

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 105/106 (1935)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Belastungsgrenzen des Hohlzylinders unter Innendruck bei Berücksichtigung der Plastizität  
**Autor:** Kohn, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47384>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Belastungsgrenzen des Hohlzylinders unter Innendruck bei Berücksichtigung der Plastizität. — Bautechnischer Luftschutz. — Wettbewerb für eine reformierte Dorfkirche in Birnenstorf, Kanton Aargau. — Chemisch-technische Grundlagen des Gasschutzes. — Mitteilungen: Eidgen. Technische Hochschule. Isolierstoffe hoher Wärmeleitfähigkeit. Die neue Dockschleuse des Hafens von Saint-Nazaire.

Interessante Verschiebung eines Hauses. Brandwachegebäude in Zürich. Brücke über den Sambesi bei Sena. Eine Vortragsreihe „Normung und Toleranzsysteme“. — Wettbewerbe: Strandbad in Meilen. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

## Band 105

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.  
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

## Nr. 5

# Belastungsgrenzen des Hohlzylinders unter Innendruck bei Berücksichtigung der Plastizität.

Von Dr. techn. PAUL KOHN, Prag.

Auf Grund der Huber-Mises-Hencky'schen Fließbedingung wird die Belastungsgrenze für den offenen und geschlossenen Hohlzylinder aus zähem Material bestimmt und in Diagrammen dargestellt. Ferner wird das Halbmesserverhältnis berechnet, für das bei der Entlastung die Fließgrenze neuerlich überschritten wird, und schliesslich auf die plastischen Deformationen eingegangen. — An Beispielen wird die neue Dimensionierung mit der üblichen verglichen.

Bei der Dimensionierung der durch einen inneren Ueberdruck beanspruchten dickwandigen Hohlzylinder war es bisher üblich, als Belastungsgrenze jenen Ueberdruck anzusehen, bei dem gerade der Innenmantel des Hohlzylinders aus dem elastischen in den plastischen Zustand übergeht. Bei einem zähen Material mit ausgesprochener Fließgrenze bringt aber eine weitere Drucksteigerung noch keine Gefahr mit sich, wie z. B. die Versuche von Krüger<sup>1)</sup> zeigen, da der Hohlzylinder als Ganzes erst zu fließen beginnt, wenn sich die plastische Zone bis an den Aussenmantel erstreckt. Als äusserste Belastungsgrenze wird man daher jenen Ueberdruck ansehen müssen, bei welchem der Aussenmantel des Hohlzylinders bis zur Fließgrenze beansprucht wird. Da praktisch jedes Gefäss öfters belastet und daher auch entlastet wird, so tritt, um eine Zerstörung des Materials hintanzuhalten, als weitere Forderung die Bedingung hinzu, dass bei der Entlastung an keiner Stelle des Hohlzylinders die Fließgrenze neuerlich überschritten wird.

A. Nádaí<sup>2)</sup> gibt die allgemeine Lösung für den Spannungszustand des plastischen Rohres mit konstanter axialer Dehnung an und bestimmt die Integrationskonstanten für den Sonderfall, dass die axiale Dehnung null ist. Er setzt dabei voraus, dass man im ganzen plastischen Gebiet die elastischen Dehnungen gegenüber den plastischen vernachlässigen darf. Dies ist jedoch in der Nähe der Grenze zwischen elastischem und plastischem Gebiet nicht zulässig, da in ihr selbst elastische Dehnungen vorhanden, die plastischen Dehnungen aber null sind. In der vorliegenden Arbeit soll dem vorerwähnten Umstand wenigstens näherungsweise Rechnung getragen werden, was nur formal eine kleine Änderung der Ausgangsgleichungen mit sich bringt; andererseits sollen aber die beiden wichtigsten technischen Belastungsfälle, nämlich der an den Enden offene und der an den Enden geschlossene, durch Innendruck beanspruchte plastische Hohlzylinder behandelt werden. Es sei gleich vorweggenommen, dass sich für den geschlossenen plastischen Hohlzylinder die axiale Dehnung zu null ergibt, und dass für diesen Fall die schon von Nádaí für den Spannungszustand angegebenen einfachen Beziehungen gelten.

Für ein elastisch-plastisches Material gelten für den in axialer Richtung unbegrenzt gedachten und axensymmetrisch belasteten Hohlzylinder die folgenden Deformationsbedingungen in den Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ .

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \alpha \left[ \sigma_r - \frac{1}{m} (\sigma_\varphi + \sigma_z) \right] + \beta \left[ \sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_\varphi + \sigma_z) \right] = \frac{du}{dr}, \\ \varepsilon_\varphi &= \alpha \left[ \sigma_\varphi - \frac{1}{m} (\sigma_z + \sigma_r) \right] + \beta \left[ \sigma_\varphi - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_r) \right] = \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_z &= \alpha \left[ \sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right] + \beta \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right].\end{aligned}$$

Hierin bedeuten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  die Normalspannungen;  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_z$  die Dehnungen in den Richtungen  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$ ;  $u$  die radiale Verschiebung eines Punktes am Radius  $r$ ;  $1/\alpha$  den Elastizitätsmodul,  $m$  den Querkontraktionskoeffizient und  $1/\beta$  den Plastizitätsmodul.

