

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 107/108 (1936)  
**Heft:** 24

**Artikel:** Zur Schalentheorie  
**Autor:** Schultz-Grunow, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48312>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Zur Schalentheorie. — Die Spitalammsperre der Kraftwerke Oberhasli. — Sicherungsarbeiten am schiefen Turm von Pisa. — Villa Girasole in Marcellise (Verona). — Mitteilungen: Die Wirtschaftlichkeit von Elektrofahrzeugen. Hohlraumbildung in Kreiselpumpen. Die Tieferlegung der Glatt. Velox-Dampferzeuger von 75 t/h Dampfleistung. Eidgen. Technische Hochschule. Leichte Wände aus Streckmetall und

Zementmörtel. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, zweiter Kongress, 1. bis 11. Oktober, Berlin und München. Der neue Tierpark Dählhölzli in Bern. — Wettbewerbe: Kirchgemeindehaus Reinach, Aargau. — Nekrologe: Jos. G. Fellmann. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Schweizer. Verband für die Materialprüfung der Technik. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

## Band 107

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

## Nr. 24

## Zur Schalentheorie.

Von Dr. sc. techn. F. SCHULTZ-GRUNOW, Göttingen.

Durch die Entwicklung der Näherungstheorie für axensymmetrische Schalen mit nicht zu flachen Rändern unter axensymmetrischer Randbelastung ohne axiale Komponente durch *Bauersfeld-Geckeler*<sup>1)</sup> und *Meissner*<sup>2)</sup> wurde die schon lange als notwendig empfundene einfache Festigkeitsberechnung der am häufigsten vorkommenden schalenförmigen Konstruktionselemente ermöglicht. Für die praktische Anwendung liegt ein Nachteil der Theorie aber in ihrer Ableitung aus den Ergebnissen der exakten Schalentheorie, sodass ihr Verständnis ungleich höhere Kenntnisse erfordert als die eigentliche Festigkeitsberechnung, die nicht schwieriger ist, als die Berechnung einfacher Platten. Diesem Mangel begegnet eine von *Steuermann*<sup>3)</sup> angegebene Ableitung, die die Näherungstheorie auf die *elementare Balkenbiegelehre* zurückführt. Hier soll dargelegt werden, wie diese Ableitung aus den exakten Beziehungen hervorgeht, um einen Einblick in den Näherungsgrad der Ableitung und in ihren Zusammenhang mit der exakten Theorie zu geben; denn erst dann erfüllt die angenäherte Ableitung ihren Zweck als Vorstufe für das Verständnis der umfassenderen exakten Ableitung. Darüber hinaus wird ein besserer Einblick in den räumlichen Spannungszustand einer Schale verschafft, als ihn die formale Ableitung der exakten Theorie zu geben vermag, ferner ergeben sich Aussagen über die Grenzen des Anwendungsbereiches der Näherungstheorie.

Abb. 1 zeigt den Meridianschnitt einer axensymmetrischen Schale, die durch Randkräfte ohne axiale Komponente und Momente mit den Beträgen  $T_0$ ,  $G_0$  pro Längeneinheit des Randes belastet ist. Wie in der exakten Theorie werde kleine Wandstärke  $2h$  vorausgesetzt. Die Verformung des Meridians sei gekennzeichnet durch den Biegewinkel  $\vartheta$ , die Durchbiegung  $u$  senkrecht zum Meridian und die Verschiebung  $v$  in Richtung der Meridiantangente. Die senkrecht zur Schalenaxe stehende Komponente  $w$  von  $u$  und  $v$  ist die Veränderung des Ringhalbmessers  $r$  infolge der Verformung:

$$w = -u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

Daher die spezifische Ringdehnung

$$\frac{w}{r} = -\frac{u}{R_2} + \frac{v}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha \quad (1)$$

mit  $R_2 = \frac{r}{\sin \alpha} = 2$ . Hauptkrümmungsradius. Ferner gilt

$$\vartheta = u' + \frac{v}{R_1} \quad (2)$$

(') = Ableitung nach der Meridianlänge  $x$ . Der zweite Teilbetrag von  $\vartheta$  lautet  $\vartheta_v = \frac{v}{R_1}$ , da  $\vartheta_v$  der Winkel ist, den der Krümmungshalbmesser  $R_1$  eines festgehaltenen Meridianpunktes bei dessen Verschiebung  $v$  beschreibt. Der erste Teilbetrag ist  $\vartheta_u = u'$  aus gleichen Gründen wie am geraden Balken.

