Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 107/108 (1936)
Heft: 11

Artikel: Der Dreimomentensatz der durchlaufenden kreissymmetrischen Platte
Autor: Marcus, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48266

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Der Dreimomentensatz der durchlaufenden kreissymmetrischen Platte. — Die Aufwendungen der Schweiz. Bundesbahnen für ihre Anlagen und Ausrüstung. — Ueber das Färbverfahren im Dienste von Tiefbau, Wasserwirtschaft und Quellforschung. — Die Seidentrocknungsanstalt Zürich. — Mitteilungen: Baumaschinen für die deutschen Reichsautobahnen. Bemerkenswerter Schiffstransport. Grosse Verkehrsbauten in Stockholm. Gebläseanlage des Windkanals von Chalais-Meudon. Arbeitsbeschaffung im Hochbau. Gesellschaft zur Förderung des Instituts für techn. Physik an der E. T. H. «Grafa International». Exposition Internationale des Arts dans la Vie moderne, Paris 1937. Kanaltunnel Calais-Dover. — Wettbewerbe: Neubauten der burgerlichen Waisenhäuser in Bern. — Nekrologe: Rob. Gsell-Heldt. Emil Bader. Rob. Forter. — Literatur.

Band 107 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 11

Der Dreimomentensatz der durchlaufenden kreissymmetrischen Platte.

Von Dr. Ing. H. MARCUS, Paris.

Die zur Abdeckung von kreisförmigen Behältern dienenden Platten mit mehrfacher Stützung werden meistens als durchlaufende Balken berechnet. Dieses einfache Näherungsverfahren kann allenfalls für eine Abschätzung der radialen Biegungsspannungen ausreichen, gibt aber überhaupt keinen Aufschluss über die tangentialen Beanspruchungen. Eine genaue und trotzdem nicht umständliche Behandlung der durchlaufenden Platte mit mehreren Stützkreisen ist auf Grund der Elastizitätstheorie mit Hilfe eines dem *Clapeyron'schen Theorem* ähnlichen *Dreimomentensatzes* möglich. Eine kurze Darstellung der Ableitung und Anwendung dieses Satzes ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

*

Die Gleichung der elastischen Fläche einer Platte mit kreissymmetrischer Gestalt und kreissymmetrischer Belastung lautet bekanntlich:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right)=\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p}{\frac{E\,h^3}{12}}=\frac{p}{N} \quad . \quad (1)$$

Hierin bedeuten:

- r den Abstand eines Punktes der Mittelfläche vom Mittelpunkt der Platte,
- p seine zur Plattenoberfläche senkrechte Belastung,
- ζ seine Durchbiegung,
- h die Stärke der Platte,
- E die Elastizitätszahl des Baustoffes,
- m die Poisson'sche Querdehnungszahl,
- $N=\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{E\,h^3}{12}$ die Plattensteifigkeit.

Ich behandle zunächst den mit p gleichförmig belasteten, am Innenrande $r=r_i$ sowie am Aussenrande $r=r_a$ gestützten Kreisring (Abb. 1) und wähle als partikuläre Lösung der vorstehenden Differentialgleichung den Ansatz

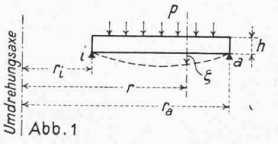

Abb. 1

$$\zeta_1=\frac{p}{64\,N}\,(r^2-r_i^2)\,(r^2-r_a^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Er erfüllt von vornherein die Bedingung $\zeta_1=0$ für $r=r_i$ und $r=r_a$.

Die radialen Spannungsmomente

$$s_r=-N\left(\frac{d^2\zeta_1}{dr^2}+\frac{1}{m}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\zeta_1}{dr}\right)=$$

$$=\frac{p}{32}\left[\frac{m+1}{m}\,(r_a^2+r_i^2)-2\,r^2\,\frac{3\,m+1}{m}\right] \quad (3)$$

verschwinden jedoch weder am Rande $r=r_i$ noch am Rande $r=r_a$.

Sollen die Ränder frei von Normalspannungen sein, so müssen an den Rändern Kräfte und Kräftepaare, die diesen Spannungsmomenten entgegenwirken, angebracht werden.

Um den Einfluss der Randbelastung zu beschreiben, benutze ich einen Ansatz in der Form

$$\zeta_2=\frac{C_i}{N}\left[K_1\,\varphi\,(r)+K_2\,\psi\,(r)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Funktionen

$$\left.\begin{aligned}\varphi\,(r)&=(r^2-r_i^2)\ln\frac{r_a}{r},\\ \psi\,(r)&=(r^2-r_a^2)\ln\frac{r_i}{r}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

stellen Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right)=0$$

dar. K_1 und K_2 sind vorerst unbestimmte Beizahlen, während C_i eine Integrationskonstante bedeutet. Es ist leicht zu erkennen, dass $\varphi\,(r_i)=\varphi\,(r_a)=0$ und ebenso $\psi\,(r_i)=\psi\,(r_a)=0$ ist, dass also auch ζ_2 an den Stellen $r=r_i$ und $r=r_a$ verschwindet.