<sup>1)</sup> W. Krüger, Forschungsarbeit d. V. D. I., H. 87; 1910.

<sup>2)</sup> A. Nádaí, Der bildsame Zustand der Werkstoffe; Verlag Springer, 1927.

Im elastischen Gebiet ist  $\beta = 0$  und  $\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_\varphi - \sigma_r \sigma_z - \sigma_\varphi \sigma_z < \sigma_0^2$ , wenn  $\sigma_0$  die Spannung an der Fließgrenze bedeutet.

Im plastischen Gebiet ist die Fließbedingung von Huber-Mises-Hencky erfüllt, also

$$\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_\varphi - \sigma_r \sigma_z - \sigma_\varphi \sigma_z = \sigma_0^2. \quad (1)$$

und  $\beta$  ist eine vom Verformungszustand des Hohlzylinders abhängige Veränderliche.

Für das plastische Gebiet ersetzen wir nun näherungsweise die Deformationsbedingungen durch:

$$\varepsilon_r = \vartheta \left[ \sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_\varphi + \sigma_z) \right] = \frac{du}{dr}, \quad (2a)$$

$$\varepsilon_\varphi = \vartheta \left[ \sigma_\varphi - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_r) \right] = \frac{u}{r}, \quad (2b)$$

$$\varepsilon_z = \vartheta \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right], \quad (2c)$$

indem wir in den Klammerausdrücken mit  $\alpha$  der Ausgangsgleichungen,  $m$  (für Flusstahl  $m = \frac{10}{3}$ ) durch 2 ersetzen und  $\vartheta = \alpha + \beta$  einführen.

Der Fehler, den man durch diesen Ersatz begeht, ist vernachlässigbar; er ist klein in der Grenzschicht zwischen elastischem und plastischem Gebiet und er wird umso kleiner, je grösser die Entfernung von der Grenzschicht ist, weil sich in grösserer Entfernung von ihr  $\alpha$  gegen  $\beta$  vernachlässigen lässt.

Zur Bestimmung des Spannungs-Dehnungszustandes sind weiter noch die Gleichgewichtsbedingungen in radialer und axialer Richtung notwendig. Diese lauten

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\varphi - \sigma_r \quad (3a)$$

und

$$\int_a^b 2\pi r \sigma_z dr = q a^2 \pi \quad (3b)$$

worin  $q$  (s. Abb. 1) den in axialer Richtung auf die Zylinderböden wirkenden, vorläufig noch beliebig grossen inneren Ueberdruck bedeuten soll.

Da es sich beim axial unbegrenzten, durch Innendruck beanspruchten Hohlzylinder um einen ebenen axensymmetrischen Deformationszustand handelt, ist  $\varepsilon_z = \text{konstant}$  und alle übrigen in den Gleichungen (1) bis (3) vorkommenden Grössen und daher auch  $\vartheta$  sind nur Funktionen der Veränderlichen  $r$ .

Eliminiert man unter Beachtung dieses Umstandes  $u$  und  $\sigma_z$  aus den Gleichungen (2), so ergibt sich

$$\frac{d(\sigma_\varphi - \sigma_r)}{\sigma_\varphi - \sigma_r} = - \frac{d\vartheta}{\vartheta} - 2 \frac{dr}{r}, \quad (4)$$

andererseits erhält man durch Verbindung von Gleichung (1) und (2c)

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 = \frac{4}{3} \left[ \sigma_0^2 - \left( \frac{\varepsilon_z}{\vartheta} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Führt man die dimensionslose Grösse

$$\psi = \frac{\sqrt{3} \sigma_\varphi - \sigma_r}{\sigma_0} \quad (6)$$

in die Gleichungen (3a), (4) und (5) ein, so lassen sich die Grössen  $\vartheta$ ,  $\sigma_r$ ,  $r$  als Funktionen der Grösse  $\psi$  darstellen. Man erhält

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{\psi d\psi}{1 - \psi^2} \quad (7)$$

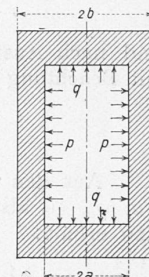


Abb. 1.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d\psi}{1-\psi^2} \quad (8)$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \frac{d\psi}{(1-\psi^2)\psi} \quad (9)$$

Aus Gleichung (6) folgt ferner

$$\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_0} = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} + \frac{2}{\sqrt{3}} \psi \quad (10a)$$

und aus den Gleichungen (2c), (5), (10a) ergibt sich

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_0} = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} + \frac{\psi}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{1-\psi^2} \quad (10b)$$

Durch Integration von Gleichung (8) und (9) erhält man

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{1+\psi}{1-\psi} + K_1 \quad (11)$$

$$r^2 = \frac{K_2}{\psi} \sqrt{1-\psi^2} \quad (12)$$

Durch die Gleichungen (10), (11) und (12) sind die Radialspannungen  $\sigma_r$ , die Tangentialspannungen  $\sigma_\varphi$  und die Axialspannungen  $\sigma_z$  im plastischen Teil eines Hohlzylinders bestimmt, wenn die Radialspannungen an den Grenzen des plastischen Gebiets bekannt sind.

