

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 105/106 (1935)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis  
**Autor:** Stüssi, Fritz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47491>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

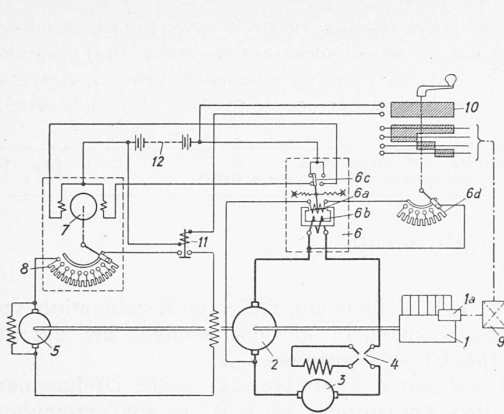


Abb. 1. Leistungsrelaissteuerung Brown Boveri.  
1 Dieselmotor, 1a Fliehkraftregler, 2 Hauptgenerator, 3 Fahrmotor, 4 Wendeschalter, 5 Hilfsgenerator, 6 Leistungsrelais, 6a Spannungsspule, 6b Stromspule, 6c Schaltkontakt, 6d Vorschaltwiderstände zur Spannungsspule, 7 Antrieb des Feldreglers, 8 Feldregler mit Widerständen, 9 Drehzahlsteller, 10 Steuerkontroller.

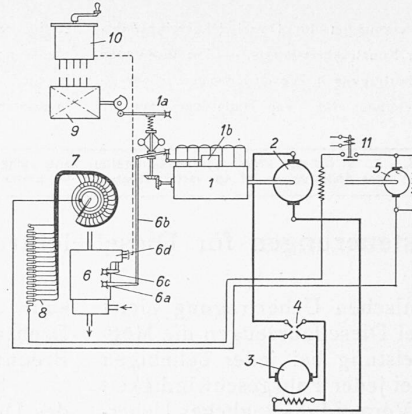


Abb. 2. Servofeldreglersteuerung Brown Boveri.  
1b Brennstoffpumpe, 6 Oeldruck-Servomotor, 6a Angriffspunkt d. Steuerschiebers, 6b Verbindung z. Brennstoffreguliergestänge, 6c Angriffspunkt der Füllungs-(Drehmoment-)Verstellung, 6d Elektr. Apparat zur Füllungs-(Drehmoment-)Einstellung, 7 Feldregler, 8 Regulierwiderstände. Uebrigere Bezeichngn. wie bei Abb. 1.

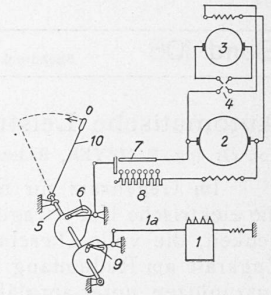


Abb. 3. Steuerung nach Patent No. 171216.  
1 Brennstoffpumpe, 1a Füllungsreguliergestänge, 5 Steuerwelle, 6 Drehzahl-(Widerstands-)Reguliernut, 9 Füllungs-Reguliernut, 10 Fahrhebel. Uebrigere Bezeichnungen wie bei Abb. 2.

damit Generatorstrom und -leistung, so bewegt sich das Drehsystem in die eine Endlage und schliesst dadurch den Stromkreis des „Ab“-Magnetes des Feldreglerantriebes. Der Feldregler reduziert nun den Erregerstrom und dadurch die Generatorspannung, bis die Leistung wieder auf ihren Sollwert gesunken ist. Gerade umgekehrt ist die Wirkungsweise bei einem Sinken des Generatorstromes. Die Einstellung der verschiedenen Leistungsstufen geschieht durch Aenderung der Konstanten des Leistungsrelais, d. h. entweder durch Aenderung der Gegenkraft zum Drehsystem oder durch Vorschalten von abgestimmten Vorschaltwiderständen 6d in den Stromkreis der Spannungsspule. Die Einstellung der Drehzahl erfolgt in bekannter Weise durch Aenderung der Federspannung des Fliehkraftreglers, wozu in der Regel ein elektrisch betätigter Drehzahlsteller 9 erforderlich ist. Das Leistungsrelais kann mit einer Wirkungsgrad-Kompensationseinrichtung gebaut werden, sodass es nicht auf konstante Abgabe- sondern auf konstante Aufnahmeleistung des Generators reguliert. Da der Dieselmotor ausser dem Generator noch eine ganze Anzahl von Hilfsmaschinen (Ventilatoren, Kompressoren, Hilfsgeneratoren) anzutreiben hat, deren Leistungsaufnahme stark variabel ist, ist damit die Konstanz der Leistung an der Dieselmotorwelle noch nicht gewährleistet. Diese Steuerung erfüllt also die aufgestellten Bedingungen nicht ganz.

Dieser Umstand führte zur Entwicklung der Steuerung gemäss Schema Abb. 2. Hier wird der Feldregler 7 durch einen Oeldruck-Servomotor 6 betätigt. Der Steuerschieber dieses Servomotors ist in der Weise mit dem Reguliergestänge der Brennstoffpumpe gekuppelt, dass er in der Abschlusstellung, und der Feldregler im Ruhezustand verharrt, solange die Füllung den Sollwert besitzt. Wird nun durch eine kleine Belastungsänderung dieser Gleichgewichtszustand gestört, so reguliert der Feldregler im Sinne der Wiederherstellung des ursprünglichen Füllungsgrades. Die Einstellung der verschiedenen Füllungsstufen wird dadurch bewerkstelligt, dass die Abschlusstellung des Steuerschiebers verschiedenen Stellungen des Brennstoff-Reguliergestänges zugeordnet wird. Da diese Steuerung sowohl auf konstante Drehzahl als auch auf konstante Füllung reguliert, kann sie als die ideale Lösung der Leistungssteuerung bezeichnet werden.