Am Rande $r=r_i$ ist ferner

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_i}&=\varphi_i'=\quad 2\ln\frac{r_a}{r_i}\\ \left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)_{r=r_i}&=\psi_i'=\quad\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2-1\\ \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r=r_i}&=\varphi_i''=\quad 2\ln\frac{r_a}{r_i}-4\\ \left(\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)_{r=r_i}&=\psi_i''=-\left(3+\frac{r_a^2}{r_i^2}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Ebenso ergibt sich für $r=r_a$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}&=\varphi_a'=\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2-1\\ \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}&=\psi_a'=2\ln\frac{r_i}{r_a}\\ \frac{d^2\varphi}{dr^2}&=\varphi_a''=-\left(3+\frac{r_i^2}{r_a^2}\right)\\ \frac{d^2\psi}{dr^2}&=\psi_a''=2\ln\frac{r_i}{r_a}-4\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

Die entsprechenden radialen Spannungsmomente sind für $r=r_i$

$$s_i=-N\left(\frac{d^2\zeta_2}{dr^2}+\frac{1}{m}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\zeta_2}{dr}\right)_{r=r_i}=$$

$$-C_i\left[K_1\left(\varphi_i''+\frac{1}{m}\varphi_i'\right)+K_2\left(\psi_i''+\frac{1}{m}\psi_i'\right)\right],$$

für $r=r_a$

$$s_a=-N\left(\frac{d^2\zeta_2}{dr^2}+\frac{1}{m}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\zeta_2}{dr}\right)_{r=r_a}=$$

$$-C_i\left[K_1\left(\varphi_a''+\frac{1}{m}\varphi_a'\right)+K_2\left(\psi_a''+\frac{1}{m}\psi_a'\right)\right].$$

Ich verlange nunmehr, dass am Rande $r=r_a$ s_a verschwindet, am Rande $r=r_i$ hingegen $s_i=C_i$ sein soll und setze daher:

$$K_1\left(\varphi_a''+\frac{1}{m}\varphi_a'\right)+K_2\left(\psi_a''+\frac{1}{m}\psi_a'\right)=\quad 0$$

$$K_1\left(\varphi_i''+\frac{1}{m}\varphi_i'\right)+K_2\left(\psi_i''+\frac{1}{m}\psi_i'\right)=-1.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich K_1 und K_2 bestimmen. Für den Sonderfall $m=\infty$ erhält man die einfachen Formeln

$$K_1=\frac{\psi_a''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''},\quad K_2=\frac{-\varphi_a''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''} \quad . \quad (7)$$

In gleicher Weise bilde ich jetzt den Ansatz

$$\zeta_3=\frac{C_a}{N}\,[\lambda_1\,\varphi\,(r)+\lambda_2\,\psi\,(r)], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ermittle die zugehörigen Spannungsmomente

$$s_i=-C_a\left[\lambda_1\left(\varphi_i''+\frac{1}{m}\varphi_i'\right)+\lambda_2\left(\psi_i''+\frac{1}{m}\psi_i'\right)\right],$$

$$s_a=-C_a\left[\lambda_1\left(\varphi_a''+\frac{1}{m}\varphi_a'\right)+\lambda_2\left(\psi_a''+\frac{1}{m}\psi_a'\right)\right],$$

stelle die Bedingungen $s_i=0$, $s_a=C_a$ und finde für $m=\infty$ die Werte

$$\lambda_1=-\frac{\psi_i''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''},\quad \lambda_2=\frac{\varphi_i''}{\varphi_a''\,\psi_i''-\varphi_i''\,\psi_a''} \quad . \quad (9)$$

Ich wähle schliesslich für den freiaufliegenden Ring die allgemeine Lösung

$$\zeta_0=\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die entsprechenden Randmomente sind

für $r = r_i$:

$$s_i = \frac{p}{32}\left[\frac{m+1}{m}(r_a^2 + r_i^2) - 2\,r_i^2\,\frac{3m+1}{m}\right] + C_i,$$

für $r = r_a$:

$$s_a = \frac{p}{32}\left[\frac{m+1}{m}(r_a^2 + r_i^2) - 2\,r_a^2\,\frac{3m+1}{m}\right] + C_a.$$

Wenn $s_i = s_a = 0$ sein soll, so gelten für die Randkräftepaare C_i, C_a die Formeln

$$\left.\begin{aligned} C_i &= -\frac{p}{32}\left[\frac{m+1}{m}(r_a^2 + r_i^2) - 2\,r_i^2\,\frac{3m+1}{m}\right] \\ C_2 &= -\frac{p}{32}\left[\frac{m+1}{m}(r_a^2 + r_i^2) - 2\,r_a^2\,\frac{3m+1}{m}\right] \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Sie liefern für den Grenzfall $m = \infty$ die Werte

$$C_i = \frac{p}{32}(5\,r_i^2 - r_a^2) \qquad C_a = \frac{p}{32}(5\,r_a^2 - r_i^2)\ . \quad (12)$$