Betrachten wir nun den Grenzfall, dass sich das plastische Gebiet durch die ganze Wandstärke erstreckt, so ist mit den Bezeichnungen der Abb. 1 für  $r=a$  die Radialspannung gleich dem inneren Ueberdruck, also  $\sigma_{ra} = -p$  und  $\psi = \psi_a$ , und für  $r=b$  ist die Radialspannung gleich null, also  $\sigma_{rb} = 0$  und  $\psi = \psi_b$ . Diese Randbedingungen in Gleichung (11) und (12) eingeführt ergeben

$$\frac{p}{\sigma_0} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{(1+\psi_a)(1-\psi_b)}{(1-\psi_a)(1+\psi_b)} \quad (13)$$

$$\text{und} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{\psi_a}{\psi_b} \sqrt{\frac{1-\psi_a^2}{1-\psi_b^2}} \quad (14)$$

Da bei gegebenem Halbmesserverhältnis  $b/a$  und gegebener Fließgrenze  $\sigma_0$  nur ein ganz bestimmter Druck  $p$  den ursprünglich elastischen Zylinder bis zu seiner Aussenwand plastisch macht, so ist noch eine weitere Gleichung zur Bestimmung von  $p$ ,  $\psi_a$ ,  $\psi_b$  erforderlich. Diese Beziehung ist die noch nicht verwendete Gleichgewichtsbedingung (3b).

Mit den Gleichungen (8), (9), (10b), (12) wird

$$r \frac{\sigma_z}{\sigma_0} dr = \frac{1}{2} d\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_0} r^2\right) \pm \frac{K_2}{2} \frac{d\psi}{\psi^2}$$

und nach Ausführung der Integration in Gleichung (3b) mit Beachtung der Randbedingungen ergibt sich

$$\frac{p}{\sigma_0} - \frac{q}{\sigma_0} = \pm \frac{\frac{\psi_a}{\psi_b} - 1}{\sqrt{1-\psi_a^2}} \quad (15)$$

Aus den Gleichungen (13), (14), (15) lassen sich nun  $b/a$ ,  $\psi_a$ ,  $\psi_b$  als Funktionen von  $p/\sigma_0$  und  $q/\sigma_0$  berechnen. Man erhält:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \cos h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) \pm \sqrt{\sin^2 h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) + \left(\frac{p}{\sigma_0} - \frac{q}{\sigma_0}\right)^2} \quad (16a)$$

$$\psi_a = \left\{ \sin h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) \cos h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) \pm \sin h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) \sqrt{\sin^2 h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) + \left(\frac{p}{\sigma_0} - \frac{q}{\sigma_0}\right)^2} \right\} : \left\{ \sin^2 h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) \pm \cos h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) \sqrt{\sin^2 h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) + \left(\frac{p}{\sigma_0} - \frac{q}{\sigma_0}\right)^2} \right\} \quad (16b)$$

$$\psi_b = \pm \frac{\sin h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right)}{\sqrt{\sin^2 h \left(\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}\right) + \left(\frac{p}{\sigma_0} - \frac{q}{\sigma_0}\right)^2}} \quad (16c)$$

In diesen und auch den früheren Gleichungen hat bei einer Belastung des Hohlzylinders durch einen inneren Druck nur das obere positive Vorzeichen einen physikalischen Sinn. Dies geht aus Gleichung (16a) hervor, denn für ein positives und wachsendes  $p$  muss auch das Halbmesserverhältnis  $b/a$  ständig zunehmen.

Für den Sonderfall, dass der Zylinder an den Enden offen ist, ist in den Gleichungen (16)  $q=0$  zu setzen.

Für den Sonderfall, dass der Zylinder an den Enden geschlossen ist, wird  $p=q$  und die Gleichung (16) vereinfacht sich auf

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = e^{\frac{p}{\sigma_0} \sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \psi_a = \psi_b = 1 \quad (17)$$

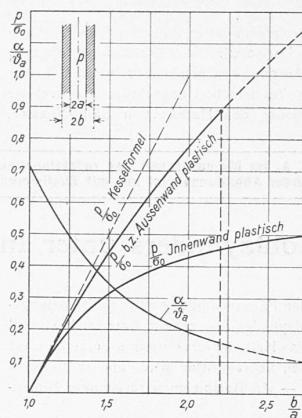


Abb. 2.

