x x k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{M_x k_2 v ds \sin \varphi}{E_1 J} + \int \frac{Q_x x k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} - \int \frac{Q_x k_1 ds \sin^2 \varphi}{E_1 F} \\ 3. \quad & M \int \frac{k_1 ds}{E_1 J} = - \int \frac{M_x k_1 ds}{E_1 J} + H \left[ \int \frac{y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 ds \cos \varphi}{v E_1 F} \right] - \int \frac{Q_x k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} \end{aligned} \quad (9)$$

In diesen Gleichungen wurden schon mit Rücksicht auf das gewählte Koordinatensystem jene Glieder gestrichen, deren Faktoren Null sind, und zwar:

in Gl. 1 herrührend von  $M$ :

$$\int \frac{y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J} = 0$$

in Gl. 1 herrührend von  $V$ :

$$-\int \frac{xy k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{x k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J} + \int \frac{y k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} - \int \frac{k_1 ds \sin \varphi \cos \varphi}{E_1 F} = 0$$

in Gl. 2 herrührend von  $M$ :

$$-\int \frac{x k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{k_2 v ds \sin \varphi}{E_1 J} = 0$$

in Gl. 2 herrührend von  $H$ :

$$+\int \frac{xy k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 v ds \sin \varphi}{E_1 J} - \int \frac{x k_2 ds \cos \varphi}{v E_1 F} + \int \frac{k_1 ds \sin \varphi \cos \varphi}{E_1 F} = 0$$

in Gl. 3 herrührend von  $V$ :

$$-\int \frac{x k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} = 0$$

in Gl. 3 herrührend von  $H$ :

$$\int \frac{y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 ds \cos \varphi}{v E_1 F} \text{ ist nicht gleich Null.}$$

Mit Rücksicht auf die 1. Gleichung (10) verschiebt sich der Koordinatenanfangspunkt  $O$  gegenüber der Annahme einer konstanten Elastizitätsziffer, und weil die letzte Gleichung nicht Null wird, kann man im allgemeinen keine Gleichung erhalten, in der nur das Moment  $M$  allein als Unbekannte vorkommt. Sie enthält noch ein Glied mit  $H$ .

Um die Lage des elastischen Schwerpunktes zu bestimmen, wird die erste Gleichung (10) herangezogen, die umgeformt wird.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 3 ergibt sich  $y = y' - t$ , sodass diese Gleichung in der Form erscheint

$$\int \frac{y' k_1 ds}{E_1 J} - t \int \frac{k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J} = 0$$

und daraus der Abstand  $t$  des elastischen Schwerpunktes von der Kämpfersehne:

$$t = \frac{\int \frac{y' k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J}}{\int \frac{k_1 ds}{E_1 J}} \quad (11)$$

Unter Beachtung der Gleichung (10) erhalten wir die drei Gleichungen zur Bestimmung der statisch unbestimmten Grössen

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{\int \frac{M_x y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{M_x k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J} + \int \frac{M_x y k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} - \int \frac{y^2 k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 v ds \cos \varphi}{E_1 J} - \int \frac{y k_2 ds \cos \varphi}{v E_1 F} + \int \frac{M_x k_1 ds \sin \varphi \cos \varphi}{E_1 F} + 2 \alpha t l \\ &\quad + \int \frac{k_1 ds \cos^2 \varphi}{E_1 F} \\ V &= \frac{\int \frac{M_x x k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{M_x k_2 v ds \sin \varphi}{E_1 J} + \int \frac{x^2 k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{M_x x k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} - \int \frac{M_x k_1 ds \sin^2 \varphi}{E_1 F} \\ &\quad + \int \frac{k_1 ds \sin^2 \varphi}{E_1 F} \\ M &= - \int \frac{M_x k_1 ds}{E_1 J} + \int \frac{M_x k_2 ds \sin \varphi}{v E_1 F} + H \int \frac{y k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 ds \cos \varphi}{v E_1 F} \\ &\quad - \int \frac{k_1 ds}{E_1 J} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Für eine symmetrische Form des Bogens und symmetrische Belastungen verschwindet der Zählerausdruck von  $V$  und damit wird  $V = 0$ .

