

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	105/106 (1935)
<b>Heft:</b>	18
<b>Artikel:</b>	Das Prinzip des Steifigkeitsmessers von Le Rolland und Sorin
<b>Autor:</b>	[s.n.]
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-47431">https://doi.org/10.5169/seals-47431</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## ERGEBNISSE.

Obwohl für die Feststellung des Ergebnisses keinerlei Feinmessung und nur eine einzige Zeitablesung notwendig ist, arbeitet der Apparat bei richtiger Einstellung mit grosser Genauigkeit. Vergleichsversuche mit den Ergebnissen des Martens'schen Spiegelapparates sind in nebenstehender Tabelle wiedergegeben. Die Unterschiede sind gering. Teilweise sind die Angaben bei Martens höher erhalten worden, teilweise bei Le Rolland. Zu den dort angeführten Messungen kommen dann noch die bei Gussseisen, wo Probstäbe untersucht wurden, deren *E*-Module zwischen 6000 und 16 000 kg/mm<sup>2</sup> lagen<sup>6)</sup>. Selbst bei Stoffen wie Blei, die einer *E*-Modul-Bestimmung nach den bisherigen Methoden schwer zugänglich sind, ist sie mittelst des Le Rolland'schen Apparates möglich.

Die im Probstab entstehenden Spannungen und Durchbiegungen sind unmerklich gering. Es kann daher angenommen werden, dass der hier gemessene *E*-Modul für Nullast gilt. Dieser Umstand ist sehr wichtig. Bei allen übrigen Messmöglichkeiten müssen höhere Spannungen aufgewendet werden, um Dehnungen beobachtbaren Ausmasses hervorzubringen. Da sich der *E*-Modul im allgemeinen mit der Spannungshöhe ändert, so erfordert seine Zahlenangabe auch immer deren Angabe. Da er sich ferner bei den bisherigen Feststellungsarten nicht aus einer einzigen Dehnungsmessung, sondern nur aus einem Vergleich mehrerer Dehnungsmessungen bei verschiedenen Spannungen ergibt, so gilt die Messung für einen mehr oder weniger ausgedehnten Spannungsbereich, und was erhalten wird, ist ein Mittelwert für diesen Spannungsbereich, (*a b* in Abb. 1). In Fällen, wo die Veränderlichkeit des *E*-Moduls mit der Spannung gross ist, wie z. B. bei dem Gusseisen der Abb. 1, kann dieser Umstand Bedeutung annehmen. Die mit dieser Veränderlichkeit zusammenhängende Krümmung der Kurve *O A* ist im wesentlichen auf die bleibenden Verformungen zurückzuführen; bei einer Dehnungsmessung mittelst Spiegelapparates werden auch diese bleibenden Verformungen mitgemessen. Von einem „Elastizitäts“-Modul, z. B. in der Gegend von *a b* in Abb. 1, kann daher kaum gesprochen werden. Besser wäre, dafür vielleicht „Verformungs“-Modul zu sagen.

Gegenüber diesen Unbestimmtheiten und Bedingtheiten der bisherigen Messung gibt die Messung mittels des Le Rolland-Sorin'schen Apparates eine klare und unmissverständliche, keiner Ergänzung oder Einschränkung bedürftige Aussage. Was mit ihr ermittelt wird, ist eine wirkliche Werkstoffkonstante, unabhängig von Zufälligkeiten der Versuchsanstellung. Man erhält den Elastizitäts-Modul für Nullast, frei von der Einwirkung plastischer Verformungseinflüsse, und gleich hoch für Zug und für Druck.

Sollte das Bedürfnis bestehen, die Ermittlung auch für stärkere Materialanspannung anstellen zu können, so kann der Le Rolland-Sorin'sche Apparat leicht auch dafür eingerichtet werden. Bei der oben beschriebenen Ausführung sind derartige Messungen allerdings nicht möglich. Bemerkt sei noch, dass die Messungen im Gegensatz zu anderen Messverfahren frei von jeder Hysteresiswirkung sind und frei von jeder Einwirkung des Zeitfaktors auf Belastung und Entlastung.