Als Beispiel einer Steuerung, bei der die Füllung durch direkte Einstellung an der Brennstoffpumpe konstant gehalten und die Drehzahl durch Aenderung der Generatorerregung reguliert wird, sei noch die Steuerung nach Patent No. 171216 gemäss Schema Abb. 3 angeführt. Solange bei dieser Steuerung der Fahrhebel 10 auf ein und derselben Fahrstufe bleibt, ist das Brennstoffreguliergestänge in einer bestimmten Stellung festgehalten. Zur Einstellung der zur entsprechenden Füllung gehörigen

Drehzahl verwendet man den Umstand, dass die Drehzahl des hier anzuwendenden, schwach gesättigten, auf dem geradlinigen Teil der Magnetisierungskurve arbeitenden und daher spannungslabilen Nebenschlussgenerators unabhängig von der Leistungsabgabe dem Widerstand im Erregungsstromkreis ungefähr proportional ist. Durch Einstellung des Vorschaltwiderstandes 8 zur Nebenschlusswicklung kann man also jeder Füllung eine oder mehrere Drehzahlen zuordnen. Die Arbeitsweise dieser Steuerung ist dann die folgende: Steigt bei unveränderter Stellung des Fahrhebels der Fahrwiderstand und damit der Strom und das vom Generator aufgenommene Drehmoment, so sinkt zufolge der unverändert gelassenen Füllung die Drehzahl etwas ab. Bei der schwachen Sättigung des Generators hat aber schon ein geringer Drehzahlabfall eine bedeutende Schwächung des Feldes und des aufgenommenen Drehmomentes zur Folge, sodass sich das Gleichgewicht bei einer wenig geringeren Drehzahl wieder einstellt. Man erkennt daraus, dass die Drehzahl und damit auch die Dieselmotorleistung bei dieser Steuerung nicht genau konstant gehalten wird, da ja die Drehzahländerung das einzige Mittel zur Feldregulierung und daher unerlässlich ist. Das Mass dieser Drehzahl- und Leistungsschwankung hält sich etwa zwischen 5 und 10%, sodass auch diese Steuerung noch als Leistungssteuerung angesprochen werden kann, obwohl sie die an eine solche gestellten Anforderungen nicht restlos erfüllt.

## Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis.

Von Dr. sc. techn. FRITZ STÜSSI, Privatdozent an der E. T. H., Zürich.  
Schluss von Seite 122.

Als erste Forderung der dynamischen Problemstellung scheint diejenige allgemein anerkannt zu werden, dass unter bewegten Lasten Resonanzerscheinungen zu vermeiden sind. Dies erfordert die Kenntnis der Eigenschwingungen, besonders der Grundschnwingungszahl, als erster dynamischer Charakteristik eines Tragwerks. Bei einer Verminderung der allgemeinen Tragwerksicherheit, wie sie eine Erhöhung der zulässigen Beanspruchungen darstellt, können auch Schwingungszustände, die von der Resonanzanlage noch entfernt sind, zu unerwünschten Ueberbeanspruchungen führen. Die Kenntnis der Grundschnwingungszahl ermöglicht Resonanzvermeidung, sowie Abschätzung dieser dynamischen Zusatzbeanspruchungen.

### Knicklast und Grundschnwingungszahl von Bogenträgern.

1. Sowohl für die Bestimmung der Knicklast gedrückter Stäbe wie zur Berechnung der Grundschnwingungszahl vollwandiger Balken sind praktisch wertvolle Berechnungs-

verfahren auf dem Prinzip der fortgesetzten Annäherung aufgestellt worden: von L. Vianello<sup>16)</sup> für die Knicklast, für die Grundschnitzungszahl von Prof. A. Stodola.<sup>17)</sup> Bei beiden Verfahren wird auf Grund einer angenommenen Formänderungskurve eine Biegelinie berechnet, aus deren Gleichsetzung mit der angenommenen Kurve an einer Trägerstelle sich ein erster Annäherungswert der Knicklast, bzw. der Grundschnitzungslast ergibt. Wiederholungen dieser Operation ergeben mit guter Konvergenz rasch genügend genaue Werte. Die formelle Uebereinstimmung der beiden Verfahren ist keine zufällige, sondern ursächlich darin begründet, dass die ihnen zu Grunde liegenden Differentialgleichungen die Gleichgewichtsbedingungen eines verformten Balkenelementes zwischen den inneren Spannungen und den äusseren Kräften (Knicklast), bzw. den Trägheitskräften darstellen.<sup>18)</sup>

Die Uebertragung der beiden Methoden auf vollwandige Bogenträger lässt sich recht einfach durchführen, wenn die Biegelinien mit den bekannten Methoden der Baustatik bestimmt werden. Dabei wird die übliche Voraussetzung einer im Verhältnis zum Krümmungsradius kleinen Trägerhöhe getroffen, sodass mit einer linearen Spannungsverteilung gerechnet werden kann. Die bei der Anwendung des Iterationsverfahrens erforderliche oft mehrfache Wiederholung der Rechenoperation lässt sich in der Regel durch eine Betrachtung der Energieverhältnisse, bzw. der Formänderungsarbeiten des ganzen Bogens vermeiden.