Durch zwei benachbarte Meridianebenen werde nun ein Streifen aus der Schale herausgeschnitten (Abb. 2) und so belastet, dass er die gleiche Verformung erfährt wie im Verband der Schale. Um dies zu erreichen, wird man auch die Schnittflächen des Streifens belasten müssen mit Zugspannungen  $\sigma_2$ , deren Resultierende pro Längeneinheit der Schnittfläche die Schnittkraft

$T_2 = 2h \sigma_2$  ist, und mit Biegespannungen  $\sigma_{B2}$ , welche das resultierende Schnittmoment  $G_2 = \frac{2h^2}{3} \sigma_{B2}$  pro Längeneinheit ergeben ( $B$  = Biegung), aber nicht mit Schubspannungen wegen der Axensymmetrie. Es ist  $\sigma_2 = E \frac{w}{r}$  (Index 2 bedeutet Ringspannung), wenn die Quer-Kontraktion  $\nu \sigma_1$  einer vorläufig noch nicht bekannten, in Meridianrichtung wirkenden Zugspannung  $\sigma_1$  (Index 1 bedeutet Meridianspannung) vernachlässigt wird; denn es ist ja am Rande  $(T_1)_0 = (2h \sigma_1)_0 = \cos \alpha_0 T_0$  (Abb. 1), wo  $T_1$  die Resultierende von  $\sigma_1$  pro Längeneinheit des Schnittes bedeutet; es ist also  $\sigma_1$  an nicht zu flachen Rändern klein. Ferner sei angenommen, dass wie am Balken Dehnung klein gegen Durchbiegung ist, wodurch auch die zweiten Glieder in (1) und (2) vernachlässigbar sind. Man kann daher schreiben:

$$\sigma_2 = -E \frac{u}{R_2}, \quad (3)$$

$$\vartheta = u'. \quad (4)$$

Für die an den Schnittflächen des Streifens wirkenden Biegemomente mit dem Betrage  $G_2$  pro Längeneinheit der Schnittfläche lässt sich ebenfalls eine Beziehung zur Verformung angeben. Es besteht die Bedingung, dass die Schnittflächen des Streifens auch nach der Verformung in Meridianebenen liegen müssen, denn andernfalls würde der Zusammenhang des Streifens mit dem übrigen Kegelteil während der Verformung nicht gewahrt bleiben. Wie Abb. 2 zeigt, bilden die Seitenlinien eines Streifenquerschnittes den Winkel  $d\gamma$  miteinander. Dagegen bilden sie in einem Schnitt, der um den Biegewinkel  $\vartheta$  gegen den Querschnitt verdreht ist und mit diesem die Sehne der Mittellinie gemeinsam hat, den Winkel  $d\gamma'$ :

$$d\gamma' = \frac{R_2 d\gamma}{R_2'},$$

denn die Länge der Sehne ist in beiden Schnitten die gleiche:  $R_2 d\gamma = R_2' d\gamma'$ , und  $R_2$  ist der Krümmungshalbmesser der Mittellinie des Querschnitts,  $R_2'$  desgleichen des verdrehten Schnittes. An Hand von Abb. 1 findet man die geometrische Beziehung

$$\frac{R_2}{R_2'} = \cos \vartheta + \operatorname{ctg} \alpha \sin \vartheta.$$

Hier kann wegen der Kleinheit von  $\vartheta$ :  $\cos \vartheta = 1$ ,  $\sin \vartheta = \vartheta$  gesetzt werden. Somit

$$\frac{R_2}{R_2'} = 1 + \vartheta \operatorname{ctg} \alpha$$

und daraus die Krümmungsänderung des Querschnittes bei seiner Verdrehung

$$\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2} = \vartheta \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R_2}, \quad (5)$$

in Übereinstimmung mit der exakten Schalentheorie. Die Gleichung sagt aus, welche Krümmungsänderung ein Streifenquerschnitt bei einer Verbiegung  $\vartheta$  erfahren muss, damit der Zusammenhang zwischen Streifen und übrigen Teil der Schale während der Verformung gewahrt bleibt. Diese Krümmungsänderung muss durch die Ringbiegemomente  $G_2$  hervorgerufen werden. Da nun auch die exakte Schalentheorie lineares Anwachsen der Biegespannungen eines Querschnittes voraussetzt, kann der Streifen als Balken angesehen werden, der in zwei senkrecht zueinander stehenden Hauptrichtungen, der Längs- und Breiten-Richtung, gekrümmt ist und in diesen verbogen wird. Es lässt sich daher die Balkenbiegelehre anwenden, wobei man in ihrer Ableitung die Querkontraktion zu berücksichtigen hat.

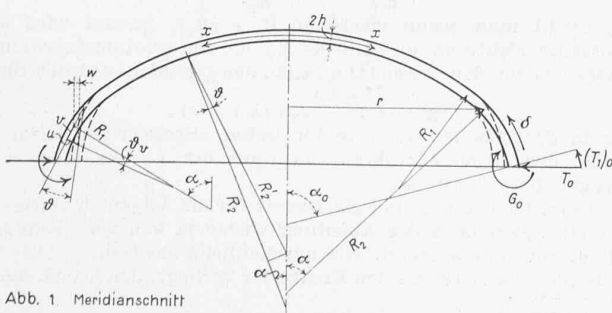


Abb. 1 Meridianschnitt

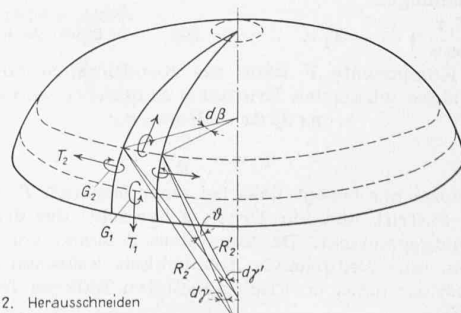


Abb. 2 Herausschneiden des Streifens

<sup>1)</sup> J. Geckeler, Forsch. Arb. Ing.-Wes. (1926), Heft 276.