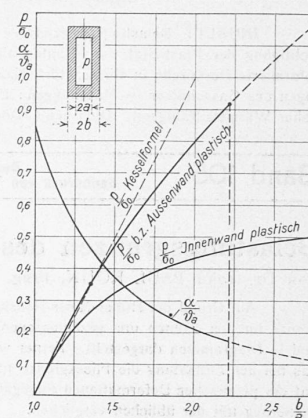


Abb. 3.

Gleichungen (16a) und (17) geben an, bei welchem Halbmesserverhältnis  $b/a$  der innere Ueberdruck  $p$  bei einem Material von der Fließspannung  $\sigma_0$  den offenen beziehungsweise geschlossenen Hohlzylinder bis zu seiner Aussenwand plastisch macht. Bei einem höheren Ueberdruck würde, wenn keine Verfestigung des Materials eintritt, der Hohlzylinder auseinander fließen, während bei einem niedrigeren Ueberdruck die plastische Zone sich nicht bis an die Aussenwand erstreckt. Im Diagramm Abb. 2 haben wir Beziehung (16a) ( $q=0$ ) für den offenen Zylinder und in Diagramm Abb. 3 Beziehung (17) für den geschlossenen Zylinder dargestellt. Formel (17) wurde schon von Nádai für den Sonderfall, dass die axiale plastische Dehnung  $\varepsilon_z = 0$  ist, angegeben. Aus Gleichung (5) erkennt man, dass wegen  $\psi_a = \psi_b = 1$ ,  $\varepsilon_z = 0$  wird. Für den geschlossenen plastischen Hohlzylinder unter innerem Ueberdruck ist daher unter Voraussetzung der eingeführten Näherung die gesamte axiale Dehnung an jeder Stelle null.

Um den Unterschied gegenüber der üblichen Berechnungsweise zu zeigen, haben wir in den Diagrammen Abb. 2 und 3 auch die Abhängigkeit  $p/\sigma_0$  von  $b/a$  für jenen Belastungsfall dargestellt, für welchen der Innendruck  $p$  gerade die Innenwand des Hohlzylinders plastisch macht. Diese Beziehung erhält man aus der Bedingung, dass die Spannungen an der Innenwand des elastischen Hohlzylinders die Huber-Mises-Hencky'schen Fließbedingung erfüllen.

Man hat also die Spannungen an der Innenwand des durch die Drücke  $p$  und  $q$  belasteten elastischen Hohlzylinders (s. z. B. Föppl<sup>3)</sup>) in die Fließbedingung (1) einzuführen und erhält so mit  $q=0$  und  $q=p$  für den offenen bzw. geschlossenen Hohlzylinder

$$\frac{p}{\sigma_0} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1}{\sqrt{3\left(\frac{b}{a}\right)^4 + 1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]$$

Da es allgemein üblich ist, dünnwandige Hohlzylinder nach der sogenannten Kesselformel, die sich aus der Annahme ableitet, dass die Tangentialspannungen gleichförmig über die Wanddicke verteilt sind, zu dimensionieren; so haben wir auch diese Beziehung

$$\frac{p}{\sigma_0} = \frac{b}{a} - 1,$$

in Diagramm Abb. 2 und 3 dargestellt.

Man erkennt aus Abb. 2, dass beim offenen Hohlzylinder eine Bemessung nach dieser Formel eigentlich unzulässig ist, da sie eine höhere Sicherheit vortäuscht, als wirklich vorhanden ist. Beim geschlossenen Hohlzylinder kann man die Kesselformel, wie Abb. 3 zeigt, zu Recht anwenden, solange das Halbmesserverhältnis  $b/a$  kleiner als 1,4 ist.

Wir untersuchen weiter, wie sich der plastische Hohlzylinder nach vollkommener Entlastung verhält. Da im entlasteten Zustand die höchsten Beanspruchungen an den Stellen der grössten plastischen Deformationen, das heisst,

<sup>3)</sup> A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 3.



wie später gezeigt, an der Innenwand des Hohlzylinders auftreten, so wollen wir unsere Untersuchung auf jenen Belastungsfall beschränken, wo bei der Entlastung an der Innenwand die Fließspannung wieder erreicht wird.

Im belasteten plastischen Zustand verursachen der Innendruck  $p$  und  $q$  an der Innenwand des Hohlzylinders tangential und axial Spannungen, die sich aus den Gleichungen (10) mit  $\psi = \psi_a$  ergeben. Um die Spannungen an der Innenwand im entlasteten Zustand zu erhalten, denken wir uns auf die Innenwand des Hohlzylinders den Zug  $p$  und auf die Zylinderböden den Zug  $q$  wirken. Die durch diese Belastung an der Innenwand hervorgerufenen Spannungen ergeben sich leicht aus den Beziehungen für den Spannungszustand des elastischen Hohlzylinders (s. z. B. Föppl<sup>3</sup>). Überlagert man nun den plastischen und elastischen Spannungszustand, so heben sich die Belastungen  $p$  und  $q$  an der Innenwand und den Böden auf, und die an der Innenwand des entlasteten Hohlzylinders zurückbleibenden Spannungen ergeben sich zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p + p = 0, \quad \sigma_\varphi = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \psi_a - p \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \\ \sigma_z &= -p + \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \psi_a + \sigma_0 \sqrt{1 - \psi_a^2} - q \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Erfüllen diese Spannungen die Fließbedingungen (1), so tritt bei der Entlastung wieder Fließen an der Innenwand ein. Gleichungen (18) in Gleichung (1) eingeführt ergeben