In den Gleichungen wurden die Grössen  $E_1$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $v$ ,  $J$ ,  $F$  als in jedem Querschnitt veränderliche Werte unter dem Integralzeichen belassen; sie gelten sowohl für einen Voll-, als auch für einen Hohlquerschnitt des Bogens, und ganz allgemein sind sie auch für das *Schwinden* und mit einer Abänderung für eine *plastische Verformung* zu gebrauchen. Alle besonderen Fälle lassen sich aus den Formeln (12) ableiten.

Mit Rücksicht auf die Gesetzmässigkeit des Arbeitsfortschrittes bei kontinuierlich durchgeführter Betonierung der Hohlquerschnitte könnte man auch in den Bogenquerschnitten die Differenz  $E_1 - E_2 = c$  als konstant annehmen, sodass  $E_1 = c + E_2$  wird.

Dann sind

$$k_1 = \frac{c + 2 E_2}{E_2}, \quad k_2 = \frac{c}{E_2}, \quad k = \frac{c}{c + 2 E_2} \quad (13)$$

$E_2$  kann dabei veränderlich bleiben.

Werden bei kurzer Arbeitszeit für die untere und die obere Schale über den ganzen Bogen geltende *konstante* Mittelwerte

$E_1$  und  $E_2$  angenommen, also  $E_1 = c_1 E_2$ , so sind

$$k_1 = c_1 + 1, \quad k_2 = c_1 - 1, \quad k = \frac{c_1 - 1}{c_1 + 1} \quad (14)$$

durchweg konstant und

$$t = \frac{\int \frac{y' ds}{J} - k \int \frac{v ds \cos \varphi}{J}}{\int \frac{ds}{J}} \quad (15)$$

Die bezüglichen Formeln werden durch Einsetzen von (13) bzw. (14) in Gleichung (12) ohne weiteres gewonnen. Für den speziellen Fall Gl. (14) sind die Endformeln bereits in einer Abhandlung des Verfassers angegeben<sup>1)</sup>.

Nach den hier gegebenen allgemeinen Formeln (12) lässt sich auch jede beliebige Reihenfolge der Betonierungsabschnitte des Bogens berücksichtigen, die zur Herabsetzung der Schwindwirkung vorgesehen wird, ebenso lassen sich auch für die Schwindfugen, die zum Schluss ausbetoniert werden, ihre zu erwartenden  $E$ -Werte in Rechnung stellen. Kurz, es kann jeder beliebige systematische Arbeitsvorgang, der keine kontinuierliche Betonierung vorsieht, wie etwa der beim Bau der *Traneberg-Brücke*<sup>2)</sup> eingeschlagene, in Rechnung gezogen werden.

## II. Wärmewirkung

In diesem Falle ist  $M_x = 0$ ,  $Q_x = 0$ . Bezeichnet man den Nennerausdruck des  $H$  in Gl. 12 mit  $N_1$  und jenen des zweiten Gliedes von  $M$  mit  $N_3$ , und dessen Zähler mit  $Z_3$ , so wird  $V = 0$ ,

$$H_t = \pm \frac{2 \alpha t l}{N_1}, \quad M_t = H \frac{Z_3}{N_3} \quad (16)$$

Das Moment  $M_x$  wird dann

$$M_x = -H_t y + M_t = H_t \left( -y + \frac{Z_3}{N_3} \right) = -H_t y_1$$

Die  $H_t$ -Kraft greift demnach nicht im elastischen Schwerpunkt, sondern um das Mass  $\frac{Z_3}{N_3}$  höher an. Der Abstand  $t_1$  der  $H_t$ -Kraft von der Kämpfersehne ist also

$$t_1 = t + \frac{Z_3}{N_3} \quad (17)$$

und unter Beachtung der ersten Gleichung in (10)

$$t_1 = \frac{\int \frac{y' k_1 ds}{E_1 J} - \int \frac{k_2 v ds \cos \varphi}{v E_1 F}}{\int \frac{k_1 ds}{E_1 J}} \quad (18)$$

Mit diesem Abstand von  $H_t$  bleibt der Horizontalschub als einzige statisch unbestimmte Grösse übrig.