<sup>2)</sup> E. Meissner, Stodola-Festschrift, S. 414, Zürich 1929.

<sup>3)</sup> E. Steuermann, Bauingenieur, Bd. 14 (1933), S. 285.

Bezeichnet  $G_1$  das Meridianbiegemoment (Abb. 2), d. h. die Resultierende der in Meridianrichtung wirkenden Biegespannungen  $\sigma_{B_1}$  pro Längeneinheit des Schnittes, so hat man

$$\frac{G_1 - r G_2}{J E} = \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} \quad (6a)$$

$$\frac{G_2 - r G_1}{J E} = \left( \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (6b)$$

mit dem Trägheitsmoment

$$J = \frac{2 h^3}{3},$$

ebenfalls pro Längeneinheit. Für die Folge sei konstante Wandstärke vorausgesetzt. Auch  $\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1}$ , die Meridiankrümmungsänderung infolge der Verbiegung, lässt sich durch  $\vartheta$  ausdrücken. Es besteht die Beziehung

$$\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} = \frac{d\vartheta}{dx} \quad (7a)$$

da  $\frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{dx}$  und  $\frac{1}{R_1'} = \frac{d\alpha + d\vartheta}{dx}$  gilt. Mit (2) erhält man die exakte Beziehung

$$\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} = \left( \frac{v}{R_1} \right)' + u'' \quad (7b)$$

Mit der angenäherten Gleichung (4) wird aus (7a):

$$\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} = u'' \quad (7c)$$

d. h. der Streifen erfährt angenähert die gleiche Krümmungsänderung wie ein gerader Balken. Bekanntlich lässt auch die Biegelehre schwach gekrümmter Balken diese Näherung zu. Die letzte Gleichung und (4), (5) in (6) eingeführt, ergibt

$$G_1 = \frac{2 E h^3}{3 (1 - \nu^2)} \left[ u'' + \frac{\nu}{R_2} u' \operatorname{ctg} \alpha \right] \quad (8a)$$

$$G_2 = \frac{2 E h^3}{3 (1 - \nu^2)} \left[ \frac{u'}{R_2} \operatorname{ctg} \alpha + \nu u'' \right] \quad (8b)$$

Da das zweite Glied in (8a) das Produkt der kleinen Größen  $\nu$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  enthält, wird es ebenfalls vernachlässigt. Die Gleichung wird also in der Form

$$G_1 = \frac{2 E h^3}{3 (1 - \nu^2)} u'' \quad (8c)$$

benutzt. Es ist bemerkenswert, dass nach dieser Vernachlässigung sich das Vorhandensein von  $G_2$  nur in dem Faktor  $1 - \nu^2$  auf  $G_1$  auswirkt. Wie man leicht feststellt, stellt (8c) die Biegung des geraden Balkens bei verbotener Querkontraktion dar.

Nachdem die bisherigen Betrachtungen zunächst zu den exakten Formänderungsbeziehungen geführt haben, an welchen dann planmässig Vernachlässigungen vorgenommen wurden, sollen die Vorstellungen der Balkenbiegelehre auch insofern beibehalten werden, als festgestellt wird, wie der Streifen abgestützt ist. Als seine Belastung werden die an seinen Schnittflächen wirkenden Biegemomente  $G_2$  und die Randbelastung  $G_0$ ,  $T_0$  angesehen. Man kann dann die an den Schnittflächen wirkenden Kräfte  $T_2$  als Auflagerkräfte auffassen aus folgender Überlegung heraus:

Aus dem Schnitt senkrecht zur Schalenaxe in Abb. 3 geht hervor, dass die Schnittkräfte  $T_2$  eine in die mittlere Meridian-Ebene des Streifens fallende Komponente

$$H = T_2 d\beta$$

haben. Diese Komponente werde pro Länge  $dx$  in die Komponenten  $W$  in Meridianrichtung und  $V$  senkrecht dazu zerlegt. Es ist

$$W = H dx \cos \alpha, \quad V = H dx \sin \alpha.$$

Da  $W$  einen Zuwachs zur Zugkraft  $T_1 r d\beta$  im Streifenquerschnitt liefert, hat man

$$-d\beta d(T_1 r) = W$$

und nach Einführen der vorangehenden Beziehungen

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{T_1 r}{\cos \alpha} \right) = -T_2 \quad (9)$$

Die Komponente  $V$  kann als Resultierende eines auf die Streifenfläche wirkenden Druckes  $p$  aufgefasst werden. Es wird

$$p r d\beta dx = H \sin \alpha dx$$

$$p = -\frac{T_2}{R_2} \quad (10)$$

Das Minuszeichen besagt, dass bei einer Zugkraft  $T_2$  eine Druckkraft  $T_1$  auftritt und ein Druck  $p$  herrscht, der der Durchbiegung  $u$  entgegenwirkt. Da ausserdem  $p$  linear von  $u$  abhängt, kann man eine weitgehende Ähnlichkeit zwischen  $p$  und dem Bettungsdruck eines elastisch gebetteten Balkens feststellen<sup>3)</sup>;

<sup>3)</sup> E. Steuermann, I. c.

ferner stimmt (8c) bis auf den Faktor  $1 - \nu^2$  mit der entsprechenden Gleichung am elastisch gebetteten Balken überein.