Hiermit sind alle für die ζ_0-Fläche massgebenden Grössen K, λ, C_i, C_a bestimmt. Zur Kennzeichnung der Formänderungen im Randgebiete füge ich noch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\zeta_0}{dr}\right)_{r=r_i} &= \tau_i = \frac{r_i}{N}\left[\frac{p}{32}(r_i^2 - r_a^2) + \right. \\ &\qquad \left. C_i(K_1\,\varphi_i' + K_2\,\psi_i') + C_a\,(\lambda_1\,\varphi_i' + \lambda_2\,\psi_i')\right] \\ \left(\frac{d\zeta_0}{dr}\right)_{r=r_a} &= \tau_a = \frac{r_a}{N}\left[\frac{p}{32}(r_a^2 - r_i^2) + \right. \\ &\qquad \left. C_i(K_1\,\varphi_a' + K_2\,\psi_a') + C_a\,(\lambda_1\,\varphi_a' + \lambda_2\,\psi_a')\right] \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} -N\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right)_{r=r_i} &= s_{ti} = \frac{p}{32}(r_i^2 - r_a^2) + \\ &\qquad C_i(K_1\,\varphi_i' + K_2\,\psi_i') + C_a(\lambda_1\,\varphi_i' + \lambda_2\,\psi_i'), \\ -N\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta_0}{dr}\right)_{r=r_a} &= s_{ta} = \frac{p}{32}(r_a^2 - r_i^2) + \\ &\qquad C_i(K_1\,\varphi_a' + K_2\,\psi_a') + C_a(\lambda_1\,\varphi_a' + \lambda_2\,\psi_a'). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

hinzu. Sie zeigen, dass die tangentialen Spannungsmomente s_t im Gegensatz zu den radialen Kräftepaaren s_r an den Rändern nicht verschwinden und den Neigungswinkeln τ_i, τ_a verhältnisgleich sind.

*

Wir können jetzt einen Schritt weiter gehen und den Spannungszustand einer von mehreren konzentrischen Auflagerkreisen gestützten Platte untersuchen (Abb. 2).

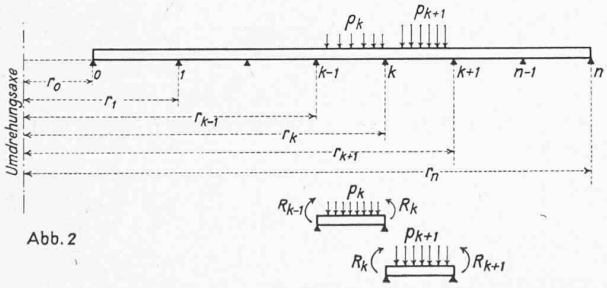

Abb. 2

Betrachten wir zuerst den von den Kreisen $r_i = r_{k-1}$ und $r_a = r_k$ begrenzten, mit p_k gleichförmig belasteten Streifen, den wir als k^{tes} Feld bezeichnen wollen. Denken wir uns die längs der Auflagerkreise wirkenden radialen Spannungsmomente beseitigt, so verwandelt sich dieses Feld in einen ringsum freiaufliegenden Ring, dessen elastische Fläche im Sinne der Gleichungen 2, 4, 8 und 10 durch den Ansatz

$$\zeta_{0,k} = \frac{p_k}{64\,N}(r^2 - r_{k-1}^2)\,(r^2 - r_k^2) + \frac{C'_{k-1}}{N}\,[K_1\,\varphi(r)_k + K_2\,\psi(r)_k] + \frac{C_k''}{N}\,[\lambda_1\,\varphi(r)_k + \lambda_2\,\psi(r)_k]\ . \quad (15)$$

dargestellt werden kann. Hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} \varphi(r)_k &= (r^2 - r_{k-1}^2)\,ln\,\frac{r_k}{r}, \quad \psi(r)_k = (r^2 - r_k^2)\,ln\,\frac{r_{k-1}}{r} \\ C'_{k-1} &= \frac{p_k}{32}(5\,r_{k-1}^2 - r_k^2), \quad C_k'' = \frac{p_k}{32}(5\,r_k^2 - r_{k-1}^2) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Um den Zusammenhang mit den benachbarten Feldern wiederherzustellen, bringen wir längs des Auflagerkreises $r = r_{k-1}$ Kräftepaare R_{k-1} und ebenso längs des Kreises $r = r_k$ Kräftepaare R_k an. Sie erzeugen die zusätzliche Durchbiegung

$$\zeta_k' = \frac{R_{k-1}}{N}\,[K_1\,\varphi(r)_k + K_2\,\psi(r)_k] + \frac{R_k}{N}\,[\lambda_1\,\varphi(r)_k + \lambda_2\,\psi(r)_k] \quad (17)$$

Die wirkliche, endgültige Gestalt der elastischen Fläche ist durch den Ansatz $\zeta_k = \zeta_{0,k} + \zeta_k'$ beschrieben. Ihre Neigung an der Stelle $r = r_{k-1}$ ist

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\zeta_k}{dr}\right)_{r=r_{k-1}} &= \frac{r_{k-1}}{N}\left[\frac{p_k}{32}(r^2_{k-1} - r_k^2) + \right. \\ &\qquad \left. (C'_{k-1} + R_{k-1})\,\alpha_k' + (C_k'' + R_k)\,\alpha_k''\right], \\ \text{an der Stelle } r = r_k\text{:} \\ \left(\frac{d\zeta_k}{dr}\right)_{r=r_k} &= \frac{r_k}{N}\left[\frac{p_k}{32}(r_k^2 - r_{k-1}^2) - \right. \\ &\qquad \left. (C'_{k-1} + R_{k-1})\,\beta_k' - (C_k'' + R_k)\,\beta_k''\right]. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Beizahlen des k^{ten} Feldes