## III. Schwinden und spannungsauslösende plastische Verformung

Es ist auch möglich bei einem Bogen, dessen Leibungen verschiedene Elastizitätsziffern  $E_1$  und  $E_2$  aufweisen, ein über den Querschnitt beliebig verteiltes Schwindmass und ein ebensolches Mass der plastischen Verformung zu berücksichtigen. Dabei kann auch dem Umstand Rechnung getragen werden, dass die plastische Verformung, soweit sie sich nicht *rein plastisch* auswirkt, von der jeweiligen Druckspannung in den Bogenpunkten abhängig ist.

In einer früheren Abhandlung<sup>3)</sup> hat der Verfasser auf Grund der Auswertung von Versuchen mit Eisenbetonsäulen bei Dauerbelastung nachgewiesen, dass die gemessenen Spannungen infolge der plastischen Verformung einem kleineren ideellen Formänderungswert  $E'$  des Betons gehorchen als dieser wirklich aufweist. Als Folge davon kann sich in einer Eisenbeton-Bogenbrücke die plastische Verformung nicht spannungslos äussern.

Es lässt sich die Rechnung für die plastische Verformung deshalb auf den tatsächlich vorhandenen Formänderungswert  $E_b$  des Betons beziehen, wenn man ein grösseres Verhältnis  $m = \frac{E_e}{E'}$  einführt, das je nach dem Alter des Betons bis über 40 ansteigen kann.

Ist der Bogen nach der Stützlinie für das Eigengewicht geformt und nimmt man für ihn ein durchwegs konstantes  $E_b$  an, so wird man auch das plastische Verformungsmass  $\varepsilon_p$  über den ganzen Querschnitt gleichmässig annehmen können, sodass sich bei einer Bewehrung von  $\mu \%$  die spezifische Verkürzung eines Bogenelementes zu  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_p}{1 + m \mu}$  ergibt, während für das Schwin-

den mit dem Schwindmass  $\varepsilon_s$  der Wert  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_s}{1 + n \mu}$  wird.

<sup>1)</sup> Dr. Ing. A. Hawranek: «Weitgespannte Eisenbeton-Bogenbrücken», Vorbericht des Internat. Kongresses für Brückenbau und Hochbau IV b, Berlin 1936, S. 799, bezw. 822.

<sup>2)</sup> Siehe «SBZ», Bd. 102, S. 301\* (16. Dez. 1933).

<sup>3)</sup> A. Hawranek: Zur Frage des Baues weitgespannter Eisenbeton-Bogenbrücken mit besonderer Berücksichtigung der Plastizität des Betons. «Beton und Eisen» 1937, S. 29.

Im folgenden soll auch die plastische Formänderung als Funktion der vom Eigengewicht herrührenden, also vorhandenen Betonspannung  $\sigma$  eingeführt und zwar soll sie proportional dem  $\sigma$  angenommen werden,  $\varepsilon_p = p\sigma$ . Dieser Ansatz ist durch Versuche von Gehler und Amos<sup>4)</sup> begründet, bei denen für einen dreifachen Spannungswert die plastische Formänderungsziffer nahezu den dreifachen Formänderungswert ergab, und zwar ziemlich gleichbleibend für verschiedene Alter des Versuchskörpers (siehe Bild 12 der angegebenen Quelle).

Ist ein Bogen hinsichtlich der spannungsauslösenden plastischen Verformung zu untersuchen, so wird man am besten die Berechnung für eine bestimmte Zeit nach dem Bogenschluss mit den bezüglichen tatsächlichen Verformungsmassen durchführen. Deshalb unterbleibt hier die Einführung der Zeitfunktion, deren gesetzmässige Aenderung für ein Bauwerk schwer genau feststellbar ist und die ausserdem die Integrationen wesentlich erschwert.