Mit diesem Apparat ist demnach die Möglichkeit gegeben, den *E*-Modul bei aller Genauigkeit nicht nur bequem und schnell zu ermitteln, sondern auch in wissenschaftlich einwandfreierer Weise als mit jedem früheren Verfahren. Es ist zu hoffen, dass er Veranlassung geben wird, sich für die Bestimmung dieser grundlegend wichtigen Werkstoffkonstante nicht mehr wie bisher bloss auf die Fälle zu beschränken, in denen es sich um Sonderzwecke mehr wissenschaftlicher Art handelt, dass vielmehr die mit ihm gebotenen Möglichkeiten, die Werkstoffe zu erkennen und in ihr Wesen einzudringen, breitere Anwendung finden werden.

<sup>6)</sup> Vergl. auch Nicolau in „La Fonte“, Paris (1933), Nr. 9, S. 332 bis 340.

ZAHLENTAFEL.<sup>7)</sup>Vergleich der Ergebnisse bei *E*-Modul-Bestimmung.

Werkstoff	Le Rolland und Sorin	Martens
Stahl . . . . .	21 000	20 830
Duraluminium . . . . .	7 640	7 460
Al . . . . .	7 650	7 600
Bronze 1 . . . . .	12 000	11 990
Bronze 2 . . . . .	12 500	12 900
Bronze 3 . . . . .	9 600	9 800

## Das Prinzip des Steifigkeitsmessers von Le Rolland und Sorin.

Wenn zwei sympathische, gleiche, an einer Querverbindung hängende Pendel auf die in dem vorangehenden Aufsatz beschriebene Weise durch ein das Verbindungsstück haltendes Stäbchen gekuppelt werden, so überlagern sich den „natürlichen“ Pendelschwingungen „erzwungene“. Bei vollkommen steifem Kupplungsstäbchen hätten notwendig beide Schwingungen natürliche Frequenz; infolge der Biegsamkeit des Stäbchens gehen die Frequenzen in Wirklichkeit auseinander, doch umso weniger, je steifer das Stäbchen ist. Umso grösser wird also die Dauer der auftretenden „Schwabungen“. Dass bei hinreichend steifem und kurzem Kupplungsstäbchen seine Steife und damit sein Elastizitätsmodul der Schwingungsdauer geradezu proportional ist, wird im Folgenden unter Voraussetzung kleiner Bewegungen und unter Vernachlässigung der an den Blattfedern, dem Verbindungsstück und dem Stäbchen angreifenden Trägheitskräfte dargelegt.

1. Die elastische Linie der Blattfeder folgt (Abb. 1) aus den beiden Differentialgleichungen

$$\mu_1 \frac{d\psi}{d\eta} = M_\eta, \quad d\xi = \psi d\eta \quad . \quad (1)$$

$\xi, \eta$  = Koordinaten wie eingezzeichnet,  $\psi$  = Neigungswinkel gegen die  $\eta$ -Axe,  $\mu_1 = I_1 E_1$  = Steife der Blattfeder ( $I_1$  = Trägheitsmoment des Querschnitts,  $E_1$  = Elastizitätsmodul),  $M_\eta$  = Biegemoment in der Entfernung  $\eta$ . Die von der schwingenden Masse auf die Blattfeder übertragenen Kräfte seien auf deren Endpunkt *E* zu der Dyaname *X*, *Y*, *C* reduziert; das Biegemoment ist

$$M_\eta = X(l_1 - \eta) - Y(x - \xi) + C, \quad \text{worin } Y \text{ näherungsweise durch das Gewicht } G \text{ der schwingenden Masse ersetzt werden darf:}$$

$$X \cong G \quad . \quad (2)$$

Durch Integration von (1) erhält man die Endwerte  $\Theta$  und  $x$  von  $\psi$  und  $\xi$  (für  $\eta = l_1$ ) als lineare Verbindungen von *X* und *C*, die man nach diesen Grössen auflösen kann:

$$X = Bx - D\Theta, \quad C = -Dx + F\Theta. \quad . \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} NB &= G \times \operatorname{th} \pi l_1, & ND &= G \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \pi l_1} \right), \\ F &= \frac{G}{\pi} (\pi l_1 - \operatorname{th} \pi l_1), \\ N &= \pi l_1 \operatorname{th} \pi l_1 - 2 \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \pi l_1} \right), & \mu_1 \pi^2 &= G. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2. Die natürlichen Schwingungen des elastischen Pendels, das heißt seine Bewegung bei festem Aufhängepunkt *A* (Abb. 1) folgt (Abb. 2) aus dem Drallsatz

$$Xh - Yh\Theta - C = m\varrho^2\ddot{\Theta} \quad . \quad (5)$$

(*h* = Entfernung zwischen Federende *E* und Massenschwerpunkt *S*, *m* = schwingende Masse,  $\varrho$  = Trägheitsradius), und aus den Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt *S*,