Vernachlässigt man noch die Veränderlichkeit der Streifenbreite  $b = r d\beta = R_2 \sin \alpha d\beta$  (Abb. 3), indem man  $b = (R_2)_0 \sin \alpha_0 d\beta$  setzt, wo Index 0 Randwerte kennzeichnet, so lässt sich daher die elementare Biegelehre des elastisch gebetteten Balkens anwenden. Sie liefert die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{dN}{dx} = -p \quad (11a)$$

$$\frac{dG_1}{dx} = N \quad (11b)$$

mit  $N$  = Resultierende der Schubspannungen  $\tau$  pro Längeneinheit eines Streifenquerschnittes ( $N = \tau 2h$ ). Diese Bedingungen ergeben

$$\frac{d^2 G_1}{dx^2} = -p.$$

Mit (8c), (10), (3) erhält man

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = -3 \frac{1 - \nu^2}{(R_2)_0^2 h^2} u,$$

welche Differentialgleichung sich unter der Voraussetzung konstanter Wandstärke nur in dem konstanten Faktor von der des elastisch gebetteten Balkens unterscheidet. Ihre Lösung lautet

$$u = A_1 e^{-kx} \cos(kx + \varepsilon_1) + A_2 e^{kx} \cos(kx + \varepsilon_2) \quad (12a)$$

$$\text{mit } k = \sqrt[4]{\frac{3}{4} (1 - \nu^2)} \frac{1}{\sqrt{(R_2)_0 h}}$$

Die Lösung stimmt überein mit jener, die in der Näherungstheorie durch Vernachlässigung von Gliedern in den exakten Differentialgleichungen der Schalentheorie erhalten wird. Ausserdem erhält man die Lösung auch aus der exakten Kegeltheorie durch Grenzübergang auf spitze Kegel<sup>4)</sup>, ferner stimmt diese Lösung für  $\alpha = 90^\circ$  mit der exakten Zylindertheorie überein, was als ein Beweis für die Exaktheit der Ableitung gelten darf und endlich ist auch die asymptotische Lösung der Ringschale in erster Näherung mit (12) identisch, wie man folgendermassen zeigen kann:

Nach Meissner I. c. lautet die asymptotische Lösung für die Ringschale

$$N = \frac{A}{R_2 \sqrt{\left( \frac{a}{R_1} + \sin \alpha \right) \sin \alpha}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \omega} \cos \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \omega + \varepsilon \right).$$

Mit  $A$ ,  $\varepsilon$  = Integrationskonstanten,  $a$  = Abstand des Mittelpunktes des Meridiankreises von der Rotationsaxe,

$$\lambda^2 = 3 (1 - \nu^2) \frac{R_1^2}{h^2} - \nu^2 \approx 3 (1 - \nu^2) \frac{R_1^2}{h^2} \quad \text{und} \quad \omega = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} d\alpha.$$

Hier den Integranden in eine Taylor-Reihe nach dem vom Rande aus gemessenen Winkel  $\alpha_0 - \alpha = \psi$  entwickelt, ergibt in erster Näherung das Integral

$$\omega = \sqrt{\frac{R_1}{(R_2)_0}} \psi.$$

$$\text{Hiermit } \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \omega = \sqrt{\frac{3}{4} (1 - \nu^2)} \frac{R_1 \psi}{\sqrt{(R_2)_0 h}}.$$

Führt man hier den Ausdruck (12a) für  $k$  ein und  $\delta = R_1 \psi =$  vom Rande aus gezählte Meridianlänge, so erhält man

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \omega = k \delta.$$

Für die erste Näherung können auch in dem ersten Faktor der asymptotischen Lösung die Randwerte  $(R_2)_0$ ,  $\sin \alpha_0$  eingeführt und dieser Faktor in die Integrationskonstante einbezogen werden. Dann lautet die asymptotische Lösung in erster Näherung

$$N = A e^{-k\delta} \cos(k\delta + \varepsilon).$$

Da nach (11a), (10), (3) und wegen  $T_2 = 2h \sigma_2$ :

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{2hE}{R_2^2} u$$

ist, erhält man, wenn wiederum  $R_2 = (R_2)_0$  gesetzt wird und konstante Faktoren und Glieder in die Integrationskonstanten einbezogen werden, durch Integration den gleichen Ausdruck für  $u$ :

$$u = A e^{-k\delta} \cos(k\delta + \varepsilon),$$

der in der Tat mit dem weiter unten angegebenen Ausdruck (12b), der durch Einführen von  $\delta$  aus der Lösung (12a) hervorgeht, übereinstimmt.