Wir behandeln nun im folgenden die gemeinsame Wirkung des Eigengewichtes, des Schwindens und der plastischen Verformung und nehmen an, dass der Bogen für das Eigengewicht bereits berechnet ist und die Spannungen  $\sigma$  bekannt sind. Es bedeuten:

- $\sigma', \sigma''$  die Betonspannungen am untern bzw. obren Rande eines Bogenquerschnittes für Eigengewicht;  
 $\sigma_1, \sigma_2$  die endgültigen Spannungen für Eigengewicht, Schwinden und plastische Verformung, unten bzw. oben;  
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  die gesamten spezifischen Längenänderungen der Randfasern eines Querschnittes, unten bzw. oben;  
 $p_1, p_2$  die Proportionalbeiwerte der plastischen Formänderungsmasse (auf die Spannungseinheit reduzierte plastische Verformungsmasse);  
 $\varepsilon_s', \varepsilon_s''$  die Schwindmasse der untern bzw. obren Randfaser;  
 $E_1, E_2$  die bezüglichen tatsächlichen Elastizitätsziffern des Betons unten bzw. oben;  
 $E_1', E_2'$  die bezüglichen ideellen Elastizitätsziffern des Betons, die für die Berechnung der Wirkung der plastischen Verformung massgebend sind;  
 $E$  die Elastizitätsziffer des Stahls;  
 $n_1 = \frac{E}{E_1}, \quad n_2 = \frac{E}{E_2}$   
 $m_1 = \frac{E}{E_1'}, \quad m_2 = \frac{E}{E_2'}$

Alle Spannungen sind als Druck positiv bezeichnet.

Unter der Annahme der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes lässt sich bei symmetrischer Bewehrung für die Betonspannungen folgender Ansatz machen: In der untern Randfaser setzt sich die Betonspannung  $\sigma_1$  für die gemeinsame Wirkung zusammen aus der Spannung  $\sigma'$  für Eigengewicht und den hinzukommenden Anteilen von Schwinden und der plastischen Verformung. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma' + \frac{\varepsilon_s'}{1+n_1\mu} \mu E + \frac{p_1 \sigma'}{1+m_1\mu} \mu E \\ \sigma_2 &= \sigma'' + \frac{\varepsilon_s''}{1+n_2\mu} \mu E + \frac{p_2 \sigma''}{1+m_2\mu} \mu E \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die spezifischen Verkürzungen der Randfasern sind nach Division durch  $E_1$  bzw.  $E_2$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma'}{E_1} + \frac{\varepsilon_s' n_1 \mu}{1+n_1\mu} + \frac{p_1 \sigma' n_1 \mu}{1+m_1\mu} = \frac{\sigma'}{E_1} + a_1 + b_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma''}{E_2} + \frac{\varepsilon_s'' n_2 \mu}{1+n_2\mu} + \frac{p_2 \sigma'' n_2 \mu}{1+m_2\mu} = \frac{\sigma''}{E_2} + a_2 + b_2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dabei wurden die zweiten und dritten Glieder mit  $a$  und  $b$  mit entsprechenden Zeigern bezeichnet.

Bezeichnen für die Eigengewichtswirkung  $\Delta ds', \Delta u', \Delta o'$  die Verkürzungen der Bogenelemente im Schwerpunkt, bzw. an der untern, bzw. obren Faser, und  $d\varphi'$  die Winkeländerung, so werden die Gesamtverkürzungen  $\Delta u, \Delta o$  der untern bzw. obren Faser

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= \varepsilon_1 ds = \Delta u' ds + (a_1 + b_1) ds \\ \Delta o &= \varepsilon_2 ds = \Delta o' ds + (a_2 + b_2) ds \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

und mit  $\Delta ds'', d\varphi''$ , der Bogenverkürzung in der Stabaxe, bzw. Winkeländerung infolge Schwindens und der plastischen Verformung, erhält man für die Gesamtwirkung

<sup>4)</sup> W. Gehler und H. Amos: Versuche über Elastizität, Plastizität und Schwinden von Beton. «Deutscher Ausschuss für Eisenbeton», Heft 78.