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k' &= (K_1\,\varphi_i' + K_2\,\psi_i'), \quad \beta_k' = -(K_1\,\varphi_a' + K_2\,\psi_a'), \\ \alpha_k'' &= (\lambda_1\,\varphi_i' + \lambda_2\,\psi_i'), \quad \beta_k'' = -(\lambda_1\,\varphi_a' + \lambda_2\,\psi_a') \end{aligned}\right\} \quad (18a)$$

sind hierbei unter Zugrundelegung der Grenzwerte $r_i = r_{k-1}$ und $r_a = r_k$ mit Hilfe der Formeln 6, 6a, 7 und 9 zu bestimmen.

Für das nächste Feld mit den Auflagerkreisen $r_i = r_k$, $r_a = r_{k+1}$ ergibt sich ebenso:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\zeta_{k+1}}{dr}\right)_{r=r_k} &= \frac{r_k}{N}\left[\frac{p_{k+1}}{32}(r_k^2 - r_{k+1}^2) + \right. \\ &\qquad \left. (C_k' + R_k)\,\alpha'_{k+1} + (C_{k+1}'' + R_{k+1})\,\alpha_{k+1}''\right] \\ \left(\frac{d\zeta_{k+1}}{dr}\right)_{r=r_{k+1}} &= \frac{r_{k+1}}{N}\left[\frac{p_{k+1}}{32}(r_{k+1}^2 - r_k^2) - \right. \\ &\qquad \left. (C_k' + R_k)\,\beta'_{k+1} - (C_{k+1}'' + R_{k+1})\,\beta_{k+1}''\right] \end{aligned}\right.$$

Da an der Anschlusstelle der angrenzenden Felder

$$\left(\frac{d\zeta_k}{dr}\right)_{r=r_k} = \left(\frac{d\zeta_{k+1}}{dr}\right)_{r=r_k}$$

sein muss, so ist

$$\frac{p_k}{32}(r_k^2 - r_{k-1}^2) - (C'_{k-1} + R_{k-1})\,\beta_k' - (C_k'' + R_k)\,\beta_k'' = \frac{p_{k+1}}{32}(r_k^2 - r_{k+1}^2) + (C_k' + R_k)\,\alpha'_{k+1} + (C_{k+1}'' + R_{k+1})\,\alpha''_{k+1}.$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_k}{32}(r_k^2 - r_{k-1}^2) - (C_{k-1}\,\alpha_k' + C_k''\,\alpha_k'') &= U_k, \\ \frac{p_k}{32}(r_k^2 - r_{k-1}^2) - (C_{k-1}\,\beta_k' + C_k''\,\beta_k'') &= V_k, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

so ergibt sich schliesslich:

$$R_{k-1}\,\beta_k' + R_k(\beta_k'' + \alpha'_{k+1}) + R_{k+1}\,\alpha_{k+1}'' = U_{k+1} + V_k \quad (20)$$

Dies ist die *Dreimomentengleichung* der durchlaufenden Platte mit gleichförmiger Stützung: sie stellt gewissermassen das Gegenbild der bekannten Clapeyron'schen Gleichung dar.

Ruht die Platte an den Rändern $r = r_0$ oder $r = r_n$ frei auf, so müssen die Randkräftepaare R_0 oder R_n verschwinden. Die Anfangs- und Endgleichungen lauten sodann:

$$\left.\begin{aligned} &R_1\,(\beta_1'' + \alpha_2') + R_2\,\alpha_2'' = U_2 + V_1, \\ \text{bezw. } &R_{n-2}\,\beta'_{n-1} + R_{n-1}\,(\beta_{n-1}'' + \alpha_n') = U_n + V_{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (20a)$$

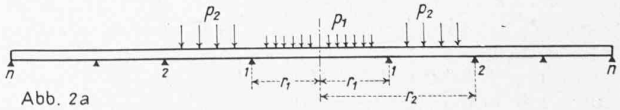

Abb. 2a

Bildet die Platte eine volle Kreisfläche und trägt das Kernstück mit dem Auflagerkreise $r = r_1$ die gleichförmige Belastung p_1 (Abb. 2a), so können wir die elastische Fläche des ersten Innenfeldes durch die Gleichung

$$\zeta_1 = \frac{p_1}{64\,N}(r^4 - r_1^4) + \left(\frac{C_1'' + R_1}{2\,N}\right)(r_1^2 - r^2)$$

darstellen, wobei unter Zugrundelegung der Poisson'schen Ziffer $m = \infty$

$$C_1'' = \frac{3}{16}\,p_1\,r_1^2.$$

Da $\left(\frac{d\zeta_1}{dr}\right)_{r=r_1} = \frac{p_1 r_1^3}{16 N} - r_1 \left(\frac{C_1'' + R_1}{N}\right)$,

so lautet die erste Stetigkeitsbedingung:

$$\frac{p_1 r_1^2}{16} - (C_1'' + R_1) = \frac{p_2}{32}(r_1^2 - r_2^2) + \alpha_2'(C_1' + R_1) + \alpha_2''(C_2'' + R_2)$$

oder auch, wenn jetzt

$$\beta_1'' = 1$$

$$\frac{p r_1^2}{16} - C_1'' = V_1$$

gesetzt wird:

$$R_1(\beta_1'' + \alpha_2') + R_2 \alpha_2'' = U_2 + V_1 \qquad (20\,b)$$

Durch die Ableitung der Dreimomentengleichung haben wir die Möglichkeit gewonnen, die durchlaufende Platte mit mehrfacher kreisförmiger Stützung in gleicher Weise wie den einfachen durchlaufenden Balken zu behandeln.

