Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 107/108 (1936)
Heft: 26

Inhaltsverzeichnis

Band 107 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 26

Graphische Bestimmung der Eigenfrequenz von Drehschwingungen.

Von HANS LIEBERHERR, Dipl. Ing., Winterthur.

In Bd. 95, Nr. 5 der «SBZ» vom 1. Februar 1930 wurde ein Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenz ersten Grades von Drehschwingungen angegeben, welches das Gegenstück zu der bekannten Methode für die Ermittlung der Eigenfrequenz der Biegungsschwingungen einer mit Massen besetzten Welle darstellt. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich die ganze Rechnung rein graphisch durchführen lässt, sodass die Zwischenrechnungen sowie die Rücksichtnahme auf den Masstab, in dem die verschiedenen Grössen aufgetragen werden, wegfallen. Weiterhin wird eine Erweiterung des Verfahrens entwickelt, die die Eigenfrequenzen der Schwingungen höheren Grades, also mit mehreren Knotenpunkten, zu bestimmen gestattet.

I. Bestimmung der Grundfrequenz.

Eine in bekannter Weise auf konstantes polares Trägheitsmoment J_p reduzierte Welle sei mit Einzelträgheitsmomenten Θ_i belegt. Bei Wellen mit stetig verteilten Massenträgheitsmomenten werden diese in Einzelmassen aufgelöst. Zur Beschreibung der zeitlichen Veränderung des Verdrehungswinkels φ im Abstand x von einem (linken) Wellenende geht man aus von dem Normalschwingungsansatz $\varphi = A(x)\cos(\lambda t)$. Das verdrehende Moment im Querschnitt x ist proportional der Neigung der elastischen Linie in diesem Querschnitt und steht in jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht mit den Momenten der Trägheitskräfte sämtlicher links von diesem Querschnitt befindlicher Massen. Daraus folgt

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \Theta_i A_i}{G J_p}\lambda^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Zwischen zwei Einzelträgheitsmomenten ist demnach die Neigung dA/dx der elastischen Linie konstant. Am Wellenende $x = l$ verschwindet sie gleichzeitig mit dem verdrehenden Moment, also

$$\sum_{i=1}^{n} \Theta_i A_i = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Das Vorgehen möge nun gleich an einem Beispiel erläutert werden. In Abb. 1 ist (1) eine in ihren reduzierten Längen aufgezeichnete Welle, wobei 1 cm Zeichnung α cm in Wirklichkeit darstelle. Es wird weiter eine elastische Linie angenommen, die hier absichtlich als gerade Linie (2) gewählt ist, um zu zeigen, dass trotz dieser rohen Annäherung das Verfahren rasch zu brauchbaren Werten der Eigenfrequenz λ führt. Dabei ist die Abszissenaxe, «Schwingungsaxe» genannt, von der aus die Amplituden $A(x)$ gerechnet werden, so festzulegen, dass Gl. (2) befriedigt wird. Fasst man die Θ_i als horizontale, in den Abständen A_i von der Schwingungsaxe angreifende Parallelkräfte auf, so ist diese Gleichung die Bedingung dafür, dass die Resultierende der Kräfte in die Schwingungsaxe fällt. Diese ist also graphisch folgendermassen zu ermitteln: Bildung eines Kräfteplans (3) durch Auftragen der Trägheitsmomente Θ_i in einer Parallelen zur Wellenaxe, im Masstab von 1 cm Zeichnung $= \beta$ kgcmsec² und mit einer Poldistanz von H_1 in cm. Das Seilpolygon (4) ergibt dann die Lage der Schwingungsaxe (5) als Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahles.

Erste Näherung: Die Gerade (2) befriedigt nun wohl die Gl. (2), nicht aber die Gl. (1). Wir konstruieren deshalb jetzt unter Verwendung der angenommenen elastischen Linie einen Streckenzug, der, bei willkürlich angenommenem λ, der Gl. (1) genügt. Die Produkte $\Theta_i A_i$ können direkt dem Seilpolygon entnommen werden, wenn man von 0 aus Parallele zu den einzelnen Polstrahlen zieht und mit den zugehörigen Wirkungslinien der Kräfte Θ_i schneidet. Es ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $m_i : A_i = \Theta_i : H_1$, also $\Theta_i A_i = m_i H_1$. Wenn wir nun die m_i als vertikale Kräfte in dem Kräfteplan (7) mit horizontaler Anfangslinie und der willkürlichen Poldistanz von H_2 cm auftragen, so befriedigt das Seilpolygon (8) mit

$$\lambda_0{}^2 = \frac{G J_p}{H_1 H_2 \alpha \beta} \quad \ldots \quad (3)$$

in erster Annäherung die Gl. (1). Freilich wird dieser Streckenzug (8) im allgemeinen nicht auch die Gl. (2) bezüglich der Schwingungsaxe (5) erfüllen. Wie vorher für die Annahme (2) können wir aber auch für die verbesserte elastische Linie (8) mit Hilfe des Kräfteplans (3) und des Seilpolygons (9) die der Gl. (2) genügende Schwingungsaxe (10) als den Schnittpunkt 0′ des ersten und letzten Strahls bestimmen.