Diese Identitäten sind ein Beweis für die Allgemeingültigkeit von (12). Bereits in der Ableitung wurde ja keine spezielle Meridianform vorausgesetzt. Die anschauliche Erklärung, (12) bedeute nichts anderes als den Ersatz der vorliegenden Schale durch

<sup>4)</sup> Meissner, I. c.

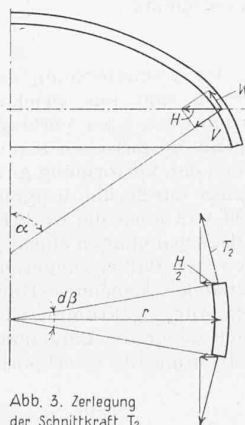


Abb. 3. Zerlegung der Schnittkraft  $T_2$

die ihren Rand tangierende Kegelschale, erweist sich nun als zu speziell.

Der erste Teil der Lösung klingt mit zunehmendem, der zweite mit abnehmendem  $x$  ab. Da der Spannungszustand vom Rande aus nur abklingen kann, gilt bekanntlich der erste Teil der Lösung an dem Rande, von dem aus  $x$  wächst, und der zweite Teil am anderen Rande, von welchem aus  $x$  abnimmt<sup>5)</sup>. Die Integrationskonstanten  $A$ ,  $\varepsilon$  bestimmen sich aus den Randlasten  $G_0$ ,  $T_0$ . Meist liegen die beiden Ränder so weit auseinander, und ist die Grösse  $k$  so gross, dass sich die von jedem Rande aus abklingenden Spannungen nicht überlagern. Man kann daher in diesen Fällen den Spannungszustand jedes Randes für sich ermitteln ohne Rücksicht auf die Bedingungen am anderen Rande. Es ist hierfür zweckmässig, die von jedem Rande aus positiv gezählte Meridianlänge  $\delta = x_0 - x$ , bzw.  $\delta = x - x_0$  einzuführen (Abb. 1). Man hat dann

$$u = A e^{-k\delta} \cos(k\delta + \varepsilon) \quad (12b)$$

für jeden Rand.

Um Übereinstimmung mit früheren Ableitungen zu erhalten, setzen wir die neuen Konstanten  $C = AE$ ,  $\psi = \varepsilon + \frac{\pi}{4}$  ein:

$$u = \frac{C}{E} e^{-k\delta} \cos\left(k\delta + \psi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (12c)$$

welche Beziehung in (3), (8b, c), (9), (10), (11a) eingeführt die bekannten Bestimmungsformeln für den Spannungszustand ergibt, die hier nicht wiederholt werden sollen.

Hiermit ist die Ableitung erreicht. Nun sollen die einzelnen Vernachlässigungen abgeschätzt werden, welche in (3), (4), (7c), (8c) zugelassen worden sind, ferner auch die Vernachlässigung der Veränderlichkeit der Streifenbreite. Jene Vernachlässigungen sind gestattet, wenn folgende Bedingungen für die Absolutwerte erfüllt sind:

$$v\sigma_1 << \sigma_2 \quad (13a)$$

$$v\operatorname{ctg}\alpha << u \quad (13b)$$

$$\frac{v}{R_1} << u' \quad (13c)$$

$$\left(\frac{v}{R_1}\right)' << u'' \quad (13d)$$

$$\frac{v}{R_2} u' \operatorname{ctg}\alpha << u'' \quad (13e)$$

Da (1) die spezifische Ringdehnung darstellt, hat man die Beziehung

$$\frac{1}{2h} (T_2 - vT_1) = -\left(\frac{u}{R_2} - \frac{v}{R_2} \operatorname{ctg}\alpha\right) E,$$

mit welcher sich  $v$  an Hand von (3), (9) aus  $u$  errechnen lässt. Man erhält

$$v = -\frac{v}{R_2} \int_0^x u \, dx.$$

Um zu einer ersten Aussage über Genauigkeitsgrad und Anwendbarkeit der Näherungstheorie zu gelangen, werden in (13) für  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha$  wieder die Randwerte eingeführt. Für die Funktion  $u$ , deren Abgeleitete und Integrale, werden die jeweilig auftretenden Maximalwerte eingesetzt. Um sie zu bestimmen, ist die Konstante  $\psi$  festzulegen. Es sind nur die Werte  $\psi = \frac{\pi}{4}$  und  $\psi = \frac{\pi}{2}$  von Interesse. Denn  $\psi = \frac{\pi}{4}$  entspricht dem Fall, dass nur eine Randkraft  $T_0$ , aber kein Randmoment wirkt, und  $\psi = \frac{\pi}{2}$  dem entgegengesetzten Fall; aus diesen beiden Fällen kann jeder Belastungsfall zusammengesetzt werden<sup>6)</sup>. Sieht man die schärfsten Bedingungen, die man für  $\psi = \frac{\pi}{4}$  und  $\psi = \frac{\pi}{2}$  erhält, aus, so ergibt sich mit  $v = 0,3$

$$\frac{h}{R_1} = \varrho 1,77 \quad (14a)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_0 = \varrho 1,95 \sqrt{\frac{(R_2)_0}{h}} \quad (14b)$$

Statt des Ungleichheitszeichens ist hier der Faktor  $\varrho$  eingeführt. 100  $\varrho$  bedeuten die zulässigen Fehlerprozent. (14a) ergab sich aus (13d), (14b) aus (13e) für  $\psi = \frac{\pi}{4}$ . Alle übrigen Bedingungen (14), ebenso alle für  $\psi = \frac{\pi}{2}$  sind in diesen beiden enthalten. Schliesslich ist noch der Einfluss der Veränderlichkeit der Streifenbreite abzuschätzen. Das kann in der Weise geschehen,

<sup>5)</sup> Dieses eigentümliche oszillierende Abklingen findet demnach seine Erklärung darin, dass sich der betrachtete Streifen wie ein elastisch gebetteter Balken verhält.