*

Ich wähle als *Beispiel* eine Platte (Abb. 3) mit den drei Stützkreisen $r_0 = 4{,}0$ m, $r_1 = 8{,}0$ m, $r_2 = 12{,}0$ m und ermittle mit Hilfe der Formeln (6), (7), (9) und (18a) die kennzeichnenden Zahlen

für das Feld 0 bis 1

$\varphi_i' = 1{,}3863$	$\varphi_a' = -0{,}75$	$K_1 = -0{,}6213$	$\beta_1' = +0{,}0539$
$\varphi_i'' = -2{,}6137$	$\varphi_a'' = -3{,}25$	$K_2 = +0{,}375$	$\beta_1'' = +0{,}1876$
$\psi_i' = 3{,}0$	$\psi_a' = -1{,}3863$	$\lambda_1 = +0{,}8074$	
$\psi_i'' = -7{,}0$	$\psi_a'' = -5{,}3863$	$\lambda_2 = -0{,}3015$	

für das Feld 1 bis 2

$\varphi_i' = 0{,}8109$	$\varphi_a' = -0{,}5555$	$K_1 = -1{,}7547$	$\alpha_2' = +0{,}1475$
$\varphi_i'' = -3{,}1891$	$\varphi_a'' = -3{,}4444$	$K_2 = +1{,}2563$	$\alpha_2'' = +0{,}0988$
$\psi_i' = 1{,}25$	$\psi_a' = -0{,}8109$	$\lambda_1 = +1{,}9149$	
$\psi_i'' = -5{,}25$	$\psi_a'' = -4{,}8109$	$\lambda_2 = -1{,}1632$	

Denken wir uns zunächst den Zusammenhang zwischen den beiden angrenzenden Feldern gelöst, betrachten wir also jedes Feld als einen an den Rändern freiaufliegenden Ring, so finden wir auf Grund der Gleichungen (12) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \frac{p_1}{32}(5 \cdot 4^2 - 8^2) = \frac{16}{32} p_1 \\ C_a &= \frac{p_1}{32}(5 \cdot 8^2 - 4^2) = \frac{304}{32} p_1 \end{aligned}\right\} \text{für das Feld 0 bis 1,}$$

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \frac{p_2}{32}(5 \cdot 8^2 - 12^2) = \frac{176}{32} p_2 \\ C_a &= \frac{p}{32}(5 \cdot 12^2 - 8^2) = \frac{656}{32} p_2 \end{aligned}\right\} \text{für das Feld 1 bis 2.}$$

Zur Berechnung der Momente der reduzierten Biegungsspannungen benutzen wir die Formeln

$$\overline{s_r} = -N \frac{d^2\zeta}{dr^2} = \frac{p}{32}(r_a^2 + r_i^2 - 6\,r^2) - (K_1 C_i + \lambda_1 C_a)\,\varphi''(r) - (K_2 C_i + \lambda_2 C_a)\,\psi''(r),$$

$$\overline{s_t} = -N \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{p}{32}(r_a^2 + r_i^2 - 2\,r^2) - (K_1 C_i + \lambda_1 C_a)\,\varphi'(r) - (K_2 C_i + \lambda_2 C_a)\,\psi'(r),$$

wobei:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{r}\frac{d\varphi(r)}{dr} = 2 \ln \frac{r_a}{r} - \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right)$$

$$\psi'(r) = \frac{1}{r}\frac{d\psi(r)}{dr} = -2 \ln \frac{r_i}{r} + \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1\right)$$

$$\varphi''(r) = \frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} = 2 \ln \frac{r_a}{r} + \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) - 4$$

$$\psi''(r) = \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = -2 \ln \frac{r_i}{r} - \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1\right) - 4.$$

Die hiernach ermittelten Momentenlinien sind in Abb. 3 dargestellt. Die gleiche Abbildung zeigt den Verlauf der Biegungsmomente M_0 eines stellvertretenden freiaufliegenden Balkens mit der Spannweite $l = r_a - r_i$. Man erkennt, dass bei gleicher Feldweite l die tangentialen Spannungsmomente $\overline{s_t}$ um so grösser sind, je kleiner $\frac{r}{r_a}$ ist. Im ersten Feld ist beispielsweise für $r = r_i$:

$$\overline{s_t} = -0{,}6725\,p_1,$$

im zweiten hingegen: $\overline{s_t} = -0{,}3365\,p_2$.

Wir sehen ferner, dass die radialen Spannungsmomente $\overline{s_r}$ teils grösser, teils kleiner als die Biegungsmomente M_0 des freiaufliegenden Balkens sind, dass sich aber diese beiden Grössen mit zunehmendem $\frac{r_i}{r_a}$ umso besser aneinander angleichen, je kleiner $\overline{s_t}$ wird.