<sup>7)</sup> Aus Bull. de l'Assoc. Techn. de Fond., Paris (1934), S. 427.

deren erste die Gl. (2) insofern rechtfertigt, als sich  $S$  merklich horizontal bewegt, und deren zweite lautet:

$$-X = m(\ddot{x} + h\ddot{\Theta}) \quad \dots \quad (6)$$

Schreiben wir die Gleichungen (5) und (6) mit den Werten (2) und (3) aus:

$$\ddot{x} + \frac{B}{m}x + h\ddot{\Theta} - \frac{D}{m}\Theta = 0, \quad \dots \quad (7)$$

$$-\frac{D+hB}{m\varrho^2}x + \ddot{\Theta} + \frac{F+h(D+G)}{m\varrho^2}\Theta = 0. \quad (8)$$

Bei praktischen Ausführungen sind die Lösungen  $x, \Theta$  dieser Gleichungen zwei harmonische Schwingungen von sehr verschiedenen Frequenzen, deren schnellere rasch abgedämpft wird; übrig bleibt die langsamere, etwa

$$\Theta = \Theta_0 \cos \omega t, \quad x = \lambda \Theta. \quad (9)$$

Bei dieser Bewegung ist der Schnittpunkt  $F$  der Endtangente mit dem Lot durch den Aufhängepunkt  $A$  fest (Abb. 1); er hat vom Federende  $E$  den durch  $\omega$  bestimmten Abstand  $\lambda$ . Lässt man das Pendel aus einer Anfangslage los, bei der die Endtangente gerade durch den bezeichneten Punkt  $F$  im Abstand  $\lambda$  geht, so tritt die höherfrequente Schwingung überhaupt nicht auf, und das Pendel bewegt sich von vornherein genau gemäß Gl. (9).

3. Die Verbiegung des Kupplungs-Stäbchens ist in jedem Augenblick durch die auf die Blattfedern von ihren schwingenden Massen ausgeübten Kräfte und Momente gemäß Gl. (1) bestimmt, worin  $\mu_1$  durch die Steife  $\mu = IE$  des Stäbchens zu ersetzen und  $M_\eta$  näherungsweise der Abb. 3 zu entnehmen ist:

$$M_\eta = (X_1 + X_2)(l_1 + l - \eta) + C_1 + C_2.$$

Durch Integration ergeben sich die Endwerte  $\varphi$  und  $u$  (für  $\eta = l$ ) von  $\psi$  und  $\xi$ :

$$\frac{\mu}{l}\varphi = (X_1 + X_2)\left(l_1 + \frac{l}{2}\right) + C_1 + C_2,$$

$$\frac{2\mu}{l^2}u = (X_1 + X_2)\left(l_1 + \frac{2}{3}l\right) + C_1 + C_2.$$

Da nun gemäß (3)  $X_1$  und  $C_1$  sich aus  $\Theta_1$  und  $x_1$ ,  $X_2$  und  $C_2$  aus den entsprechenden Werten  $\Theta_2$  und  $x_2$  für das andere Pendel linear zusammensetzen, so sind auch  $\varphi$  und  $u$  lineare Verbindungen dieser Größen, sogar, wie nicht anders zu erwarten, der Summengrößen

$$a = \Theta_1 + \Theta_2, \quad z = x_1 + x_2: \quad \dots \quad (10)$$

$$\varphi = Qz + Ra, \quad u = Hz + Ka, \quad \dots \quad (11)$$

$$\begin{aligned} NL_1Q &= \left[ \left( l_1 + \frac{l}{2} \right) z \operatorname{th} z l_1 - \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} z l_1} \right) \right] \chi, \\ NR &= \left[ 1 - \frac{\operatorname{th} z l_1}{z l_1} - \left( 1 + \frac{l}{2 l_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} z l_1} \right) \right] \chi, \\ NH &= \frac{l}{2 l_1} \left[ \left( l_1 + \frac{2}{3}l \right) z \operatorname{th} z l_1 - \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} z l_1} \right) \right] \chi, \\ NK &= \frac{l}{2 l_1} \left[ l_1 - \frac{\operatorname{th} z l_1}{z} - \left( l_1 + \frac{2}{3}l \right) \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} z l_1} \right) \right] \chi, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\text{mit } \chi = \frac{G l_1 l}{\mu}. \quad \dots \quad (13)$$