<sup>6)</sup> F. Schultze-Grünow, Ing.-Arch., Bd. IV (1933), S. 545.

dass man die angegebene Ableitung ohne diese Vernachlässigung durchführt, so zu einer genaueren Differentialgleichung gelangt und den Unterschied zwischen ihrer Lösung und (12) feststellt. Die genauere Differentialgleichung ist nur für spezielle Meridianformen lösbar. Von besonderem Interesse sind der gerade und der kreisförmige Meridian, da sie in der beanspruchten Randzone gute Annäherungen an die wirkliche Meridianform darstellen. Anstatt die bezüglichen Lösungen herzuleiten, kann auch der Unterschied zwischen (12) und den asymptotischen Lösungen der exakten Theorie für Kegel- und Ringschale festgestellt werden. Der Vergleich mit der Kegelschale ist am einfachsten durchführbar:

Der exakten Kegeltheorie<sup>7)</sup> entnimmt man die asymptotische, d. h. die für  $X \geq 20$  gültige Lösung  $N R_2 = C_3 J_3 + C_4 J_4$  mit

$$J_3 = J_4 = \pi \sqrt{\frac{2}{X}} \left[ \frac{\cos(\sqrt{2X} - \frac{7}{8}\pi)}{\pi \sqrt{2X}} + \frac{4 - \frac{1}{4}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2X}} \frac{\cos(\sqrt{2X} - \frac{5}{8}\pi)}{\sin(\sqrt{2X} - \frac{5}{8}\pi)} + \dots \right] e^{-\sqrt{2X}}$$

$$X = x \sqrt{3(1 - \nu^2)} \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{h}$$

und  $x$  = von der Kegelspitze aus gezählte Meridianlänge. Durch Vernachlässigung der zweiten Glieder der Lösung und mit den angenäherten Ausdrücken

$$\sqrt{x} = \sqrt{x_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\sqrt{x_0}}$$

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x_0}$$

( $x_0$  = Meridianlänge bis Rand) geht diese Lösung über in die Form (12b), worauf bereits hingewiesen wurde. Die Vernachlässigung der zweiten Glieder von  $J_3$ ,  $J_4$  setzt

$$1 >> \frac{4 - \frac{1}{4}}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2X}}$$

oder, wenn der Ausdruck für  $X$ , ferner für die erste Abschätzung  $x = x_0 = (R_2)_0 \operatorname{tg}\alpha_0$  eingeführt wird,

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha_0 << 1,8 \frac{(R_2)_0}{h}$$

voraus. Die Bedingung ist etwas schwächer als (14b), sagt im Uebrigen aber das Gleiche aus.

Die beiden angenäherten Ausdrücke sind berechtigt, wenn

$$\frac{1}{2} \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} >> \frac{1}{8} \frac{\delta^2}{x_0 \sqrt{x_0}}$$

oder umgeformt

$$4x_0 >> \delta_0$$

ist, wo  $\delta_0$  die Breite der beanspruchten Randzone bedeuten soll. Da aus (12) hervorgeht, dass zwei Werte von  $u$ , die den Abstand  $\Delta\delta = \frac{\pi}{k}$  voneinander haben, sich wie  $\frac{1}{e^\pi} = \frac{1}{23,14} = 0,043$  verhalten, die zweite Amplitude also nur 4,3% der ersten beträgt, kann

$$\delta_0 = \frac{\pi}{k} = 3,5 \sqrt{(R_2)_0 h}$$

gesetzt werden. In die letzte Bedingung eingeführt, hat man

$$\operatorname{ctg}\alpha_0 = \varrho \cdot 1,1 \sqrt{\frac{(R_2)_0}{h}} \quad (15)$$

wenn für  $R_2$  wieder der Randwert eingeführt wird. Es ist wieder die selbe Bedingung, nur noch etwas schärfer.