Der Begriff der Knicklast ist genau genommen an ein momentenfreies, auf reinen Druck beanspruchtes Traglelement gebunden. Bei statisch unbestimmten Bogenträgern ist jedoch auch bei einer der Drucklinie angepassten Formgebung ein momentenfreier Zustand wegen der Verkürzung der Bogenaxe nur näherungsweise erfüllt. Da aber diese Zusatzmomente bei symmetrischen Bogen symmetrisch verlaufen, der Knickvorgang sich aber, wenigstens bei Bogen ohne Scheitelgelenk, gegensymmetrisch abspielt, ist leicht einzusehen, dass der Einfluss dieser Momente, auch ohne dass man die Voraussetzung unbegrenzter Festigkeit trifft, nicht in Betracht fällt. Es ist hier noch zu bemerken, dass die eigentliche Knickgefahr von vollbelasteten Bogen praktisch wohl kaum massgebend sein wird. Dagegen ist bei schlanken Bogen eine wesentliche Vergrösserung der grössten Randspannungen bei ungefähr halbseitiger Nutzlast infolge der elastischen Formänderungen festzustellen, wodurch die Sicherheit oft erheblich herabgesetzt wird. Diese Zusatzbeanspruchungen lassen sich mit Hilfe des theoretischen Wertes der Knicklast sehr genau abschätzen. Darin liegt nach meiner Meinung vorwiegend die praktische Bedeutung der Knicklast von Bogenträgern.

2. Bei einem geraden Stab lautet die zur Bestimmung der Knicklast notwendige Differentialgleichung

$$E J \frac{d^2 y}{dx^2} = - P y, \dots (5)$$

wenn mit  $y$  die sehr kleinen Ausbiegungen unmittelbar vor dem Knicken bezeichnet werden. Beachten wir, dass bei kleinen Ausbiegungen  $y$  deren zweite Ableitungen gleich dem reziproken Wert des Krümmungsradius  $\rho$  sind, so ergibt sich aus

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{2 \sigma}{h E}$$

( $\sigma$  = Randspannung,  $h$  = Trägerhöhe) die Bedeutung der linken Seite von Gl. 5 zu  $W \sigma$ , d. h. gleich dem inneren Moment  $M_i$  der Querschnittbeanspruchungen.  $P y$  ist das Moment  $M_a$  der äusseren Belastung  $P$ . Die Differentialgleichung Gl. 5 sagt somit aus, dass unmittelbar vor dem Ausknicken Gleichgewicht zwischen den inneren Spannungen und den äusseren Belastungen bestehen müsse:

$$M_i + M_a = 0. \dots (6)$$

<sup>16)</sup> Z. VDI 1898.

<sup>17)</sup> A. Stodola: Dampf- und Gasturbinen, 6. Aufl., Berlin 1922.

<sup>18)</sup> Es ist in diesem Zusammenhang interessant, festzustellen, dass schon L. Euler im Anhang „De Curvis elasticis“ zu seinem „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes“, Lausanne & Genevae MDCCCLIV, nicht nur die Knicklast des elastischen Stabes, sondern auch seine Eigenschwingungen untersucht hat.

Ist  $P$  kleiner als die Knicklast  $P_{kr.}$ , so muss eine Bewegung eintreten, bei der die Ausbiegungen  $y$  verschwinden. Für  $P > P_{kr.}$  erfolgt die Bewegung im Sinne des Ausknickens. Den Grenzfall zwischen den beiden Bewegungsformen bildet somit der Gleichgewichtsfall oder  $P = P_{kr.}$ . Der Rechnungsgang zur Bestimmung der Knicklast nach Vianello ist durch Gl. 5 unmittelbar vorgezeichnet: man nimmt eine mit den Auflagerbedingungen verträgliche Ausbiegungskurve  $y_0$  beliebig an und bestimmt, am einfachsten als Seilkurve zu  $P y_0 : E J$ , die daraus entstehende Ausbiegung  $y_1$ . Die Gleichsetzung  $y_1 = y_0$  an einer Stelle des Stabes, z. B. in Stabmitte liefert den Wert von  $P_{kr.}$  in erster Annäherung. Zur Bestimmung eines genaueren Wertes von  $P_{kr.}$  ist einfach die Operation ausgehend von  $y_1$  zu wiederholen, bis zwei aufeinanderfolgende Ausbiegungskurven  $y$  einander genügend ähnlich sind. Dabei ist die Konvergenz eine gute.

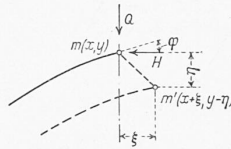


Abb. 8.

Genau die gleichen Ueberlegungen gelten auch beim Bogenträger, nur mit dem Unterschied, dass hier die Richtung der Ausbiegungen nicht von vornherein gegeben ist. Wir zerlegen sie deshalb in die Komponenten  $\eta$  und  $\xi$ . Nach Abb. 8 entsteht durch die Verformung  $\eta, \xi$  zunächst das Biegemoment (abgesehen von Gliedern höherer Kleinheitsordnung)

$$M_{0, a} = H \eta + Q \xi, \dots (7)$$

das bei Druckliniengewölben in

$$M_{0, a} = H(\eta + \text{tg } \varphi \xi) \dots (7a)$$

übergeht. Je nach der Auflagerung oder der Art der Verformung können diese  $M_0$ -Momente eine Änderung  $\Delta H$  des Horizontalschubes  $H$  und Einspannmomente  $X_A, X_B$  bewirken, sodass das Gesamtmoment

$$M_a = M_{0, a} - \Delta H y + \Sigma X M_x \dots (8)$$

beträgt.  $\Delta H$  ergibt sich, je nachdem ob ein statisch bestimmter oder unbestimmter Bogen vorliegt, aus einer Gleichgewichts- oder Elastizitätsbedingung. Die überzähligen Einspannmomente  $X$  sind wie üblich mit der entsprechenden Elastizitätsbedingung zu bestimmen. Der Wert des kritischen Horizontalschubes  $H_{kr.}$  ergibt sich nun daraus, dass die infolge einer angenommenen kleinen Verformung  $\eta_0, \xi_0$  entstehenden Momente  $M_a$  und Längskräfte ( $\Delta H$ ) Verformungen  $\eta_1, \xi_1$  verursachen, die in jedem Bogenpunkt mit den Werten  $\eta_0, \xi_0$  übereinstimmen müssen. Diese Bedingung

$$\eta_0 = \eta_1, \xi_0 = \xi_1 \dots (9)$$

ist der Ausdruck für das unmittelbar vor dem Ausknicken bestehende Gleichgewicht zwischen den inneren Spannungen und den äusseren Momenten und Längskräften.

