

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 107/108 (1936)  
**Heft:** 7

## Inhaltsverzeichnis

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Zur Berechnung der Fliehkraftarbeit beim Problem der Scheibenschwingungen. — Die Bautätigkeit im mittleren Osten. — Elektrische Erwärmung von Beton und Mörtel bei Frosttemperaturen (Elektrobeton). — Zwei Landhäuser der Arch. O. & W. Senn in Basel (mit Tafel 3/4). — Dritter Hochschulkurs für Photogrammetrie. — Mitteilungen: Korrosionsverhinderung in Warmwasserversorgungsanlagen. Silsersee-Bergeller

Kraftwerke. Die erste deutsche Eisenbahnschiene. Elektrische Energieerzeugung 1934/35 in der Schweiz. «British Industries Fair», Schweiz. Tonfilmatelier. Mietatelierhaus in Amsterdam. Bambus als Betonbewehrung. — Wettbewerbe: Kirche in Villeret. «Submissions-Wettbewerb» für die Lorrainehaldelinie. — Literatur. — S. T. S.: Ueberseetätigkeit. — S. I. A.-Fachgruppe der Ingenieure. — Mitteilungen der Vereine. — Vortrags-Kalender.

## Zur Berechnung der Fliehkraftarbeit beim Problem der Scheibenschwingungen.

Von Dr. I. MALKIN, Ing., Westinghouse Electric & Manufacturing Company, Philadelphia, Pa.

**1. Einleitung.** Bei der Berechnung des Einflusses, den die Fliehkräfte auf die Eigenfrequenzen der Querschwingungen der rotierenden Scheibe ausüben, hat sich in der Literatur eine eigenartige Schwierigkeit ergeben, die hier geklärt werden soll. An sich sind nämlich für die Ermittlung der Fliehkraftarbeit zwei Wege denkbar; bei dem einen bilden die Fliehkräfte selbst den Ausgangspunkt, beim andern dagegen die Spannungen, die jene in der Scheibe hervorrufen. Die beiden Wege sind in der Tat auch beschritten worden. Es hat sich aber gezeigt, und wir werden es auch gleich sehen, dass man dabei zu verschiedenen Ergebnissen gelangt. Eine befriedigende Erklärung dieses Widerspruches wurde bis jetzt wohl nicht gegeben.

Andererseits werden wir nachstehend auch die Genauigkeitsgrenzen beurteilen können, innerhalb derer die beiden Berechnungsarten in der Praxis als gleichwertig angesehen werden dürfen, und darauf die Wahl des für die Anwendung bequemeren Verfahrens gründen.

**2. Die Formeln für die Fliehkraftarbeit.** Bekanntlich ist die Schwingungsfrequenz unabhängig davon, ob die Knotenfigur im Raum oder aber der Scheibe gegenüber ruht. Denken wir uns eine Schwingungsform der zweiten Art etwa durch die Formel

$$w = f(r) \sin k\Theta \cos \lambda t \dots \quad (A)$$

gegeben, worin  $w$  die Durchbiegung eines Punktes der Mittelebene der Scheibe ist,  $r$  den Radius,  $\Theta$  den von einem materiellen Scheibendurchmesser aus gerechneten Azimutwinkel und  $t$  die Zeit bedeuten, während  $k$  die Anzahl der Knotendurchmesser,  $\lambda$  die Schwingungsfrequenz und  $f(r)$  die Durchbiegungsform der Winkelhalbierenden zwischen zwei benachbarten Knotenradien sind, so lässt sich die Fliehkraftarbeit von den Spannungskomponenten ausgehend wie folgt berechnen. Ein Element  $r dr d\Theta$  der deformierten Mittelfläche weist gegen die undeformierte Lage des Radius  $r$  und die zugehörige Kreistangente Neigungswinkel auf, deren Cosinus entsprechend gleich sind

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta w}{\delta r} \right)^2, \quad I = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta w}{r \delta \Theta} \right)^2.$$

Bezeichnet man mit  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  die Radial- bzw. Tangential-Komponente der durch die Fliehkräfte hervorgerufenen Spannung, so ist die Arbeit der Fliehkräfte, vom Zeitfaktor  $\cos \lambda t$  abgesehen, gleich

$$V_{f1} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\delta w}{\delta r} \right)^2 \sigma_r + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\delta w}{\delta \Theta} \right)^2 \sigma_t \right] z r dr d\Theta = \int_0^a \pi \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{df}{dr} \right)^2 \sigma_r + k^2 \left( \frac{f}{r} \right)^2 \sigma_t \right] z r dr \dots \quad (1)$$

wenn man mit  $z$  die Scheibendicke, mit  $2\alpha$  und  $2r_0$  den äusseren bzw. den inneren Scheibendurchmesser bezeichnet.