In praktischen Ausführungen ist  $z l_1$  von der Größenordnung 1. Die eingangs angedeutete Bedingung über Steife und Länge des Probstäbchens für das Zustandekommen von Schwebungen wird folgendermassen zu präzisieren sein:

$$\chi \ll 1,$$

welche Voraussetzung die Kleinheit der Größen (12), gemessen an 1,  $l_1$  und  $1/l_1$  nach sich zieht:

$$|H| \ll 1, \quad |R| \ll 1, \quad |K| \ll l_1, \quad |Q| \ll 1/l_1. \quad (14)$$

Da  $z$  und  $l_1 a$  von der selben Größenordnung sind, ist somit gemäß (11)

$$|\varphi| \ll |a|, \quad |u| \ll |z|. \quad \dots \quad (15)$$

4. Die sympathischen Pendel. Der Schwerpunkt  $S$  der schwingenden Masse  $m$  etwa des rechten Pendels bewegt sich gemäß Newton:

$$\mathfrak{R} = m p_a \quad \dots \quad (16)$$

Die Kraft  $\mathfrak{R}$  setzt sich aus dem Gewicht  $G$  der Masse und der von der Feder auf dieselbe ausgeübten Kraft von den Komponenten  $-X_1, -G$  zusammen (Abb. 3);  $p_a$  ist die absolute Schwerpunktsbeschleunigung. Die Bewegung von  $S$  ist besonders einfach relativ zu dem Verbindungsstück  $AA'$  (Abb. 4) zu beschreiben, da die Relativ-

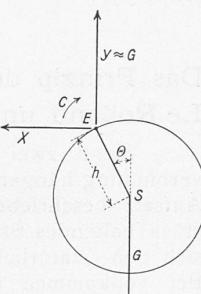


Abb. 2

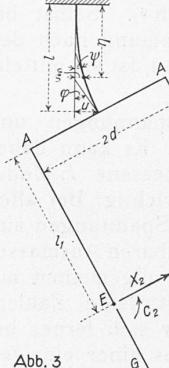


Abb. 3

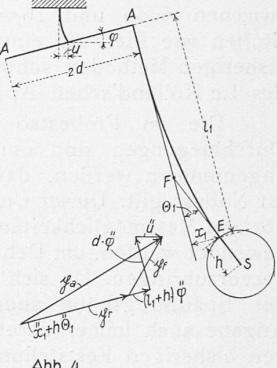


Abb. 4

beschleunigung  $p_r$ , demselben merklich parallel gerichtet ist. Das Verbindungsstück führt eine horizontale Translation von der Geschwindigkeit  $u$ , verbunden mit einer Drehung um seinen Mittelpunkt von der Winkelgeschwindigkeit  $\varphi$  aus. Nach Coriolis ist

$$p_a = p_r + p_f + p_c,$$

$p_f$  = Fortführungs-,  $p_c$  = Coriolisbeschleunigung. Produkte der kleinen Elongationen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen seien vernachlässigt. Dann fällt  $p_c$  weg, von  $p_f$  verbleiben nur die drei in Abb. 4 eingezeichneten Komponenten, und (16) zerfällt in die beiden Gleichungen

$$-X_1 - G\varphi = m[\ddot{x}_1 + h\ddot{\Theta}_1 + \ddot{u} + (l_1 + h)\ddot{\varphi}] \quad (17)$$

$$-Y_1 + G = -m d \ddot{\varphi} \quad \dots \quad (18)$$

( $d$  = halbe Länge des Verbindungsstücks). Gl. (18) rechtfertigt auch hier die Annäherung (2). Zieht man von (17) die entsprechende Gleichung für das linke Pendel ab, so kommt, in Erinnerung an (3), die Differentialgleichung (7) heraus, wenn man darin  $\Theta$  und  $x$  durch die Differenzen

$$\beta = \Theta_1 - \Theta_2, \quad w = x_1 - x_2 \quad \dots \quad (19)$$

ersetzt. Eine weitere Beziehung gewinnt man aus dem Drallsatz. Er lautet für die rechte Masse (Abb. 4 und 2):

$$-C_1 - G h \Theta_1 + X_1 h = m \varrho^2 (\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\varphi}). \quad (20)$$