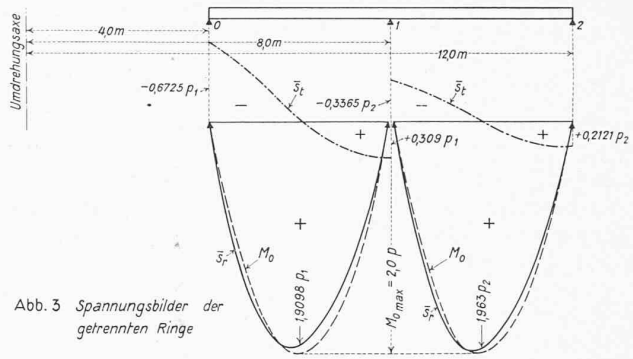

Abb. 3 *Spannungsbilder der getrennten Ringe*

Denken wir uns jetzt den Zusammenhang zwischen den beiden Ringen wieder hergestellt und zuerst das Feld 0 bis 1 allein belastet (Abb. 3a), so liefern die Gleichungen (16), (19) und (20) der Reihe nach:

$$C_0' = C_i = \frac{16}{32} p_1$$

$$C_1' = 0$$

$$R_1 = \frac{V_1}{\beta_1'' + \alpha_2} = -0{,}9226\,p_1$$

$$C_1'' = C_a = \frac{304}{32} p_1$$

$$C_2'' = 0$$

$$V_1 = -0{,}3091\,p_1$$

$$U_2 = 0.$$

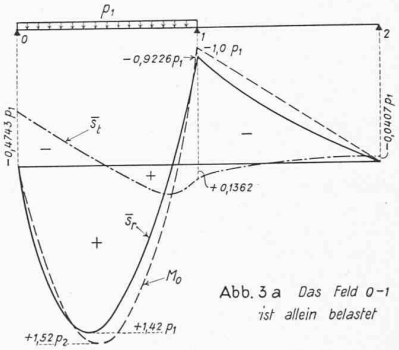

Abb. 3a *Das Feld 0–1 ist allein belastet*

Ebenso erhalten wir, wenn das Feld 1 bis 2 allein belastet wird (Abb. 3b):

$$C_0' = 0$$

$$C_1' = C_i = \frac{176}{32} p_2$$

$$R_2 = \frac{U_2}{\beta_1'' + \alpha_2'} = -1{,}0045\,p_2$$

$$C_1'' = 0$$

$$C_2'' = C_a = \frac{656}{32} p_2$$

$$V_1 = 0$$

$$U_2 = -0{,}3367\,p_2.$$

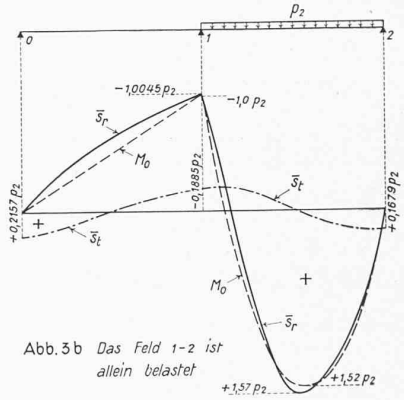

Abb. 3b *Das Feld 1–2 ist allein belastet*

Durch das Stützenmoment R_1 werden die folgenden zusätzlichen Spannungsmomente erzeugt:

$$\left.\begin{aligned} \overline{s_r} &= -R_1\,[\lambda_1\,\varphi''(r) + \lambda_2\,\psi''(r)] \\ \overline{s_t} &= -R_1\,[\lambda_1\,\varphi'(r) + \lambda_2\,\psi'(r)] \end{aligned}\right\} \text{im Felde 0 bis 1,}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{s_r} &= -R_1\,[K_1\,\varphi''(r) + K_2\,\psi''(r)] \\ \overline{s_t} &= -R_1\,[K_1\,\varphi'(r) + K_2\,\psi'(r)] \end{aligned}\right\} \text{im Felde 1 bis 2.}$$

Die aus der Vereinigung dieser Zusatzwerte mit den vorhin ermittelten Grundwerten sich ergebenden endgültigen Werte $\overline{s_r}$ und $\overline{s_t}$ der durchlaufenden Platten sind in den Abbildungen 3a und 3b mit den entsprechenden Werten M_0 eines durchlaufenden zweifeldrigen Balkens eingetragen.

Man erkennt wieder, dass die entlastende Wirkung der tangentialen auf die radialen Biegungsmomente umso mehr in Erscheinung tritt, je kleiner $\frac{r_i}{r_a}$ ist. Die Abweichung zwischen den zugehörigen Werten $\overline{s_r}$ und M_0 ist bei der durchlaufenden Platte geringer als beim einzelnen Ringe: die Kontinuität hat mit der Verkleinerung der Neigungswinkel $\frac{d\zeta}{dr}$ eine beträchtliche Herabminderung der tangentialen Spannungsmomente $\overline{s_t}$ zur Folge und aus diesem Grunde kann sich die durchlaufende Platte nicht wesentlich anders verhalten als ein radialer kontinuierlicher Balken.