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= d\varphi' + d\varphi'' = \frac{\Delta o - \Delta u}{2v} = \\ &= \frac{ds}{2v} \left[ (\Delta o' - \Delta u') + (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) \right] = d\varphi' + \frac{ds}{2v} \varepsilon' \\ \Delta ds &= \Delta ds' + \Delta ds'' = \frac{\Delta o + \Delta u}{2} = \\ &= \frac{ds}{2} \left[ (\Delta o' + \Delta u') + (a_2 + b_2) + (a_1 + b_1) \right] = \Delta ds' + \frac{ds}{2} \varepsilon'' \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) \\ \varepsilon'' &= (a_2 + b_2) + (a_1 + b_1) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Einschliesslich der Eigengewichtswirkung erhält man die waag-rechten Verschiebungen  $\Delta l$

$$\Delta l = y(d\varphi' + d\varphi'') - (\Delta ds' + \Delta ds'') \cos \varphi$$

und weil bei symmetrischer Bauart des Bogens für den vorliegenden Fall der Gesamtwirkung  $V' = 0$ , aus den beiden Gleichungen

$$\int \Delta l = 0 \quad \int (d\varphi' + d\varphi'') = 0 \quad (24)$$

die beiden statisch unbestimmten Grössen

$$H' = H + H_\varepsilon \quad M' = M + M_\varepsilon,$$

wobei  $H, M$  vom Eigengewicht,  $H_\varepsilon, M_\varepsilon$  vom Schwinden und der plastischen Verformung herrühren.

Der Rechnungsgang ist nun weiter der gleiche wie der eingangs gezeigte.

Man kann auch die Berechnung für das Schwinden und die plastische Verformung allein durchführen. Mit den schon gebrauchten Bezeichnungen  $N_1, Z_3, N_3$  ergeben sich dann die drei statisch unbestimmten Grössen  $H_\varepsilon, V_\varepsilon, M_\varepsilon$  für das Schwinden und die plastische Verformung

$$\left. \begin{aligned} H_\varepsilon &= \frac{\int y \varepsilon' ds}{N_1} - \frac{\int \varepsilon'' ds \cos \varphi}{N_1} \\ V_\varepsilon &= 0 \\ M_\varepsilon &= - \frac{\int \varepsilon' ds}{N_3} + H_\varepsilon \frac{Z_3}{N_3} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

und die Momente  $M_x$

$$M_x = -H_\varepsilon y + M_\varepsilon = H_\varepsilon \left( -y + \frac{Z_3}{N_3} \right) - \frac{Z_\varepsilon}{N_3} \quad (26)$$

wobei

$$Z_\varepsilon = \int \frac{\varepsilon' ds}{v} \quad (27)$$

oder umgeformt

$$M_x = \frac{1}{N_3} \left[ H_\varepsilon (-y N_3 + Z_3) - Z_\varepsilon \right] \quad (26a)$$

Die Randformänderungsgrössen  $\varepsilon', \varepsilon''$  sind für jeden Bogenquerschnitt verschieden und vorerst zu ermitteln. Nimmt man für das Schwinden und für die plastische Verformung für den ganzen Bogen konstante Werte an und ausserdem  $E_1 = E_2$ , so wird

$$a_1 = a_2, \quad a_2 - a_1 = 0, \quad b_1 = b_2, \quad b_2 - b_1 = 0, \quad \text{und es wird} \\ d\varphi'' = 0, \quad \varepsilon' = 0.$$

Auch die Integrale der Gl. (25), die  $\varepsilon'$  enthalten, werden Null, ebenso  $M_\varepsilon = 0$ , sodass dann

$$H_\varepsilon = - \frac{\varepsilon'' l}{N_1},$$

wobei in  $N_1$  die von den verschiedenen  $E$ -Werten herrührenden Glieder gestrichen werden können, da dann  $k_2 = 0, k = 0$  ist und  $k_1 = 2$ .