Die Subtraktion der analogen Gleichung für das linke Pendel führt, unter Berücksichtigung von (3), für die Differenzen (19) auf Gl. (8).  $\beta$  und  $w$  sind also harmonische Schwingungen von der „natürlichen“ Pulsation  $\omega$  und der Form (9) ( $\Theta$  durch  $\beta$ ,  $x$  durch  $w$  ersetzt). Indem man zu (17) und (20) die entsprechenden Gleichungen addiert, statt sie, wie soeben, abzuziehen, erhält man mit Bedacht auf (11) auch für die Summen  $a$  und  $z$  zwei Differentialgleichungen:

$$(1 + \varepsilon_1)\ddot{z} + \frac{B + \varepsilon_2}{m}z + (h + \varepsilon_3)a - \frac{D + \varepsilon_4}{m}a = 0, \quad (21)$$

$$\varepsilon_5 \ddot{z} - \frac{D + hB}{m \varrho^2}z + (1 + \varepsilon_6)\ddot{a} + \frac{F + h(D+G)}{m \varrho^2}a = 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon_1 = 2[H + (l_1 + h)Q], \quad \varepsilon_2 = 2GQ, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (23)$$

$$\varepsilon_3 = 2[K + (l_1 + h)R], \quad \varepsilon_4 = -2GR, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (23)$$

$$\varepsilon_5 = 2Q, \quad \varepsilon_6 = 2R. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (23)$$

$h$  ist mit  $l_1$ , und, wie gesagt, auch  $1/l_1$  mit  $z$  praktisch von der selben Größenordnung, sodass, in Anbetracht von (14) und (4), die Größenverhältnisse

$$|\varepsilon_1| \ll 1, \quad |\varepsilon_2| \ll B, \quad |\varepsilon_3| \ll h, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (24)$$

zu beachten sind. Die Differentialgleichungen (21) und (22) für  $z$  und  $a$  unterscheiden sich also nur wenig von jenen,

(7) und (8), für  $w$  und  $\beta$ . Auch  $z$  und  $\alpha$  werden daher aus einer schnellen, bald verklingenden, und einer langsameren Schwingung zusammengesetzt sein, diese etwa von der Form

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega_1 t, \quad z = \lambda_1 \alpha. \quad \dots \quad (25)$$

Wie bei festem Pendelanfang können auch hier, bei zitterndem Aufhängepunkt, die schnelleren Schwingungen ganz unterdrückt werden, siehe unten. Wie die „natürliche“ Pulsation  $\omega$  aus der charakteristischen Gleichung von (7) und (8)

$$\left| \begin{array}{l} -\omega^2 + \frac{B}{m}, \quad -h\omega^2 - \frac{D}{m} \\ -\frac{D+hB}{m\zeta^2}, \quad -\omega^2 + \frac{F+h(D+G)}{m\zeta^2} \end{array} \right| = 0,$$

abgekürzt:  $\alpha \omega^4 + b \omega^2 + c = 0$ ,

gezogen werden kann, so die „aufgeprägte“ Pulsation  $\omega_1$  aus der charakteristischen Gleichung von (21) und (22)

$$\left| \begin{array}{l} -\omega_1^2(1+\varepsilon_1) + \frac{B+\varepsilon_2}{m}, \quad -\omega_1^2(h+\varepsilon_3) - \frac{D+\varepsilon_4}{m} \\ -\omega_1^2\varepsilon_5 - \frac{D+hB}{m\zeta^2}, \quad -\omega_1^2(1+\varepsilon_6) + \frac{F+h(D+G)}{m\zeta^2} \end{array} \right| = 0,$$

abgekürzt:  $a_1 \omega_1^4 + b_1 \omega_1^2 + c_1 = 0. \quad \dots \quad (26)$

$\omega_1$  ist als Wurzel von (26) eine differenzierbare Funktion der Koeffizienten  $a_1, b_1, c_1$ :  $\omega_1 = f(a_1, b_1, c_1)$ , und unterscheidet sich von  $\omega = f(a, b, c)$  nach Taylor in erster Annäherung durch eine lineare Kombination der Differenzen  $a_1 - a$ ,  $b_1 - b$ ,  $c_1 - c$ :