Eine Aussage über den Einfluss der Meridiankrümmung auf die Veränderlichkeit der Streifenbreite erhält man, wenn für die oben erwähnte asymptotische Lösung der Ringschale die Bedingung festgestellt wird, unter welcher das zweite Glied in der

Reihenentwicklung von  $\int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} d\varphi$  vernachlässigt werden konnte. Die geometrische Beziehung (s. Meissner, l. c.) zwischen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a$ ,  $\alpha$  lautet, wenn  $\frac{a}{R_1} = \mu$  gesetzt wird,

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha}{\mu + \sin\alpha}}$$

für den Fall  $R_1 < R_2$ , auf den sich die asymptotische Lösung beschränkt. Die ersten beiden Glieder der Taylor-Entwicklung nach dem Winkel  $\psi = \alpha_0 - \alpha$  lauten

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} d\varphi = \sqrt{\frac{s}{\mu + s}} \left[ 1 - \frac{\mu c}{4s(\mu + s)} \psi \right] \psi$$

mit  $s = \sin\alpha_0$ ,  $c = \cos\alpha_0$ . Es muss sonach

$$\frac{\mu c \psi}{4s(\mu + s)} << 1$$

<sup>7)</sup> F. Dubois: Die Festigkeit der Kegelschale. Diss. Zürich 1917, S. 28 ff.



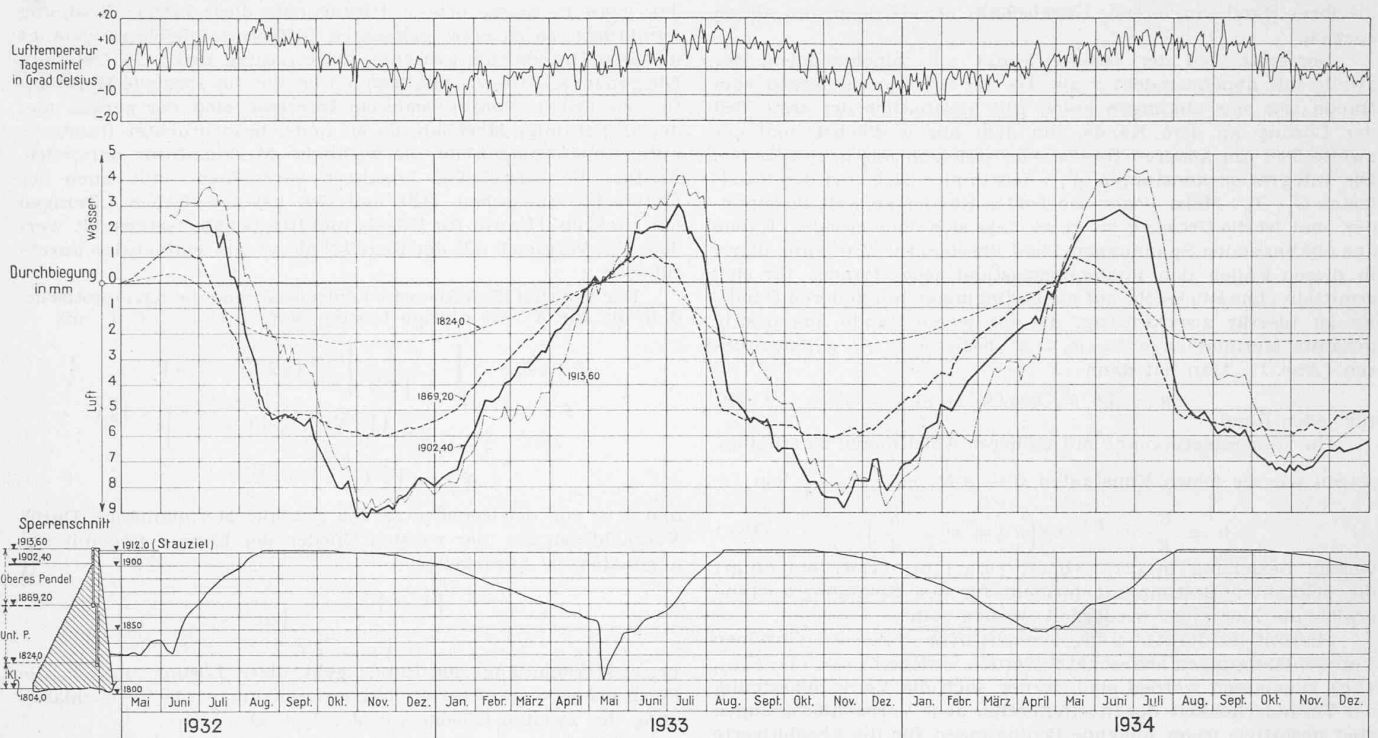


Abb. 13. Scheiteldurchbiegung, mittlere Lufttemperatur und Seestand 1932 bis 1934. Die Deformationen werden auf die Fundamentkote 1804 bezogen.

sein. Für  $\psi$  wird der Wert  $\psi_0$ , welcher der Breite  $\delta_0$  der beanspruchten Randzone entspricht, eingeführt. Es ist  $\psi_0 = \frac{\delta_0}{R_1}$ . Mit dem oben gefundenen Wert  $\delta_0 = 3,5 \sqrt{(R_2)_0 h}$  und durch Einführen von  $\rho$  wird

$$\frac{a}{R_1} \sqrt{\frac{(R_2)_0 h}{R_1}} \operatorname{ctg} \alpha_0 = 1,1 \rho \left( \frac{a}{R_1} \sin \alpha_0 \right).$$

Da nach der oben angegebenen geometrischen Beziehung

$$\frac{a}{R_1} = \left( \frac{(R_2)_0}{R_1} - 1 \right) \sin \alpha_0$$

ist, ergibt sich

$$\left( 1 - \frac{R_1}{(R_2)_0} \right) \sqrt{\frac{(R_2)_0 h}{R_1}} \operatorname{ctg} \alpha_0 = 1,1 \rho \quad (16)$$