Die Grössen  $a_1, a_2, b_1, b_2$  müssen aus den bezüglichen Versuchswerten für den verwendeten Beton abgeleitet werden.

Bei der Bestimmung der Spannungen ist auf das Vorzeichen Rücksicht zu nehmen. Die Werte  $n_1, n_2$  sind in den einzelnen Bogenquerschnitten aus den bezüglichen Elastizitätsziffern des Betons zu errechnen, die der Bogen nach einer bestimmten Zeit nach der Fertigstellung des Bogens hat, wie dies unten im Beispiel gezeigt wird.

Die Grössen  $m_1, m_2$  lassen sich für die verstrichene Zeit nach Ausschaltung des Bogens aus Versuchen berechnen, wie dies in der Quelle (Fussnote 1) geschehen ist. Für den Bau grosser Bogenbrücken, an die hier vornehmlich gedacht ist, wird es zweckmässiger sein, die bezüglichen Werte aus besonderen Versuchen zu ermitteln. Werden diese rechtzeitig vor Baubeginn eingeleitet, so kann man noch zeitgerecht die Ergebnisse heranziehen, wobei man neben den Elastizitätsziffern auch die wirklichen Werte für  $\varepsilon_s$  und  $p$  für die verwendete Betongattung ermitteln kann.



Um aber schon beim Entwurf mit den nötigen, aber angenäherten Zahlenwerten für die plastische Verformung rechnen zu können, liessen sich die Idealkurven von Whitney heranziehen; auch die Versuche von Gehler und Amos geben genügend Anhaltspunkte für eine Vorberechnung, die dann mit den wirklichen Werten kontrolliert werden kann.

Selbstverständlich lässt sich die Rechnung auch für die Höchstwerte des Schwindens und der plastischen Verformung in gleicher Weise durchführen.

#### IV. Beispiel

Als Beispiel wurde ein Bogen von 400 m Spannweite und 100 m Pfeilhöhe gewählt (Abb. 4), wie er in der Abhandlung lt. Fussnote 1 beschrieben worden ist. Der Bogen hat aus dort angeführten Gründen einen konstanten Querschnitt  $F = 39,1 \text{ m}^2$ ,  $J = 175,5 \text{ m}^4$ ; seine Bogenaxe ist nach der Stützlinie für das Eigengewicht des Bogens geformt. Im weiteren Verlaufe der Berechnung wurde das in Abb. 3 gegebene Axenkreuz belassen.

Entsprechend dem Arbeitsvorgang bei der Herstellung eines so grossen Bogens mit einem Hohlquerschnitt und dem erforderlichen Zeitaufwand wurde für die vorerst betonierte untere Platte im Kämpfer eine Elastizitätszahl des Betons von  $E_1 = 470\,000 \text{ kg/cm}^2$ , im Scheitel von  $E_1 = 350\,000 \text{ kg/cm}^2$  angenommen und entsprechend der Fortsetzung der Betonierung für die obere Platte des Hohlquerschnittes im Kämpfer  $E_2 = 350\,000 \text{ kg/cm}^2$ , im Scheitel  $E_2 = 230\,000 \text{ kg/cm}^2$ . Dazwischen wurde in den 13 Teilstücken einer Bogenhälfte die Elastizitätszahl linear veränderlich angenommen. Diese Annahmen entsprechen den voraussichtlichen Elastizitätszahlen der einzelnen Teile des geschlossenen Bogens.

Dabei ergeben sich die in Abb. 4 eingetragenen veränderlichen Werte von  $k_1$  und  $k_2$  und nach Gl. (11) der Abstand  $t$  des elastischen Schwerpunktes von der Kämpfersehne  $t = 66,744 \text{ m}$ , gegenüber  $t = 64,548 \text{ m}$  für einen konstanten  $E$ -Wert. Er liegt also im vorliegenden Falle höher.