$$\frac{3 \left( \frac{p}{\sigma_0} \right)^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + \left( \frac{p}{\sigma_0} - \frac{q}{\sigma_0} \right)^2}{2 \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right]} - \sqrt{3} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \frac{p}{\sigma_0} \psi_a + \left( \frac{p}{\sigma_0} - \frac{q}{\sigma_0} \right) \sqrt{1 - \psi_a^2} = 0 \quad (19)$$

Für den offenen Hohlzylinder ist in den Gleichungen (16a), (16b) und (19) wieder  $q = 0$  zu setzen; aus diesen Beziehungen lassen sich dann  $p/\sigma_0$  und  $b/a$  numerisch bestimmen. Man erhält  $p/\sigma_0 = 0,89$  und  $b/a = 2,2$ . Bis zu diesen Werten tritt daher beim offenen plastisch voll ausgenützten Hohlzylinder bei der Entlastung kein Überschreiten der Fließgrenze ein und daher ist das Diagramm nur bis zu diesen Werten zu benutzen. Bei einer höheren Belastung lässt sich der Hohlzylinder plastisch nicht mehr voll ausnützen.

Für den geschlossenen Hohlzylinder vereinfacht sich Gleichung (19) mit  $q = p$  auf

$$\frac{3 \frac{p}{\sigma_0} \left( \frac{b}{a} \right)^2}{2 \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right]} - \psi_a \sqrt{3} = 0$$

und mit Gleichungen (17) ergibt sich  $p/\sigma_0 = 0,92$  und  $b/a = 2,22$ , als Grenzwerte für den geschlossenen plastisch voll ausgenützten Hohlzylinder.

Um aus dem Spannungsdehnungsdiagramm des Zugstabes (s. Abb. 4) feststellen zu können, welcher Teil der Spannungsdehnungslinie bei der Belastung des Hohlzylinders ausgenutzt wird, ist es notwendig, auf die Formänderungen einzugehen.

Im einaxigen Spannungsdehnungsdiagramm ist (vgl. Gleichung 2)

$$\varepsilon = \vartheta \sigma_0 \quad (20)$$

Der grösste Wert von  $\varepsilon$  ergibt sich aus dem grössten Wert von  $\vartheta$ . Durch Integration von Gleichung (7) erhält man

$$\vartheta = \frac{K}{\sqrt{1 - \psi^2}} \quad (21)$$

Da sich aus Gleichung (12) leicht nachweisen lässt, dass  $\psi$  mit wachsendem  $r$  kleiner wird, so ist, wie zu erwarten,  $\vartheta$  und damit auch die Dehnung an der Innenwand des Hohlzylinders am grössten. Setzen wir für  $r = a$ ,  $\vartheta = \vartheta_a$

und für  $r = b$ ,  $\vartheta = \vartheta_b$ ; so ergibt sich aus Gleichungen (14) und (21)

$$\vartheta_a = \vartheta_b \frac{\psi_b}{\psi_a} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \quad (22)$$

Da die Aussenwand des Hohlzylinders bei einer Belastung durch den Druck  $p$  und  $q$  nach Gleichung (16a) gerade aus dem elastischen in den plastischen Zustand übergeht, so müssen die Deformationen der Aussenwand, berechnet aus dem elastischen Spannungszustand, gleich sein den Deformationen, gerechnet aus dem plastischen Spannungszustand. Bezeichnen wir die elastischen Deformationen und Spannungen mit Strich, so muss für  $r = b$ ,  $u = u_b'$  und  $\varepsilon_{zb} = \varepsilon_{zb}'$  sein.

Da an der Aussenwand  $\sigma_{rb} = \sigma_{rb}' = 0$ , so wird mit Gleichungen (2b) und (2c)

$$\vartheta_b \left( \sigma_{\varphi b} - \frac{1}{2} \sigma_{zb} \right) = \alpha \left( \sigma_{\varphi b}' - \frac{1}{m} \sigma_{zb}' \right)$$

$$\text{und } \vartheta_b \left( \sigma_{zb} - \frac{1}{2} \sigma_{\varphi b} \right) = \alpha \left( \sigma_{zb}' - \frac{1}{m} \sigma_{\varphi b}' \right)$$