Für vorgegebene Verhältnisse  $\left( \frac{R_2}{h} \right)_0$ ,  $\left( \frac{R_2}{R_1} \right)_0$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha_0$  geben somit die Bedingungen (14a), (15), (16) ein Bild von der Grössenordnung der in der angenäherten Ableitung vernachlässigten Glieder und damit auch eine erste Abschätzung von der Genauigkeit der näherungsweise Berechnung in 100  $\rho$  Prozents. Z. B.

sei  $\left( \frac{R_2}{h} \right)_0 = 100$ ,  $\left( \frac{R_2}{R_1} \right)_0 = 2$ ,  $\alpha_0 = 70^\circ$  gegeben.

Es ergibt sich aus (14a)  $100 \rho = 1 \text{ ‰}$ ,

aus (15)

$$100 \rho = 3,3 \text{ ‰},$$

aus (16)

$$100 \rho = 3,3 \text{ ‰},$$

d.h. eine Ungenauigkeit der Rechnung von 3,3 ‰.

Der Vollständigkeit halber sei die zweite Möglichkeit einer Abschätzung noch erwähnt, die darin besteht, dass man die Lösung (12) in die von Bauersfeld-Geckeler vernachlässigten Glieder der exakten Differentialgleichungen der Schalentheorie einführt und dann ihre Grössenordnung feststellt.

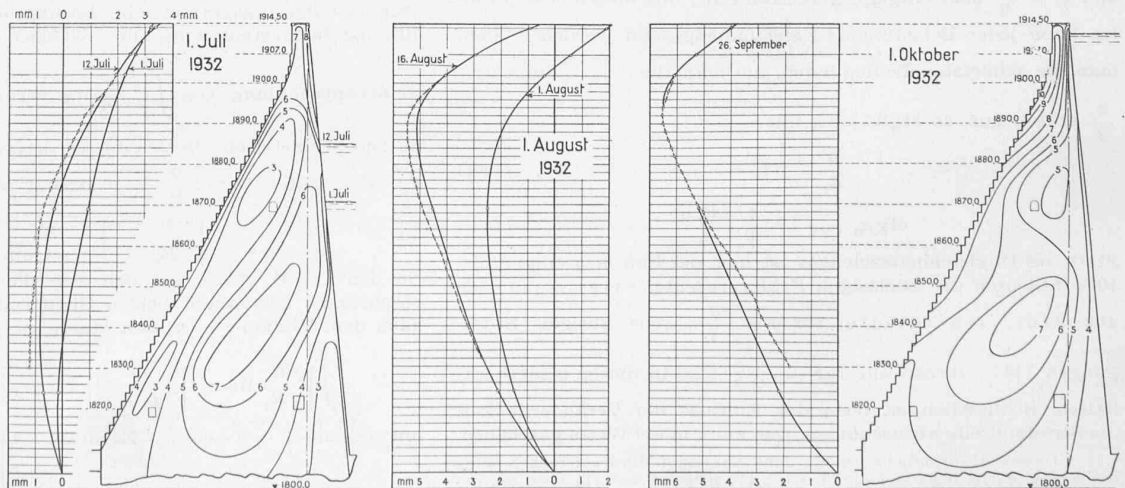


Abb. 15. Scheiteldurchbiegung (voll: Pendel, gestrichelt: Klinometerstab) und Mauertemperaturen 1932.

## Die Spitalammsperre der Kraftwerke Oberhasli.

Von H. JUILLARD, beratender Ingenieur, Bern. (Schluss von S. 258.)

### f) Temperaturmessungen.

Die Thermometeranlage der Spitalammsperre sollte in erster Linie über die Temperatur des Betons während der Bauperiode Auskunft geben. Auf Grund von bei andern Sperrenbauten, namentlich bei der Arrowrock-Sperre U.S.A. (1915) gemachten Beobachtungen war die grosse Bedeutung der Erhöhung der Betontemperatur zufolge des Abbindens des Zementes bekannt. Bei der Spitalammsperre bot die genaue Verfolgung der thermischen Vorgänge nicht nur, wie bei andern Mauern, wissenschaftliches Interesse, sondern sie war eine Notwendigkeit, um die Ausfüllung der Baufugen zum zweckmässigsten Zeitpunkt vornehmen zu können.

Die 63 installierten Thermometer sind in einem Sektor von 30 m Breite zwischen dem Sperrnscheitel und der Baufuge 2a (Abb. 1) gleichmässig verteilt. Für die Projektierung dieser Anlage liessen sich die KWO durch Prof. P. Joye in Freiburg beraten, der die Montage und die Inbetriebsetzung der einzelnen Thermometer, sowie die notwendigen Revisionen direkt durch seinen Spezialisten besorgen liess.

Während der Bauzeit sind zwei Daten besonders interessant. Einerseits die maximal erreichte Betontemperatur und andererseits die bis zum Fugenschluss erzielte Abkühlung. Die höchsten