Die Biegelinien des Bogens werden am einfachsten als Seilpolygone zu den in Richtung der gesuchten Verschiebungen wirkenden elastischen Gewichten  $K_m$  berechnet. Die Werte  $K_m$  infolge der Biegemomente ergeben sich, unter Beachtung, dass

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi} \dots (10)$$

und mit der Bezeichnung

$$M_m' = M_m \frac{E_c J_c}{E_m J_m} \dots (11)$$

genauer als nach der üblichen Trapezformel, unter Annahme eines parabelförmigen Verlaufs von  $M'$ :  $\cos \varphi$  zwischen  $m-1$  und  $m+1$  für einen Zwischenknotenpunkt  $m$  zu

$$K_m = \frac{\Delta x}{12} \left( \frac{M_{m-1}'}{\cos \varphi_{m-1}} + 10 \frac{M_m'}{\cos \varphi_m} + \frac{M_{m+1}'}{\cos \varphi_{m+1}} \right) \dots (12)$$

Analog kann für einen Endknotenpunkt ein entsprechender Wert bestimmt werden. Es erweist sich bei der praktischen Berechnung als sehr bequem, eine genau genommen nur für sehr kleine Bogenelemente geltende Beziehung (Abb. 9) einzuführen:

$$\Delta \xi_M = \Delta \eta_M \frac{\Delta y}{\Delta x}, \dots (13)$$

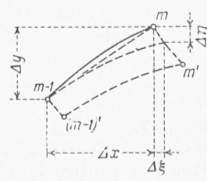


Abb. 9.

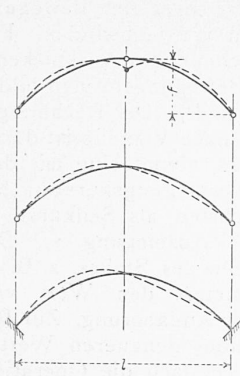


Abb. 10.

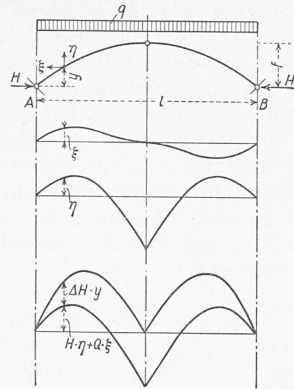


Abb. 11.

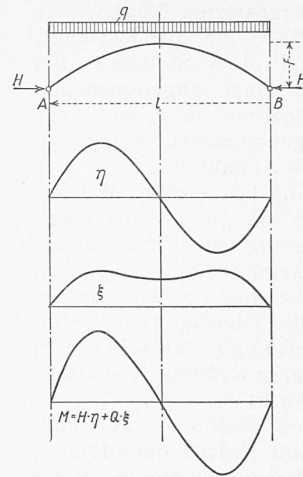


Abb. 12.

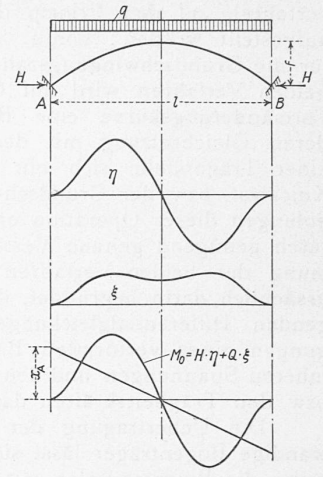


Abb. 13.

die sich auf den überwiegenden oder in vielen Fällen allein in Betracht kommenden Einfluss der Momente auf die Verschiebungen bezieht. Gl. 13 ergibt sich auch aus der Methode der elastischen Gewichte bei polygonal angenommener Bogenaxe.

Um den kleinsten Wert des kritischen Horizontalschubes  $H_{kr.}$  zu erhalten, sind diejenigen Bogenverformungen  $\eta_0, \xi_0$  anzunehmen, die die grössten Formänderungen  $\eta_1, \xi_1$  ergeben. Die Form dieser Kurven ist in Abb. 10 für die gebräuchlichen Bogentypen skizziert. Bei der Annahme der Verschiebungen  $\eta_0, \xi_0$  ist Gl. 13 zu beachten, d. h. es ist je nach den Randbedingungen  $\eta_0$  oder  $\xi_0$  frei anzunehmen, womit auch die andere Verschiebungskomponente festgelegt ist. Beim Dreigelenkbogen ist infolge der Symmetrie der massgebenden Verformung im Scheitel die wagrechte Verbindung  $\xi_s = 0$ ; hier ist  $\xi_0$  frei anzunehmen. Die Änderung  $\Delta H$  des Horizontalschubes infolge der Verformung ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung, dass das Moment beim Scheitelgelenk verschwinden muss (Abb. 11). Beim Zweigelenkbogen ist die massgebende Verformung gegensymmetrisch, wegen  $\eta_s = 0$  ist hier  $\eta_0$  frei anzunehmen. Der Horizontalschub wird von der Verformung nicht beeinflusst:  $\Delta H = 0$  (Abb. 12). Beim gelenklosen Bogen (Abb. 13) liegen die Verhältnisse grundsätzlich wie beim Zweigelenkbogen, nur treten hier überzählige Einspannmomente an den Kämpfern auf.