Vergleich zwischen Ergebnis (8) und Annahme (2): Bringt man durch Verschieben der ersten Näherung in die gestrichelt angedeutete Lage (11) die Schwingungsaxe (10) mit der Axe (5) zur Deckung, so kann man die Amplituden $A_{1_0}, A_{2_0} \ldots\ldots$ der Annahme mit denen der ersten Näherung $A_{1_1}, A_{2_1} \ldots\ldots$ mittels der angedeuteten Hilfsgeraden im Abstand 1 von der Axe (5) bequem vergleichen. So ergeben sich die Verhältnisse

$$a_1 = \frac{A_{1_1}}{A_{1_0}}, \quad a_2 = \frac{A_{2_1}}{A_{2_0}} \quad \ldots\ldots$$

sofort in der aus der Abb. 1 ersichtlichen Weise (12).

Bezüglich der Schwingungsaxe (5) genügt nach Konstruktion der Streckenzug (11) der Bedingungsgl. (2), während die Neigung dA/dx einer seiner Strecken mit den Amplituden A_{1_0}, A_{2_0} usw. der Annahme (2) gemäss Gl. (1) so zusammenhängt:

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{(\Theta_1 A_{1_0} + \Theta_2 A_{2_0} + \ldots)\,\lambda_0{}^2}{G J_p}$$

Setzt man hierin mit einem mittleren Werte von a näherungsweise

$$A_{1_0} = \frac{A_{1_1}}{a}, \quad A_{2_0} = \frac{A_{2_1}}{a} \ldots\ldots$$

so erhält man die gleiche Neigung der elastischen Linie

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{(\Theta_1 A_{1_1} + \Theta_2 A_{2_1} + \ldots)\,\lambda^2}{G J_p}$$

sofern man setzt

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_0{}^2}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

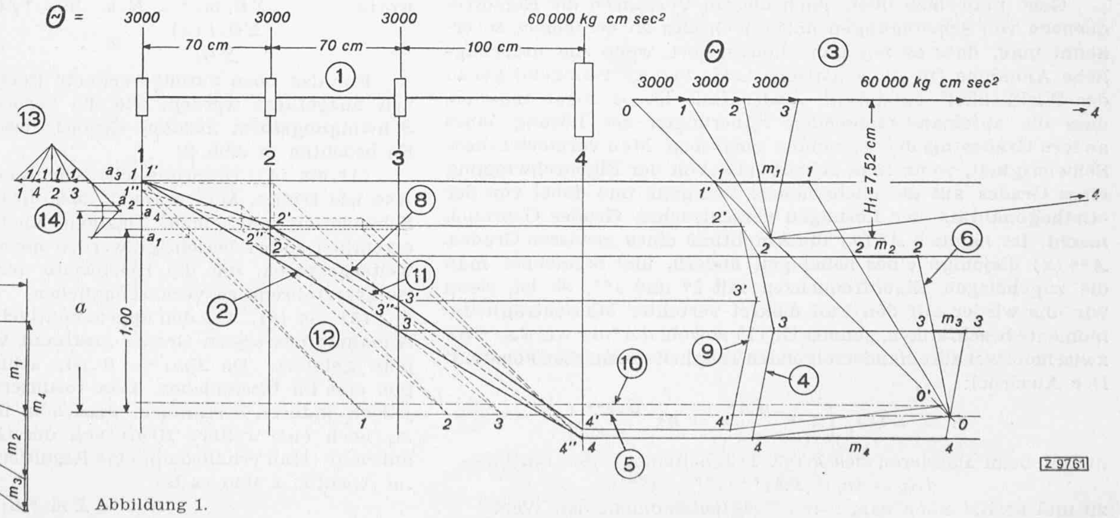
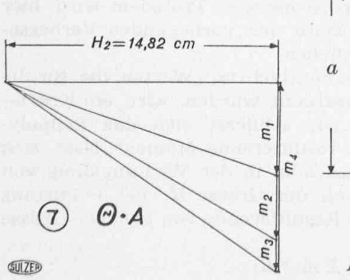

Abbildung 1.