Ferner muss auch für die elastischen Spannungen die Fließbedingung (1) erfüllt, also  $\sigma_{\varphi b}'^2 + \sigma_{zb}'^2 - \sigma_{\varphi b}' \sigma_{zb}' = \sigma_0'^2$  sein und aus Beziehungen (10) folgt ferner

$$\sigma_{\varphi b} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \psi_b \quad \text{und} \quad \sigma_{zb} = \sigma_0 \left( \frac{\psi_b}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 - \psi_b^2} \right).$$

Aus diesen fünf Gleichungen lässt sich  $\sigma_{\varphi b}$ ,  $\sigma_{zb}$ ,  $\sigma_{\varphi b}'$ ,  $\sigma_{zb}'$  eliminieren und  $\vartheta_b$  berechnen. Man erhält

$$\frac{\alpha}{\vartheta_b} = \frac{m}{m^2 - 1} \sqrt{\left( m^2 - \frac{5}{2} m + 1 \right) \left( \frac{1}{2} - \psi_b^2 - \psi_b \sqrt{1 - \psi_b^2} \sqrt{3} \right)} + \frac{5}{4} \left( m^2 - \frac{8}{5} m + 1 \right). \quad (23)$$

Mit den Beziehungen (16), (22), (23) lässt sich nun  $\alpha/\vartheta_a$  in Abhängigkeit von  $b/a$  berechnen. In Diagramm Abb. 2 haben wir die Grösse  $\alpha/\vartheta_a$  für den offenen Hohlzylinder ( $q=0$ ) dargestellt, wobei wir  $m=10/3$  angenommen haben. Für den geschlossenen Hohlzylinder vereinfachen sich wegen  $\psi_a = \psi_b = 1$  Gleichungen (22) und (23) und man erhält direkt

$$\frac{\alpha}{\vartheta_a} = \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{m^2 - 1} \sqrt{m^2 - m + 1}.$$

Im Diagramm Abb. 3 haben wir die Grösse  $\alpha/\vartheta_a$  für den geschlossenen Hohlzylinder dargestellt, wobei wir wieder  $m=10/3$  vorausgesetzt haben.

Da nun  $\alpha/\vartheta_a$  für jedes Halbmesserverhältnis  $b/a$  gegeben ist, so lässt sich die grösste Dehnung  $\varepsilon_a$  im Spannungsdehnungsdiagramm nach Gleichung (20) aus

$$\varepsilon_a = \alpha \frac{\sigma_0}{\vartheta_a} \quad (24)$$

bestimmen.

Von der Spannungsdehnungslinie soll nur der horizontale Teil bis zum Verfestigungsbeginn ausgenutzt werden. Da im Verfestigungsgebiet bei Be- und Entlastung Hysteresis-Schleifenbildung eintritt, was zu einer Zermürbung des Materials führt, so ist bei der Dimensionierung zu beachten, dass die grösste Dehnung  $\varepsilon_a$  im Spannungsdehnungsdiagramm nach Gleichung (24) kleiner sein muss, als die Dehnung  $\varepsilon_0$  des verwendeten Materials beim Verfestigungsbeginn.

Bei den  $\alpha/\vartheta_a$  Kurven fällt auf, dass für  $b/a=1$  nicht, wie zu erwarten wäre,  $\vartheta_a = \alpha$  sondern  $\vartheta_a > \alpha$  ist. Dies hängt mit der eingangs gemachten Näherung zusammen und weist darauf hin, dass die berechnete Dehnung  $\varepsilon_a$  etwas grösser als ihr Sollwert ist; die Berechnung der Dehnung enthält daher schon eine kleine Sicherheit in sich.

An einem Beispiel soll noch die Anwendung des neuen Berechnungsverfahrens gezeigt und mit der üblichen Berechnung verglichen werden: Das für den Hohlzylinder verwendete Material sei Flusstahl mit einer Fließgrenze  $\sigma_0 = 2800 \text{ kg/cm}^2$ , einem Elastizitätsmodul  $1/\alpha = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  und einer Dehnung bis zum Verfestigungsbeginn von  $\varepsilon_0 = 0,025$ . Der wirksame Innendruck betrage  $1000 \text{ kg/cm}^2$  und die gewählte Sicherheit 1,4. Unter dieser Voraussetzung hat die Dimensionierung auf Grund eines Innendruckes von  $p = 1400 \text{ kg/cm}^2$  zu erfolgen, und es wird  $p/\sigma_0 = 0,5$ .

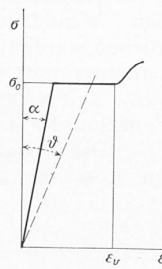


Abb. 4.