Der Zusammenhang zwischen den angenommenen Verformungen  $\eta_0, \xi_0$  und den daraus berechneten,  $\eta_1, \xi_1$ , stellt sich allgemein in der Form

$$\eta_1 = \frac{1}{\alpha_k} \frac{H l^2}{E J_c} \eta_0; \quad \xi_1 = \frac{1}{\alpha_k} \frac{H l^2}{E J_c} \cdot \xi_0$$

dar. Gl. (9) liefert somit den Wert des kritischen Horizontalschubes zu

$$H_{kr.} = \alpha_k \frac{E J_c}{l^2} \dots \dots \dots (14)$$

Der Vergleich dieser Gl. (14) mit der Eulerschen Knickformel für den gelenkig gelagerten geraden Druckstab liefert die „Vergleichslänge“  $l_k$ :

$$l_k = \sqrt{\frac{\pi^2}{\alpha_k}} l,$$

für die ein gerader Stab mit der Biegesteifigkeit  $E J_c$  die Knickfestigkeit  $H_{kr.}$  besitzen würde. Für Bogen mit  $F : \cos \varphi = \text{konstant}$ , d. h. bei konstanter Schwerpunktspannung, kann aus dieser Beziehung auch direkt die Knicklast im unelastischen Bereich bestimmt werden. Ist dagegen die Schwerpunktspannung stark veränderlich, so ist ein genauerer Wert von  $H_{kr.}$  mit dem skizzierten Verfahren derart zu bestimmen, dass in Gl. (11) statt des Elastizitätsmoduls  $E_m$  der Engesser-Kármánsche Knickmodul  $T_k$  eingeführt wird. Dabei ist die Rechnung solange zu wiederholen, bis angenommener und aus  $H_{kr.}$  berechneter Knickmodul übereinstimmen.

3. Von den möglichen Eigenschwingungen interessiert uns in erster Linie diejenige kleinster Frequenz, d. h. die Grundschiwingung. Während dieses harmonischen Schwin-

gungsvorganges, dessen Kreisfrequenz  $p$  sei, treten Trägheitskräfte  $u$  auf, die wir in die Komponenten

$$u_\eta = \frac{q}{g} p^2 \eta, \quad u_\xi = \frac{q}{g} p^2 \xi \dots \dots (15)$$

zerlegen. Infolge dieser Belastungen  $u$ , die längs der Bogenaxe verteilt sind, entstehen die Biegemomente

$$M_u = M_{u_\eta} + M_{u_\xi}, \dots \dots (16)$$

die an jeder Stelle des Bogens mit den Momenten  $M_i$  der innern Spannungen und mit den während der Verformung durch die Kräfte  $H$  und  $Q$ , ev. auch  $\Delta H$  entstehenden Momenten  $M_a$  im Gleichgewicht sein müssen:

$$M_i + M_a + M_u = 0 \dots \dots (17)$$

Dies bedeutet, in Analogie zu früher, dass bei einer Verformung  $\eta_0, \xi_0$  und damit gegebenen Momenten  $M_a$  und

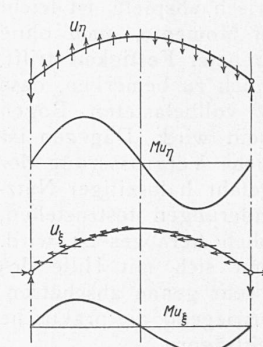


Abb. 14.

$M_a$  die durch diese zusammen verursachte Verformung  $\eta_1, \xi_1$  wieder mit  $\eta_0, \xi_0$  übereinstimmen muss. Aus dieser Bedingung ist die Kreisfrequenz  $p$  oder die sekundliche Schwingungszahl  $\nu = p : 2\pi$  bestimmbar. Da wir die kleinste Schwingungszahl suchen, ist auch hier diejenige Verformung  $\eta_0, \xi_0$  massgebend, die die grössten Ausbiegungen  $\eta_1, \xi_1$  verursacht. Abb. 10 stellt auch hier die allgemeine Form dieser Ausbiegungen dar. In Abb. 14 sind für den Zweigelenkbogen die

Momente  $M_{u_\eta}$  und  $M_{u_\xi}$  skizziert. Die Verformungen  $\eta_1, \xi_1$  ergeben sich in der Form

$$\eta_1 = \frac{1}{\alpha_k'} \frac{H l^2}{E J_c} \eta_0 + \frac{1}{\alpha_s^2} \frac{q}{g} p^2 \frac{l^4}{E J_c} \eta_0 \dots \dots (18)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\alpha_k'} \frac{H l^2}{E J_c} \xi_0 + \frac{1}{\alpha_s^2} \frac{q}{g} p^2 \frac{l^4}{E J_c} \xi_0$$

Aus der Gleichsetzung  $\eta_1 = \eta_0, \xi_1 = \xi_0$  ergibt sich die Kreisfrequenz in erster Näherung zu

$$p^2 = \alpha_s^2 \frac{E J_c g}{q l^4} \left( 1 - \frac{H l^2}{\alpha_k' E J_c} \right) \dots \dots (19)$$

Um die zur Bestimmung eines genaueren Wertes von  $p$  durchzuführende Wiederholung der Berechnung ausführen zu können, sind die beiden Anteile, aus denen sich die Kurven  $\eta_1, \xi_1$  zusammensetzen, zu addieren. Dazu setzen wir vorübergehend

$$\frac{H g}{p^2 q l^2} = \mu \dots \dots (20)$$

Die neuen Ausgangskurven setzen sich somit aus dem „Schwingungsanteil“ und dem  $\mu$ -fachen „Knickanteil“ der ersten Berechnung zusammen.