$$\omega_1 - \omega = f_a(a_1 - a) + f_b(b_1 - b) + f_c(c_1 - c). \quad (27)$$

Hierin bedeutet z. B.  $f_a$  den Wert der partiellen Ableitung nach  $a_1$  von  $f(a_1, b_1, c_1)$  für die Argumente  $a, b, c$ . Da diese Argumente Kombinationen von Grössen sind, die sich einzig auf die Pendel beziehen, gilt dies auch von  $f_a, f_b, f_c$ . Nun ist (Bemerkung (24)!) bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung z. B.  $a_1 - a$  eine homogene lineare Verbindung von  $\varepsilon_1$  bis  $\varepsilon_6$ :

$$a_1 - a = \Sigma \varepsilon_i \varepsilon_i,$$

wobei die Koeffizienten  $\varepsilon_i$  wiederum nur von den Pendeldaten abhängen. Das gleiche gilt von den Differenzen  $(b_1 - b)$  und  $(c_1 - c)$ . Hieraus folgt, bei Einsetzen der Ausdrücke für die  $\varepsilon_i$  aus (23), (12) und (13) in (27):

$$\omega - \omega_1 = \frac{p}{\mu}, \quad \dots \quad (28)$$

worin die Abkürzung  $p$  ausser von den Pendeldaten nur noch von der Stablänge  $l$  abhängt.

5. Erzwungenes Gleichgewicht. Die rechte Pendelmasse werde durch äussere Einwirkung, etwa von Hand, aus ihrer natürlichen Ruhelage in die Lage  $\Theta_1, x_1$  gebracht. Welches sind bei Gleichgewicht die entsprechenden Lagekoordinaten des sich selbst überlassenen linken Pendels? Bei Verschwinden der Beschleunigungen folgt aus (17) und (20):  $X_2 = -G\varphi$ ,  $C_2 = -Gh(\Theta_2 + \varphi)$ , welche Werte, in (3) eingesetzt, zwei lineare Beziehungen zwischen  $x_2$ ,  $\Theta_2$  und  $\varphi$ , und damit die Ausdrücke liefern:

$$\Theta_2 = -\frac{1 - \frac{1}{\sinh x_1} + h \sinh x_1}{1 + h \sinh x_1} \varphi, \\ x_2 = -\frac{1 - \frac{\tanh x_1}{x_1} + \frac{h}{l_1} (\sinh x_1 \tanh x_1 + \frac{1}{\sinh x_1} - 1)}{1 + h \sinh x_1} l_1 \varphi.$$

Wegen (15) ist somit  $|\Theta_2| < |a|$ ,  $|x_2| < l_1 |a| \cong |z|$ , und daher  $|\Theta_2| < |\Theta_1|$ ,  $|x_2| < |x_1|$ .

In erster Annäherung bewirkt somit das Festhalten des einen Pendels in einer künstlichen Ruhelage keinerlei Lagenveränderung des andern Pendels.

6. Die Schwebungen. Da  $\omega_1$  von  $\omega$  wenig abweicht, unterscheiden sich auch  $\lambda$  und  $\lambda_1$  kaum voneinander:

$$\lambda_1 \cong \lambda. \quad \dots \quad (29)$$

Man versetze nun die rechte Pendelmasse derart, dass (Abb. 4) der Schnittpunkt  $F$  der Endtangente mit der Vertikalen zum Verbindungsstück durch den Aufhängepunkt  $A$  um  $\lambda$  vom Endpunkt  $E$  entfernt ist. Von dieser erzwungenen Ruhelage  $x_1 = x_0$ ,  $\Theta_1 = x_0/\lambda$ ,  $\Theta_2 = x_2 = 0$  ausgehend, überlasse man das System zur Zeit  $t=0$  durch Loslassen des festgehaltenen Pendels sich selbst. Nach (10) und (19) ist

$$x_1 = \frac{z+w}{2}, \quad x_2 = \frac{z-w}{2}, \quad \Theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \Theta_2 = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad (30)$$

Für  $t=0$  ist also erstens wegen  $z+w=z-w=a+\beta=\alpha-\beta=0$ :  $\alpha=\beta=z=w=0$ , zweitens wegen  $x_2=\Theta_2=0$ :  $\alpha=\beta=x_0/\lambda$ ,  $z=w=x_0$ . Nach (9) ist  $w=x_0 \cos \omega t$ ,  $\beta=w/\lambda$  eine mögliche Schwingung, und, mit Rücksicht auf (29), nach (25) auch  $z=x_0 \cos \omega_1 t$ ,  $\alpha=z/\lambda$ . Da diese Schwingungen allen Anfangsbedingungen genügen, schildern sie (in erster Annäherung) die unter den bezeichneten Umständen wirklich eintretende Bewegung. Gemäss (30) ist somit

$$x_1 = \frac{x_0}{2} \left( \cos \omega_1 t + \cos \omega t \right) = x_0 \cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega + \omega_1}{2} t,$$

$$x_2 = \frac{x_0}{2} \left( \cos \omega_1 t - \cos \omega t \right) = x_0 \sin \frac{\omega - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega + \omega_1}{2} t.$$