Für den offenen Hohlzylinder ergibt sich mit diesem Wert aus Diagramm Abb. 2  $b/a = 1,58$  und  $a/\partial_a = 0,31$ . Aus Gleichung (24) wird  $\varepsilon_a = 0,0043 < \varepsilon_v$ , während die übliche Berechnungsweise  $b/a = 2,755$  ergeben würde. Für den geschlossenen Hohlzylinder wird mit  $p/\sigma_0 = 0,5$  aus Diagramm Abb. 3  $b/a = 1,54$ ,  $a/\partial_a = 0,355$  und mit Gleichung (24) wird  $\varepsilon_a = 0,0038 < \varepsilon_v$ , während die übliche Berechnungsweise  $b/a = 2,75$  ergibt. Noch augenscheinlicher wird der Unterschied der beiden Dimensionierungsarten, wenn  $p/\sigma_0$  grösser als  $1/\sqrt{3}$  ist. Für diesen Wert ergibt sich nach der üblichen Berechnungsweise  $b/a = \infty$ , während nach der neuen für den offenen Hohlzylinder  $b/a = 1,69$  und für den geschlossenen  $b/a = 1,65$  ist.

Zusammenfassend lässt sich folgendes sagen: Die übliche Dimensionierung durch Innendruck beanspruchter Hohlzylinder aus zähem Material, die voraussetzt, dass die Belastungsgrenze bei jenem Innendruck liegt, der die Innenwand des Hohlzylinders bis an die Fließgrenze beansprucht, ergibt bei hohen Innendrüken Wandstärken, die entweder zu gross oder überhaupt nicht ausführbar sind. Andererseits wurde gezeigt, dass man bei einem zähen Material mit ausgesprochener Fließgrenze bis zu einem Halbmesserverhältnis von rd. 2,2 als Belastungsgrenze jenen Innendruck ansehen darf, der den ganzen Hohlzylinder bis zu seiner Aussenwand plastisch macht. Zu beachten ist dabei ausserdem, dass die grösste Dehnung im Spannungsdiagramm kleiner ist als die Dehnung des verwendeten Materials bis zum Verfestigungsbeginn. Um die Dimensionierung zu vereinfachen, wurden die gefundenen Beziehungen in Diagrammen dargestellt. Schliesslich wurde auch gezeigt, dass die Kesselformel beim geschlossenen dünnwandigen Hohlzylinder bis zu einem Halbmesserverhältnis von 1,4 gute Näherungswerte ergibt, während man sie auch schon beim dünnwandigen offenen Hohlzylinder für die Dimensionierung nicht anwenden sollte.

## Bautechnischer Luftschutz.

Von ROB. A. NAEF, Dipl. Ing., Zürich.

Es soll hier nicht die Notwendigkeit des zivilen Luftschutzes untersucht werden. Dies ist ein politisches Problem. Der Bundesrat hat durch seinen Beschluss vom 29. Sept. 1934 Stellung genommen. Damit erübrigt sich eine weitere Diskussion an diesem Orte, hingegen interessieren den Ingenieur die Anforderungen des zivilen Luftschutzes an die Bautechnik und die Möglichkeiten, diese Forderungen zu erfüllen. Im Ausland ist bereits eine umfangreiche Literatur über diese Frage erschienen. Schoszberger<sup>1)</sup> gibt ein Literaturverzeichnis mit 315 Nummern. Wir zitieren nur drei der interessantesten Bücher<sup>1) 2) 3)</sup>.

Der Luftangriff gegen das Hinterland arbeitet in der Hauptsache mit drei Mitteln: a) Brisanzbomben, b) Brandbomben, c) Chemische Kampfstoffe.

Ein absoluter Schutz der Bevölkerung und wichtiger Objekte gegen diese Kampfmittel ist unmöglich. Es kann sich nur darum handeln, zu entscheiden, wie weit der relative Schutz reichen soll. Darüber gehen die Ansichten stark auseinander. Die zitierten Autoren verlangen, dass schon bei den Bebauungsplänen die Forderungen des Luftschutzes weitgehend berücksichtigt werden. Vauthier<sup>3)</sup> sagt (pag. 219): „Il faut reconstruire les villes sur de nouvelles bases“. Schoszberger erklärt (pag. 206): „Die Bandstadt ist die Stadt der Zukunft“. Diese Auffassungen sind abzulehnen. Im günstigsten Falle würden sich diese Massnahmen erst nach Jahrzehnten auswirken. Dann werden sich die Verhältnisse so stark geändert haben, dass entweder mit Luftangriffen überhaupt nicht mehr zu rechnen ist oder die Angriffsmittel andere geworden sind. Vauthier schlägt z. B.

<sup>1)</sup> Hans Schoszberger, „Bautechnischer Luftschutz“, Bauweltverlag, Berlin 1934. (Besprochen auf S. 60 dieser Nummer. Red.)

<sup>2)</sup> Giuseppe Stellingwerff, „La Protezione dei Fabbricati dagli attacchi aerei“, Ulrico Hoepli, editore, Milano 1933.

<sup>3)</sup> Lt.-Cl. Vauthier, „Le danger aérien et l'avenir du pays“, Editions Berger-Levrault, Paris 1930.

Hochhäuser vor. Diese bieten wohl heute dem vertikalen Bombenabwurf ein kleines Ziel, werden jedoch später durch Beschussung mit Avions-Canons<sup>4)</sup> leicht zu treffen sein.