Bei der Durchführung derartiger Berechnungen zeigt sich, dass die Werte für die Knicklast und die Grund-

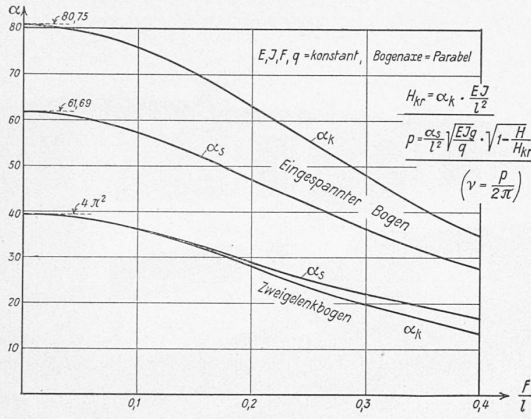


Abb. 15.

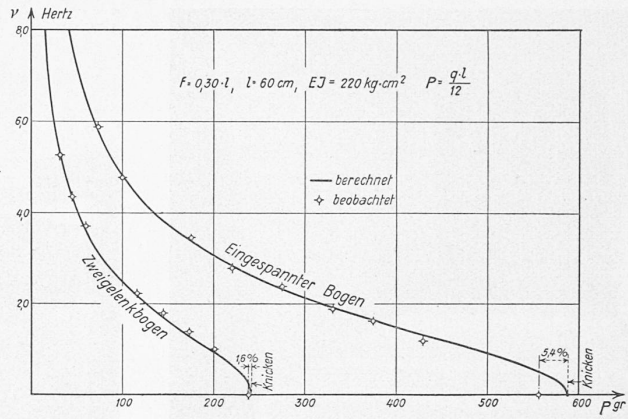


Abb. 16.

schwingungszahl auch dann mit ausreichender Genauigkeit erhalten werden, wenn die angenommenen Verformungen  $\eta_0, \xi_0$  auch noch nicht genau mit der Form der durch wiederholte Berechnung bestimmbarer Lösungskurven übereinstimmen. Für symmetrische Belastungen ergibt sich daraus, dass die Werte  $\alpha_k$  (Gl. 14) und  $\alpha'_k$  (Gl. 18) einander gleichgesetzt werden dürfen, trotzdem die zugehörigen Kurven nur der allgemeinen Form nach, nicht aber in ihrem genauen Verlauf miteinander übereinstimmen. Damit ergibt sich hier die Kreisfrequenz zu

$$p = \frac{\alpha_s}{l^2} \sqrt{\frac{E J_c g}{q}} \sqrt{1 - \frac{H}{H_{kr}}} \quad (21)$$

wenn  $H_{kr}$  den unter Voraussetzung konstanten Elastizitätsmoduls bestimmten kritischen Horizontalschub bedeutet. Für  $H = H_{kr}$  ist  $p = 0$ , was auch direkt aus der Gleichgewichtsbedingung Gl. (17) hervorgeht: falls Gl. (6) (Knicken) erfüllt ist, muss  $M_u$  und damit  $p^2$  null sein. Der Knickvorgang kann somit als eine Schwingung von unendlich kleiner Frequenz gedeutet werden, bei der der Bogen nicht mehr in seine Ruhelage zurückkehrt.

In Abb. 15 sind für Bogen konstanten Querschnitts und parabelförmiger Bogenaxe bei gleichmässig verteilter Belastung  $q$  die Vorzahlen  $\alpha_k$  und  $\alpha_s$  in Funktion des Pfeilverhältnisses aufgetragen. Abb. 16 zeigt das Resultat zweier Modellversuche<sup>19)</sup> mit Bogen aus Flacheisen 12 · 1 mm bei 60 cm Spannweite. Die Übereinstimmung von Rechnung (Gl. 21) und Versuch darf als sehr gut bezeichnet werden, wenn man bedenkt, dass infolge unvermeidlicher Ausführungsungenauigkeiten die tatsächliche Knicklast etwas unter der rechnerischen liegen muss. Beim Zweigelenkbogen scheinen Knicklast und Schwingungszahlen durch kleine Reibungseinflüsse bei den Gelenken etwas erhöht zu sein.

4. Die zur Bestimmung von genügend genauen Werten von  $p$  und  $H_{kr}$  oft erforderliche Wiederholung der Berechnung kann ersetzt werden durch eine Energiebetrachtung, sodass sich die Untersuchung praktisch auf einen Rechnungsgang beschränken kann. Wie dieses Kombinationsverfahren bei der Bestimmung der Grundschnwingungszahl durchzuführen ist, wurde bereits früher angegeben<sup>20)</sup>, sodass wir uns hier auf die beim Bogen notwendigen Ergänzungen beschränken können. Der Grösstwert der kinetischen Energie beim Durchgang durch die statische Gleichgewichtslage wird bei Zerlegung des Schwingungsausschlages in seine Komponenten  $\eta_1$  und  $\xi_1$  erhalten zu

$$\max E_k = \frac{p^2}{2g} \left( \int_0^l q \eta_1^2 ds + \int_0^l q \xi_1^2 ds \right).$$

Analog finden wir den Grösstwert der potentiellen Energie im Moment der grössten Ausbiegung als Arbeit der Belastungen  $u$  während der Formänderungen zu

<sup>19)</sup> Versuchsdurchführung von Dr. C. Kollbrunner.

<sup>20)</sup> F. Stüssi: Zur Berechnung der Grundschnwingungszahl vollwandiger Träger. „SBZ“ Band 104, Seite 189\*, 27. Oktober 1934.

$$\max E_p = \frac{1}{2} \int_0^l u \eta_1 ds + \frac{1}{2} \int_0^l u \xi_1 ds.$$

Aus  $E_k + E_p = \text{konstant}$  (Energiesumme = konstant) folgt

$$p^2 = g \frac{\int_0^l u \eta_1 ds + \int_0^l u \xi_1 ds}{\int_0^l q \eta_1^2 ds + \int_0^l q \xi_1^2 ds} \quad (22)$$

Die Formänderungen  $\eta_1, \xi_1$  enthalten auch den Einfluss der Momente  $M_a$ , unter Ausführung der Addition mit Hilfe von Gl. (20). Andererseits ist die genauere Mittelwertbildung, als die sich die Energiemethode darstellt, auch zutreffend, wenn nur der Einfluss der Momente  $M_u$  berücksichtigt und der Einfluss der Momente  $M_a$  nach Gl. (21) eingeführt wird. Bei der Auswertung ist es bequem, unter Beachtung der Gl. (10) über die Spannweite  $l$  statt über die Bogenlänge zu integrieren (Flächenberechnung).