Um über die Grösse der Momente ein Urteil zu gewinnen, wurde der Bogen nach den hier abgeleiteten Formeln für eine halbsseitige Belastung  $p = 1 \text{ t/m}$  in der rechten Bogenhälfte genau berechnet.

Die drei statisch unbestimmten Grössen ergeben sich zu  $H = +102,111 \text{ t}$  (gegenüber  $101,304 \text{ t}$  für  $E = \text{konst.}$ )  $\Delta = +1 \text{ ‰}$ ,  $V = +35,544 \text{ t}$  (gegenüber  $38,597 \text{ t}$  für  $E = \text{konst.}$ )  $\Delta = -7,9 \text{ ‰}$ ,  $M = +3473,59 \text{ tm}$  (gegenüber  $3707,34 \text{ tm}$  für  $E = \text{konst.}$ )  $\Delta = -6,3 \text{ ‰}$ .

Die Momente  $M_x$  für veränderliche  $E$  und  $M_{x'}$  für ein durchwegs konstantes  $E$  ergeben sich aus nachstehender Tabelle:

Momentenwerte für eine halbsseitige Belastung mit  $p = 1 \text{ t/m}$

Punkt	$M_x$ $E$ veränderlich	$M_{x'}$ $E$ konstant	$M = M_x - M_{x'}$	$\Delta$ in $\text{‰}$
13	+ 3180,15 tm	+ 2467,35 tm	+ 712,80 tm	+ 28,9
9	+ 13,99 "	- 484,65 "	- 500,64 "	- 20,9
6	- 1087,87 "	- 1417,65 "	- 329,78 "	- 23,2
3	- 1036,07 "	- 1205,65 "	- 169,58 "	- 14,1
0	+ 77,79 "	+ 67,35 "	+ 10,44 "	+ 15,3
3'	+ 1224,14 "	+ 1348,35 "	+ 124,21 "	+ 9,2
6'	+ 1128,45 "	+ 1384,35 "	+ 255,90 "	+ 18,5
9'	- 117,39 "	+ 267,35 "	+ 384,74 "	+ 16,3
13'	- 2602,31 "	- 2092,65 "	- 509,66 "	+ 24,4

Die  $M_x$ -Werte sind in der Abb. 4 eingetragen, wobei die  $M_x$ -Linie voll ausgezogen, die  $M_{x'}$ -Linie gestrichelt ist.

Die Unterschiede sind also ziemlich erheblich, besonders an den Einspannstellen, wobei die genaue Rechnung dort um 28,9  $\text{‰}$  bzw. 24,4  $\text{‰}$  grössere Werte für diesen Belastungsfall ergibt als

für die übliche mit konstantem  $E$ . Auch im Scheitel erhält man nach der genauen Rechnung um 15  $\text{‰}$  grössere Momente  $M_x$ .

Deshalb ergeben sich auch bei Vollbelastung mit  $p = 1 \text{ t/m}$  die Spannungsmomente in den Kämpfern für die genaue Rechnung mit veränderlichem  $E$  grösser als für konstantes  $E$ . Es ist  $M_x = 577,835 \text{ tm}$  gegenüber  $M_{x'} = 374,696 \text{ tm}$ . Im ersten Fall ist also  $M_x$  um 54  $\text{‰}$  grösser, wenn auch die absoluten Werte nicht bedeutend sind.

Ebenso sind für das Eigengewicht des Bogens die Spannungsmomente in den Kämpfern grösser, sodass es sich empfiehlt, bei einer Behandlung des Bogens behufs Ausgleiches der Momente durch Anwendung hydraulischer Pressen vor dem Bogenschluss auf die hier gegebene schärfere Berechnung Rücksicht zu nehmen, umso mehr als nach einem erfolgten Momentenausgleich immer in den Kämpfern noch die grössten Momentenwerte auftreten.

Es bleibt noch zu untersuchen, wie sich die Momente im Bogen mit der Zeit ändern, wenn nach dem Bogenschluss die Elastizitätszahlen in allen Bogenteilen grösser werden.