Rechnet man aber mit den Fliehkräften selbst statt mit den Spannungen, so kommt man in ganz analoger Weise zum Ergebnis<sup>1)</sup>

$$V_{f2} = 2\pi \rho \omega^2 \int_0^a z r^2 \xi dr \dots \quad (2)$$

worin  $\rho$  die Massendichte ist,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit bedeutet und

$$\xi = \frac{1}{2} \int_{r_0}^r \left( \frac{df}{dr} \right)^2 dr$$

Dass die Arbeitsbeträge (1) und (2) einander nicht gleich sind, geht aus 4. hervor. Der Grund für die Ungleichheit ist folgender:

<sup>1)</sup> S. hierzu A. Stodola: „Dampf- und Gas-Turbinen“, 1922, S. 908.

**3. Grund für die Ungleichheit der Beträge (1) und (2).** Der natürliche Weg zur Berechnung der Fliehkraftenergie ist derjenige, bei dem von den Spannungskomponenten ausgegangen wird, von den Wirkungen also, die die betreffende äussere Kraft in der Scheibe selbst auslöst, denn es handelt sich ja doch schliesslich um eine Energie, die in der Scheibe ihren Sitz hat. Wenn man diese Energie auf dem Umwege über die äussere Kraft berechnen will, so muss man sich auf ein Gesetz berufen können, das diese Zurückführung vermittelt. Wir wissen, dass die Fliehkräfte einerseits und die Spannungskomponenten  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  andererseits unabhängig von der Schwingungsbewegung miteinander ein Gleichgewichtssystem bilden. Daher leisten die Fliehkräfte einerseits und die Spannungskomponenten andererseits gleiche Arbeit bei jeder virtuellen Verrückung des von ihnen gebildeten Gleichgewichtssystems. Dass die Arbeiten (1) und (2) einander nicht gleich sind, liegt eben daran, dass die in Frage stehenden speziellen Verschiebungen nicht zu den virtuellen Verrückungen des Systems gehören. Die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen den Fliehkräften und den Spannungskomponenten der rotierenden Scheibe werden ja für die Scheibenebene aufgestellt, folglich sind die virtuellen Verrückungen des betrachteten Systems auf diese Ebene beschränkt. Verrückungen quer dazu kommen hier gar nicht in Frage. Auf diesem Wege kommen wir zum Schluss, dass das Prinzip der virtuellen Arbeiten im betrachteten Falle nicht herangezogen werden kann und die Arbeitsbeträge (1) und (2) einander nicht gleich zu sein brauchen.

**4. Vergleich der Arbeitsbeträge (1) und (2) miteinander.** Für das Folgende ist es von praktischem Interesse, die Arbeitsbeträge (1) und (2) miteinander zu vergleichen. Auf Grund der bekannten Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{d}{dr} (rz\sigma_r) - z\sigma_t + \rho\omega^2 r^2 z = 0$$

ist der Arbeitsbetrag (2) gleich

$$V_{f2} = -2\pi r z \sigma_r \xi \Big|_{r_0}^a + 2\pi \int_{r_0}^a rz\sigma_r \frac{d\xi}{dr} dr + 2\pi \int_{r_0}^a z\sigma_t \xi dr$$

Hierin ist der erste Summand immer klein, falls, wie wir hier annehmen wollen,  $\sigma_r = 0$  an der Stelle  $r = a$ ; denn am Innenrande  $r = r_0$  sind  $r$  und  $\xi$  klein, und mit gewisser Einschränkung gilt dies bei der Betriebsgeschwindigkeit auch von  $\sigma_r$ ; bei der Vollscheibe ist der betrachtete Betrag an der unteren Grenze genau gleich Null. Aus diesen Gründen wollen wir in der folgenden Näherungsbetrachtung mit

$$V_{f2} = \pi \int_{r_0}^a rz\sigma_r \left( \frac{df}{dr} \right)^2 dr + \pi \int_{r_0}^a z\sigma_t \left[ \int_{r_0}^r \left( \frac{df}{dr} \right)^2 dr \right] dr$$

rechnen. zieht man diesen Betrag vom Betrage (1) ab, so folgt

$$V_{f1} - V_{f2} = \pi \int_{r_0}^a \left[ k^2 \left( \frac{f}{r} \right)^2 r - \int_{r_0}^r \left( \frac{df}{dr} \right)^2 dr \right] z\sigma_t dr. \quad (3)$$

Um diese Differenz bequem abschätzen zu können, beziehen wir uns hier, wie auch in der Folge, auf die in der Dampfturbinenpraxis üblichen Berechnungsverfahren<sup>2)</sup> für die Schwingungsfrequenzen der Scheibe, wonach für  $f(r)$  nach dem Vorgehen von Stodola die Funktion  $r^s$  angesetzt wird. Hierin ist  $s$  ein im Rahmen des bekannten Rayleighschen Minimalprinzips der Schwingungslehre (siehe Abschnitt 5) zu bestimmender konstanter Parameter. Mit diesem Ansatz, der durch die bekannten exakten Lösungen gerechtfertigt wird und sich bei der Berechnung von Scheiben

<sup>2)</sup> Siehe A. Stodola: „Dampf- und Gas-Turbinen“, 1922, Seite 903, sowie den Nachtrag dazu.