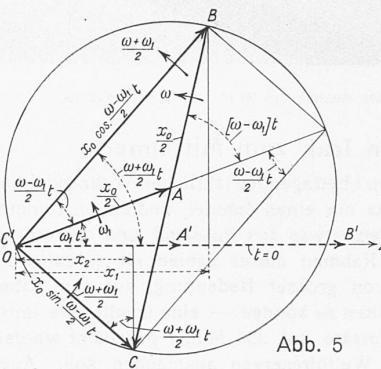


Abb. 5 gibt diesen Sachverhalt auf die in der Elektrotechnik übliche Weise wieder. Der Vektor  $OA$  vom Betrag  $x_0/2$  rotiere mit der Drehfrequenz  $\omega_1$  um  $O$ , der gleich lange Vektor  $AB$  mit der Drehfrequenz  $\omega$  um  $A$ . Wenn zur Zeit  $t=0$  die beiden Vektoren gleichgerichtet in dem festen Strahl  $OX$  liegen, so ist  $x_1$  die Projektion des Summenvektors  $OB$  vom Betrag  $x_0 |\cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t|$ ,  $x_2$  diejenige des Differenzvektors  $OC$  vom Betrag  $x_0 |\sin \frac{\omega - \omega_1}{2} t|$

auf  $OX$ . Da im vorliegenden Fall für Kleinheit der relativen Drehfrequenz  $\omega - \omega_1$  des zweiten gegenüber dem ersten Vektor gesorgt ist, verändern die Dreiecke  $OAB$  und  $OAC$ , während ihre gemeinsame Seite  $OA$  (mit  $\omega_1$ ) um  $O$  rotiert, ihre Gestalt nur langsam:  $x_1$  und  $x_2$  sind sozusagen harmonische Schwingungen von der Kreisfrequenz  $\frac{\omega + \omega_1}{2}$ ;

die Amplitude der einen nimmt im selben langsamen Rhythmus ab, in welchem die Amplitude der zweiten anschwillt; im Augenblick, wo jene (bei Koinzidenz von  $B$  mit  $O$ ) verschwindet, erreicht diese ihren Höchstwert  $x_0$ , und umgekehrt. Bei einem solchen periodischen Erlöschen der Amplitude einer Schwingung wird als Dauer einer „Schwung“ die zwischen zwei sukzessiven Nullamplituden verstrechende Zeit  $\tau$  bezeichnet.  $\tau$  ist mit andern Worten die Zeit, die der gegenüber dem Vektor  $OA$  mit der relativen Drehfrequenz  $\omega - \omega_1$  rotierende Vektor  $AB$  zu einem vollen Umlauf (relativ zu  $OA$ ) zwischen zwei Koinzidenzen von  $B$  mit  $O$  benötigt:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega - \omega_1}.$$

Werden also mit zwei Probstäbchen aus verschiedenen Metallen, jedoch von gleichen Dimensionen auf die geschilderte Art Schwebungen bewerkstelligt, so verhalten sich zufolge Gl. (28) die gemessenen Schwebungsdauern wie die Steifen der Stäbchen oder wie deren Elastizitätsmoduln  $E$  und  $E'$ :

$$\tau' : \tau = E' : E.$$

Die vorstehenden Erörterungen stützen sich auf die schöne und gründliche Abhandlung von Le Rolland und Sorin „Etude d'une méthode utilisant le couplage entre deux systèmes oscillants pour la détermination de la résistance mécanique des constructions et la mesure des modules d'élasticité“<sup>1)</sup>, wo (S. 146 fg) der Fall der aufrechten (statt hängenden) Pendel durchgerechnet und die allgemeine Verwendbarkeit sympathischer Pendel zu Steifigkeitsproben, etwa von Flugzeugkonstruktionen, dargelegt ist. K. H. G.

<sup>1)</sup> Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, n° 47, Paris 1934.