Die Momente bleiben nur dann im weiteren Verlaufe der Zeit konstant (wenn wir die Schwindwirkung nicht berücksichtigen und nur die Belastung im Auge behalten), wenn sowohl  $E_1$  als auch  $E_2$  sich proportional ändern würden, sodass die neuen Werte  $E_1' = \nu E_1$  und  $E_2' = \nu E_2$  wären. Dies ergibt sich aus Gl. (3). Eine andere gesetzmässige Änderung der  $E$ -Werte ändert die Momente. Es ist also dann eine neue Rechnung erforderlich.

Die Wärmewirkung wurde für eine Zunahme um  $t = 15^\circ \text{C}$  berechnet. Es ergab sich  $H_t = \frac{2\alpha t l}{N_1} = 52,559 \text{ t}$  (gegen  $H_t = 53,3 \text{ t}$ )  $M_t = +16,14 \text{ tm}$ .

Die Momente  $M_x$  lassen sich aus der Formel  $M_x = -H_t y + M_t$  berechnen. Die Momente sind in der folgenden Tabelle angegeben und zwar  $M_x$  für veränderliche  $E$ ,  $M_{x'}$  für ein konstantes  $E$  und der Unterschied  $\Delta M$  in  $\text{‰}$  (Abb. 4).

Momente infolge einer Wärmezunahme um  $15^\circ \text{C}$

Punkt	$M_x$ $E$ veränderlich	$M_{x'}$ $E$ konstant	$\Delta M_x$ in $\text{‰}$
13	+ 3530,14 tm	+ 3420 tm	+ 3,2
9	+ 870,14 "	+ 720 "	+ 20,9
6	- 575,86 "	- 746 "	- 22,8
3	- 1428,86 "	- 1611 "	- 11,3
0	- 1733,86 "	- 1920 "	- 9,7

Die Untersuchungen sind hier allgemeiner gehalten als die vom Verfasser anlässlich des Internat. Kongresses für Brückenbau und Hochbau in Berlin, Oktober 1936, vorgetragenen.

Die zahlenmässige Ausrechnung hat mein Assistent Ing. Erich Haulena in dankenswerter Weise durchgeführt.

\*

Als wesentliches Ergebnis der Untersuchungen, die vornehmlich für grosse Bogenbrücken gedacht sind, wäre die Erhöhung der Momente und der Spannungen in den Kämpfern hervorzuheben, die die schärfere, der Wirklichkeit näher kommende Berechnung ergibt, gegenüber der üblichen Berechnung mit einer konstanten Elastizitätszahl des Betons. Die Unterschiede sind, wie das Beispiel gezeigt hat, nicht klein.

Bei dem Bestreben, die zulässigen Spannungen im Beton zu erhöhen und die Abmessungen geringer zu halten, gewinnen die Untersuchungen an Bedeutung.

#### Wettbewerb für eine Schulhausanlage im Marzillmoos in Bern

Ueber Lage und Konfiguration des Baugeländes geben die Modellphotos, sowie der Lageplan S. 157 Auskunft. Die Anordnung der Bauten hat einen etappenweisen Ausbau zu ermöglichen wie folgt. 1. Etappe: Kindergartenabteilung (3 Räume und Spielplatz) und Seminarübungs-Schule (6 Zimmer und Pausenplatz) nebst einem Werkunterrichtsraum, Leiterinzimmer, Abwartwohnung und Heizung usw., sowie eine Turnhalle mit Rasensportplatz. 2. Etappe: Seminar- und Fortbildungsabteilung mit zusammen 11 Unterrichtszimmern, 2 Sammlungsräumen, Singsaal, Zeichensaal, Schulküche mit ihren Nebenräumen, je ein Vorsteher-, Lehrer-, Lese-, Bibliothekzimmer, sowie verschiedene kleinere Räume und ein Schulgarten. Der von den Schulbauten nicht beanspruchte Teil des an die Flussbäder der Aare stossenden Geländes soll zu öffentlichen Spielwiesen gemacht werden.