Obgleich die tangentialen Spannungsmomente erheblich kleiner sind als die radialen Biegungsmomente, so verdienen sie insofern besondere Beachtung, als in jedem Punkte ihr Vorzeichen, also auch ihr Wirkungssinn je nach der Belastung wechseln kann: so sind beispielsweise die Stützenmomente $\overline{s_t}$ positiv, wenn das Innenfeld, und negativ, wenn das Aussenfeld allein belastet ist. Eine doppelte Ringbewehrung wird im Bereiche des mittleren Stützkreises erforderlich, sobald die veränderliche Belastung p im Vergleich zur ständigen Belastung g das Mass $p > 2g$ erreicht.

Es sei schliesslich bemerkt, dass die Tragfähigkeit der Platte bei gleichbleibender Stärke am besten ausgenutzt wird, wenn der Abstand der Auflagerkreise derart gewählt ist, dass alle Felder die gleiche Fläche $\pi\,(r_k^2 - r_{k-1}^2)$ besitzen.

In den vorstehenden Entwicklungen ist lediglich der Einfluss einer über den vollen Umfang eines Ringes *gleichförmig* verteilten Belastung behandelt worden: das gleiche Verfahren kann sinngemäss auf jede Art kreissymmetrischer Belastung angewandt werden.

Die Untersuchung einer längs eines Kreises *veränderlichen* Belastung stellt eine etwas schwierigere Aufgabe dar, deren Lösung für die Bestimmung der Grenzwerte der tangentialen Spannungsmomente unter Umständen besonders wichtig sein kann. Da eine eingehende Behandlung dieser Aufgabe im Rahmen dieses Aufsatzes zu viel Raum beanspruchen würde, so bleibt mir nur übrig, den Leser auf den besonderen Abschnitt, der im zweiten Bande meines Buches über die „Theorie elastischer Gewebe" diesem Problem, sowie der einfachen Abschätzung der Spannungsmomente durchlaufender, kreisförmiger Platten gewidmet wird, zu verweisen.

Die Aufwendungen der Schweiz. Bundesbahnen für ihre Anlagen und Ausrüstung.

Von WALTER WACHS, Ingenieur bei der Generaldirektion der SBB, Bern.

(Fortsetzung von Seite 104.)

4. Das Anlagekapital der Bahnen beim Rückkauf.

Als Anlagekapital ist nach der Botschaft des Bundesrates betr. den Rückkauf der schweizerischen Hauptbahnen zu betrachten das für die Erstellung oder Erwerbung der Bahn ausgelegte Kapital, also der Baukonto, zuzüglich der Aufwendungen für die im Zeitpunkt des Rückkaufes noch nicht vollendeten Bauten. Subventionen à fond perdu waren abzuziehen, ebenso Kapitalverluste bei Liquidationen, die naturgemäss auch Bauausgaben umfassten. Es durften also nur jene Beträge in den Baukonto aufgenommen werden, die der letzte Konzessionsinhaber für die Erwerbung der Bahn ausgegeben hatte. Für die fünf Hauptbahnen und ihre Gemeinschaftslinien ermittelt sich so das

Anlagekapital der Privatbahnen beim Rückkauf.

Tabelle IV.	S. C. B.	N. O. B.	V. S. B.	J.-S.	G. B.	Andere[1])	Total
	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.
Baukonto	131,5	241,2	83,8	310,7	296,8	46,7	1 110,7
Unvollendete Bauten .	14,9	4,6	0,9	35,8	0,2	—	56,4
Zusammen	146,4	245,8	84,7	346,5	297,0	46,7	1 167 1
Subventionen u. Abzüge	—	—	—	—	119,0	1,6	120,5
Anlagekosten	146,4	245,8	84,7	346,5	178,0	45,1	1 046,6

[1]) Aargau. Südbahn, Bözberg, Koblenz-Stein, Wohlen-Bremgarten, Toggenburg.

Lücken in der Eisenbahngesetzgebung gestatteten den Bahngesellschaften früher grosse Freiheiten in der Finanzgebarung und ermöglichten eine ungesunde Dividendenpolitik zum Schaden der Obligationäre. Zur Verbesserung der Ertragsrechnungen wurden Ausgaben, die auf Betriebsrechnung gehörten, auf Baukonto verrechnet, ebenso Betriebsdefizite, Werte für untergegangene Anlagen und sonstige zu amortisierende Verluste. Der Baukonto wurde so im Laufe der Jahre derart mit Unwerten belastet, dass sich der Bundesrat im Jahre 1883 im Hinblick auf einen allfälligen Rückkauf der Bahnen veranlasst sah, ein «Eisenbahnrechnungsgesetz» zu erlassen, das 1896 durch ein zweites ersetzt und ergänzt wurde. Durch eine im Rechnungsgesetz vorgeschriebene Bilanzbereinigung sollte der Baukonto von allen Unwerten befreit werden. Diese wurden in einem besonderen Kapitel «Zu amortisierende Verwendungen» zusammengefasst und mussten planmässig allmählich abgeschrieben werden.