Auch die Bestimmung des kritischen Horizontalschubes kann durch eine ähnliche Betrachtung abgekürzt werden, indem wir, statt der Gleichsetzung der Formänderungen an einer Trägerstelle, die Gleichheit von Formänderungsarbeiten, die sich über die ganze Bogenlänge erstrecken, als Ausdruck des Gleichgewichts einführen. Gehen wir von den berechneten Ausbiegungen  $\eta_1, \xi_1$  aus, so können wir das innere Moment  $M_i$ , das diese Formänderungen verursacht hat, dem Wert

$M_i = M_{0,i} - \Delta H' \gamma + \sum X M_x$ , wobei  $M_{0,i} = H' (\eta_0 + \xi_0 \text{tg } \varphi)$  gleichsetzen. Da nur die Form der Kurven  $\eta, \xi$  von Bedeutung ist, kann  $H'$  beliebig, etwa  $H' = 1$ , angenommen werden. Mit den Ausbiegungen  $\eta_1, \xi_1$  entsteht analog das äussere Moment mit

$$M_{0,a} = H (\eta_1 + \xi_1 \text{tg } \varphi).$$

Aus der Gleichsetzung der Formänderungsarbeiten  $A_{ii} = A_{ai}$ , d. h. aus

$$\int_0^l \frac{M_i^2}{EJ} ds = \int_0^l \frac{M_a M_i}{EJ} ds$$

für den Einfluss der Momente ergibt sich der gesuchte, praktisch wohl stets genügend genaue Wert des kritischen Horizontalschubes. Für  $\Delta H = 0$  (Zweigelenkbogen und gelenkloser Bogen) folgt

$$H_{kr} = \frac{\int_0^l \frac{M_{0,i} M_i}{EJ \cos \varphi} dx}{\int_0^l (\eta_1 + \xi_1 \text{tg } \varphi) \frac{M_i}{EJ \cos \varphi} dx} \quad (23)$$

Dabei wurde von dem Satz Gebrauch gemacht, dass bei der Bestimmung der Formänderungsarbeit der Belastungs- oder der Verschiebungszustand im statisch bestimmten Grundsystem eingeführt werden darf. Dies ist hier deshalb wertvoll, weil damit in Zähler und Nenner ähnliche Flächen entstehen, sodass eine eventuelle Ungenauigkeit in der Flächenberechnung (z. B. mit der Simpsonschen Regel) kompensiert wird.

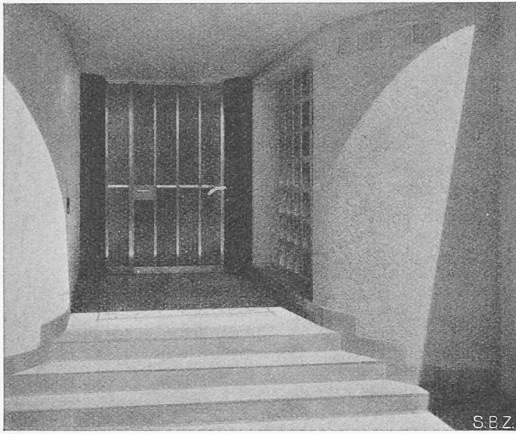


Abb. 2. Haupteingang an der Südostseite, rechts Garagenflügel.

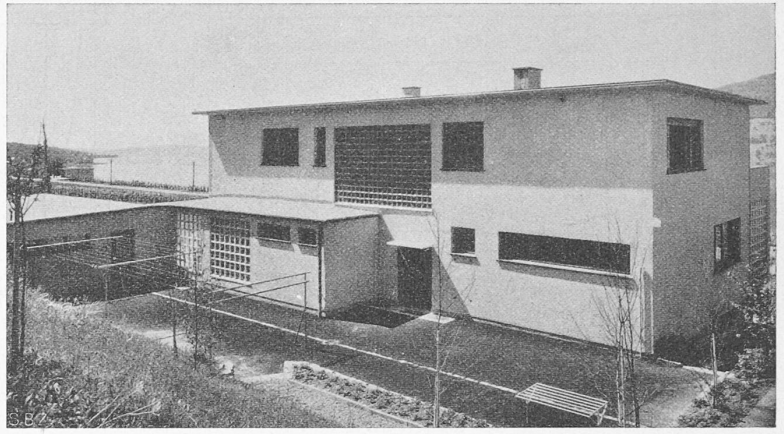


Abb. 3. Wirtschaftshof auf der Bergseite, direkter Eingang zur Küche.

Damit kann die Berechnung von Knicklast und Grundschwingungszahl, dieser beiden für die Beurteilung der Arbeitsweise von Bogenträgern wichtigen und charakteristischen Grössen, in der Regel in einem Rechnungsgang durchgeführt werden. Da je zwei Werte für  $p$  bzw.  $H_{kr}$  erhalten werden, lässt sich durch deren Vergleich die Güte der Approximation abschätzen. Die nach Gl. (22) und (23) erhaltenen Werte sind theoretisch stets etwas zu gross; ihr Fehler beträgt nur ein Bruchteil des Fehlers der aus dem Vergleich der einzelnen Formänderungen z. B. im Bogenviertel erhaltenen Werte.