Wir glauben, dass der bautechnische Luftschutz sich auf Mittel beschränken soll, die mit möglichst geringem Kostenaufwand in kurzer Zeit durchgeführt werden können.

a) Schutz gegen Brisanzbomben: Natürlich ist auf diese Weise kein Schutz gegen Volltreffer schwerster Brisanzbomben zu erreichen. Eine Bombe von 2500 kg Gewicht, aus 5000 m Höhe abgeworfen, durchdringt nach den Formeln von Stellingwerff<sup>2)</sup> 35 m Erde oder 6,0 m Beton und nach Peres<sup>1)</sup> 21 m Erde oder 5,0 m Beton<sup>5)</sup>.

Diese Zahlen geben nur die Grössenordnung an, da einerseits die Bombengewichte und Abwurfhöhen mit den Fortschritten der Aviatik noch zunehmen können, andererseits die Formeln nur Annäherungen sind. Sie zeigen aber, dass auch mit den raffiniertesten Mitteln der Befestigungstechnik ein Schutz gegen Volltreffer sehr schwer ist. Für den Gasdruck und die Splitterwirkung in unmittelbarer Nähe der explodierenden Bombe ergeben sich ebenfalls so grosse Werte, dass Gebäude dagegen nicht zu schützen sind. Andererseits kann selbstverständlich nur eine sehr beschränkte Anzahl schwerster Bomben abgeworfen werden. Auch ist die Treffsicherheit bei Abwurf aus grosser Höhe gering, die Streuung wird bei Horizontalfly auf 4 % der Abwurfhöhe geschätzt. Die Wahrscheinlichkeit eines Volltreffers auf ein bestimmtes Gebäude ist also sehr gering.

Die grösste Gefahr

für die Gebäude bedeutet der Luftstoss, der nach den Versuchen der chemisch-technischen Reichsanstalt in Berlin<sup>1)</sup> für 1000 kg Sprengstoff in 20 m Entfernung einen Druck von  $p_m = 50\,000 \text{ kg/m}^2$  und in 1000 m Entfernung einen Druck von 190  $\text{kg/m}^2$  ergibt. Abb. 1 zeigt  $p_m$  in Funktion der Entfernung  $d$  vom Explosionsherd.

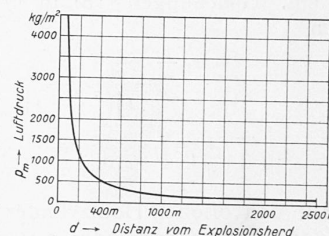


Abb. 1. Luftstoss einer 1000 kg Bombe (nach Schoszberger).

Abb. 2 zeigt  $p$  in Funktion der Zeit für  $d = 500 \text{ m}$ . Dieser Druck kann nicht unmittelbar mit dem Winddruck verglichen werden, da der Luftstoss nur äusserst kurze Zeit wirksam ist. Abb. 2 zeigt nach<sup>1)</sup> den Druck  $p$  in Funktion der Zeit, für 1000 kg Sprengstoff und  $d = 500 \text{ m}$ .

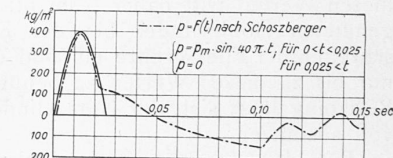


Abb. 2. Luftstoss  $p$  in Funktion der Zeit für  $d = 500 \text{ m}$ .

Die erwähnten Versuche haben ergeben, dass ein Luftstoss von 2000  $\text{kg/m}^2$  die Standfestigkeit der Gebäude nicht gefährdet.

Die Beanspruchungen durch den Luftstoss lassen sich für einfache Fälle auch theoretisch erfassen. Wir untersuchen einen einfachen Balken nach Abb. 3.

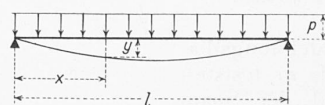


Abb. 3

Wir setzen (Abb. 2)

$$p = p_m \sin \alpha t, \quad \alpha = 40\pi, \quad \text{für } 0 \leq t \leq 0,025$$

$$p = 0 \quad \text{für } 0,025 \leq t$$

und erhalten nach der Grundgleichung der Dynamik folgende partielle Differentialgleichungen:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + J E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p_m \sin \alpha t, \quad 0 \leq t \leq T = 0,025 \text{ sec} \quad (1)$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + J E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad T \leq t \quad (2)$$

<sup>4)</sup> Vergl. hierüber „L'illustration“ vom 17. Nov. 1934, pag. 383.

<sup>5)</sup> Dr. L. Bendel hat die wichtigsten Formeln in seinen „Merkblättern für die baulichen Luftschutzmassnahmen“ (vgl. „SBZ“ Bd. 104, Seite 213) zusammengestellt. Die obigen Zahlen gelten für homogene und unendlich grosse Ziele.