Diese Bilanzbereinigung, die auf viele Jahre zurückgreifen musste und zum Teil auf heftigen Widerstand stiess, bereitete naturgemäss grosse Schwierigkeiten und obwohl sie unter Aufsicht und Mitwirkung des Eisenbahndepartementes durchgeführt wurde, ist es mehr als zweifelhaft, ob wirklich alle Unwerte erfasst und aus den Anlagekosten entfernt wurden. Die Meinungen darüber sind geteilt. Eine Nachprüfung ins Einzelne ist heute kaum mehr möglich. Während Prof. Dr. J. Steiger auf S. 24 seines Werkes «Die Schweizerischen Bundesbahnen, ihre Entwicklung und ihre Leistungen» der Meinung ist, dass beim Uebergang der Privatbahnen an den Bund in deren Baurechnungen keine Beträge enthalten waren, die nicht als Anlagekosten betrachtet werden können, kommt Dr. E. A. Diethelm in seiner unten erwähnten Arbeit[1]) zur gegenteiligen Ansicht, dass auch nach der Bilanzbereinigung die Baukosten der Bahnen mit beträchtlichen Unwerten belastet blieben und dass auch unter dem Regime der Rechnungsgesetze von 1883 bis 1896 weiterhin Ausgaben, die aus der Betriebsrechnung hätten bestritten werden sollen, auf Baukonto verbucht wurden. Seine Untersuchungen, Berechnungen und Schätzungen ergeben für die einzelnen Bahngesellschaften nachfolgende Zahlen:

[1]) «Die Verstaatlichung der schweizerischen Privatbahnen durch den Bund und ihre finanziellen Auswirkungen auf die SBB 1903 bis 1913.» — Lachen 1930, Buchdruckerei Gutenberg.

Tabelle V.	S. C. B.	N. O. B.	V. S. B.	J.-S.	Total
	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.	Mill. Fr.
Verbleibende Ueberkapitalisierung des Baukonto nach der Bilanzbereinigung	18	32,7	6,4	22	79,1
Seitherige Belastung des Baukonto mit Ausgaben, die auf Betrieb gehörten	5	6,3	5	2,4	18,7
Zusammen	23	39	11,4	24,4	97,8

Der Gotthardbahn wurden über ihre Finanzgebarung nie Vorwürfe gemacht. Ob auch ihr Baukonto Ausgaben enthielt, die auf Betrieb gehörten, lässt Diethelm dahingestellt. Die Tatsache, dass bei der Gotthardbahn die indirekten Bauausgaben wie Organisations- und Verwaltungskosten, Verzinsung des Baukapitals ganz erheblich höher waren, als bei den übrigen Bahnen, legt dies allerdings nahe.

Berücksichtigt man die Widerstände, die die Bilanzbereinigung zu überwinden hatte und zieht man in Betracht, dass das neue Anlagekapital auf dem Wege gütlicher Vereinbarung festgesetzt wurde und nicht auf Grund einer eingehenden Untersuchung aller Posten des Baukontos und dass die schliesslich zur Amortisierung ausgeschiedenen Beträge wesentlich kleiner waren, als die ursprüngliche Forderung des Eisenbahndepartements, so wird man unbedingt die Auffassung von Dr. Diethelm als richtig anerkennen müssen. Zu der von ihm errechneten Ueberbelastung des Baukontos von fast 100 Mill. kommt aber noch hinzu der Ueberschuss des Rückkaufpreises über den Baukonto mit 113,9 Mill Fr. Diese Ueberzahlung von mehr als 200 Mill. Franken, die den SBB von Anfang an als Bleigewicht angehängt wurde, ist eine Hauptursache der grossen Zinsenlast und der hohen Kapitalschuld, die ihre Rechnung heute so bedrücken.

5. Die Forderungen des Bundes beim Rückkauf der Bahnen für nicht vollkommen befriedigenden Zustand.

Nach dem Rückkaufsgesetz musste für die Bahnen mindestens der volle Erstellungswert vergütet werden. Man durfte also verlangen, dass die Anlagen beim Uebergang gut unterhalten seien, sich in betriebsfähigem Zustand befinden, ferner, dass die durch Abnützung und andere Einwirkungen entstandenen Minderwerte durch einen Abzug am Rückkaufspreis ausgeglichen würden. Die von den Bahnverwaltungen gemachten Rücklagen für die der Abnützung besonders unterworfenen Anlagen, wie Oberbau, Rollmaterial, Gerätschaften, genügten zur Deckung der eingetretenen Minderwerte nicht; denn diese Erneuerungsfonds dienten im allgemeinen nur zum Ausgleich der jährlichen Ausgaben für die Erneuerung. Auf den Bahnanlagen und Einrichtungen war also gegenüber dem Baukonto ständig ein Minderwert vorhanden, den zu decken die geforderten Abzüge bestimmt waren.

Für die nach dem Etragswert, also zu einem höhern als dem Erstellungspreis zurückgekauften Bahnen durfte ausserdem das Vorhandensein aller Anlagen und Einrichtungen verlangt werden, die nötig waren zu einer einwandfreien und reibungslosen Abwicklung des vorhandenen Verkehrs, auf dem der höhere Rückkaufspreis basierte. Die Bahnen mussten also auch quantitativ in vollkommen befriedigendem Zustand sein. Ungenügende Anlagen waren zu ergänzen (Bahnhoferweiterungen, Doppelspuren,