5. Es sei noch der Einfluss der Systemverformungen auf die grössten Randspannungen abgeschätzt. Denken wir uns einen extrem schlanken Zweigelenkbogen, bei dem der Einfluss der Längskräfte auf die Verschiebungsgrössen vernachlässigt werden darf, so entsteht unter der massgebenden Anordnung halbseitiger Nutzlast eine gegen-symmetrische Momentenfläche  $M_0$ . Die dadurch hervorgerufenen Formänderungen  $\eta$  und  $\xi$  verlaufen der all-gemeinen Form nach wie die bei der Bestimmung der Knicklast erhaltenen entsprechenden Kurven. Setzen wir noch voraus, die Nutzlast  $p$  sei klein im Verhältnis zum Eigengewicht, sodass wir angenähert setzen können

$$\frac{Q}{H} = \text{tg } \varphi,$$

so verläuft die durch die Formänderungen hervorgerufene Momentenfläche

$$\Delta M_1 = H(\eta + \xi \text{tg } \varphi)$$

wieder gegensymmetrisch. Führen wir die Rechnung durch, so finden wir mit bemerkenswerter Genauigkeit den Zusammenhang

$$\Delta M_1 = M_0 \frac{H}{H_{kr}} = \alpha M_0,$$

wobei  $H_{kr}$  wieder den unter Voraussetzung konstanten Elastizitätsmoduls bestimmten Wert des kritischen Horizontalschubes bedeutet. Die Momente  $\Delta M_1$  erzeugen ihrerseits wieder Formänderungen und damit Zusatzmomente  $\Delta M_2$

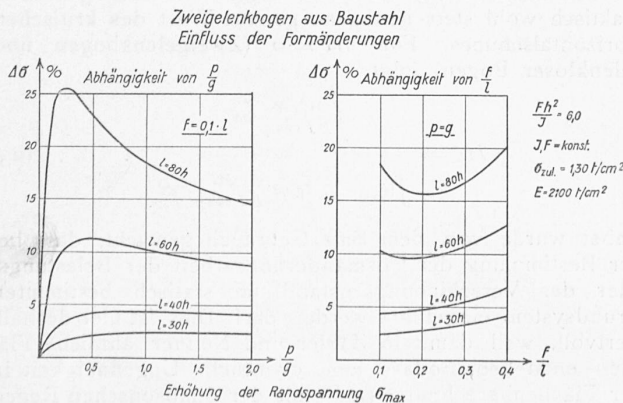


Abb. 17.

usw., sodass der Endwert des Biegemomentes den Betrag  $M = M_0 + \Delta M_1 + \Delta M_2 + \dots = M_0(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots)$  erreicht, der auch geschrieben werden kann

$$M = M_0 \frac{1}{1 - \alpha} = M_0 \frac{1}{1 - \frac{H}{H_{kr}}} \quad (24)$$

Die Genauigkeit dieser Näherungsgleichung Gl. (24) ist, wie Vergleichsberechnungen gezeigt haben, eine überraschend gute; Gl. (24) ist genauer als sogenannte „genaue“ Berechnungsmethoden, die z. B. den Einfluss der wag-rechten Formänderungen  $\xi$  vernachlässigen. (Gl. 24) gilt auch mit guter Genauigkeit für den gelenklosen Bogen, wenn dort der entsprechende Wert von  $H_{kr}$  eingesetzt wird.  $M_0$  bedeutet das in üblicher Weise nach der Elastizitätstheorie berechnete Maximalmoment, ungefähr im Bogenviertel.

Die Bedeutung des Formänderungseinflusses auf die grössten Randspannungen und die Sicherheit ist in den Kurven der Abb. 17 und 18 veranschaulicht. Die gewählten Rechnungsgrundlagen sind eingeschrieben. Bei der Aufstellung dieser Kurven wurde ein nach üblicher Weise dimensionierter Zweigelenkbogen aus Baustahl, bzw. aus Beton angenommen, bei dem die grösste Randspannung gerade die zulässige Beanspruchung erreicht. Die Vergrößerungen der Randspannungen stellen somit Spannungsüberschreitungen dar. Beim Vergleich von Beton und Stahl in Abb. 18 wurde beim Betonbogen, entsprechend dem grösseren Eigengewicht, ein kleineres Verhältnis  $p : g$  angenommen als beim Stahlbogen. Auf die grössten Zugspannungen wurde auch bei Beton keine Rücksicht genommen. Bei der Bestimmung der Sicherheit ist auch  $H$  im Nenner der Gl. (24) mit dem gesuchten Sicherheitsgrad  $n$  zu multiplizieren, wodurch eine quadratische Gleichung für  $n$  entsteht. Abb. 18 zeigt, dass dieser

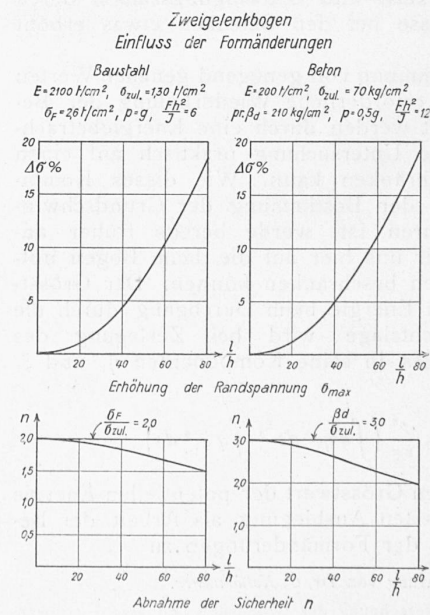


Abb. 18.

Formänderungs-Einfluss beide Bauweisen in gleicher Weise betrifft.

<sup>21)</sup> Vergleiche auch: K. Ljungberg: Probleme beim Entwurf von Kraftleitungsmasten und Bogenkonstruktionen aus Stahl. „Bauingenieur“ 1934.