

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 105/106 (1935)
Heft: 18

Artikel: Das Prinzip des Steifigkeitsmessers von Le Rolland und Sorin
Autor: [s.n.]
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-47431>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

deren erste die Gl. (2) insofern rechtfertigt, als sich S merklich horizontal bewegt, und deren zweite lautet:

$$-X = m(\ddot{x} + h\ddot{\Theta}). \quad (6)$$

Schreiben wir die Gleichungen (5) und (6) mit den Werten (2) und (3) aus:

$$\ddot{x} + \frac{B}{m}x + h\ddot{\Theta} - \frac{D}{m}\Theta = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{D+hB}{m\varrho^2}x + \ddot{\Theta} + \frac{F+h(D+G)}{m\varrho^2}\Theta = 0. \quad (8)$$

Bei praktischen Ausführungen sind die Lösungen x , Θ dieser Gleichungen zwei harmonische Schwingungen von sehr verschiedenen Frequenzen, deren schnellere rasch abgedämpft wird; übrig bleibt die langsamere, etwa

$$\Theta = \Theta_0 \cos \omega t, \quad x = \lambda \Theta. \quad (9)$$

Bei dieser Bewegung ist der Schnittpunkt F der Endtangente mit dem Lot durch den Aufhängepunkt A fest (Abb. 1); er hat vom Federende E den durch ω bestimmten Abstand λ . Lässt man das Pendel aus einer Anfangslage los, bei der die Endtangente gerade durch den bezeichneten Punkt F im Abstand λ geht, so tritt die höherfrequente Schwingung überhaupt nicht auf, und das Pendel bewegt sich von vornherein genau gemäss Gl. (9).

3. Die *Verbiegung des Kupplungs-Stäbchens* ist in jedem Augenblick durch die auf die Blattfedern von ihren schwingenden Massen ausgeübten Kräfte und Momente gemäss Gl. (1) bestimmt, worin μ_1 durch die Steife $\mu = IE$ des Stäbchens zu ersetzen und M_η näherungsweise der Abb. 3 zu entnehmen ist:

$$M_\eta = (X_1 + X_2)(l_1 + l - \eta) + C_1 + C_2.$$

Durch Integration ergeben sich die Endwerte φ und u (für $\eta = l$) von ψ und ξ :

$$\frac{\mu}{l}\varphi = (X_1 + X_2)\left(l_1 + \frac{l}{2}\right) + C_1 + C_2,$$

$$\frac{2\mu}{l^2}u = (X_1 + X_2)\left(l_1 + \frac{2}{3}l\right) + C_1 + C_2.$$

Da nun gemäss (3) X_1 und C_1 sich aus Θ_1 und x_1 , X_2 und C_2 aus den entsprechenden Werten Θ_2 und x_2 für das andere Pendel linear zusammensetzen, so sind auch φ und u lineare Verbindungen dieser Grössen, sogar, wie nicht anders zu erwarten, der Summengrössen

$$\alpha = \Theta_1 + \Theta_2, \quad z = x_1 + x_2. \quad (10)$$

$$\varphi = Qz + Ra, \quad u = Hz + Ka, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} Nl_1 Q &= \left[\left(l_1 + \frac{l}{2} \right) \kappa \operatorname{th} \kappa l_1 - \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \kappa l_1} \right) \right] \chi, \\ NR &= \left[1 - \frac{\operatorname{th} \kappa l_1}{\kappa l_1} - \left(1 + \frac{l}{2l_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \kappa l_1} \right) \right] \chi, \\ NH &= \frac{l}{2l_1} \left[\left(l_1 + \frac{2}{3}l \right) \kappa \operatorname{th} \kappa l_1 - \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \kappa l_1} \right) \right] \chi, \\ NK &= \frac{l}{2l_1} \left[l_1 - \frac{\operatorname{th} \kappa l_1}{\kappa} - \left(l_1 + \frac{2}{3}l \right) \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \kappa l_1} \right) \right] \chi, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{mit} \quad \chi = \frac{G l_1 l}{\mu}. \quad (13)$$

In praktischen Ausführungen ist κl_1 von der Grössenordnung 1. Die eingangs angedeutete Bedingung über Steife und Länge des Probestäbchens für das Zustandekommen von Schwebungen wird folgendermassen zu präzisieren sein:

$$\chi \ll 1,$$

welche Voraussetzung die Kleinheit der Grössen (12), gemessen an 1, l_1 und $1/l_1$ nach sich zieht:

$$|H| \ll 1, \quad |R| \ll 1, \quad |K| \ll l_1, \quad |Q| \ll 1/l_1. \quad (14)$$

Da z und $l_1 \alpha$ von der selben Grössenordnung sind, ist somit gemäss (11)

$$|\varphi| \ll |\alpha|, \quad |u| \ll |z|. \quad (15)$$

4. Die *sympathischen Pendel*. Der Schwerpunkt S der schwingenden Masse m etwa des rechten Pendels bewegt sich gemäss Newton:

$$\mathfrak{R} = m p_a \quad (16)$$

Die Kraft \mathfrak{R} setzt sich aus dem Gewicht \mathfrak{G} der Masse und der von der Feder auf dieselbe ausgeübten Kraft von den Komponenten $-X_1$, $-G$ zusammen (Abb. 3); p_a ist die absolute Schwerpunktsbeschleunigung. Die Bewegung von S ist besonders einfach relativ zu dem Verbindungsstück AA (Abb. 4) zu beschreiben, da die Relativ-

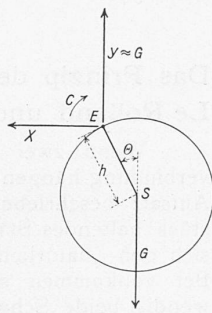


Abb. 2

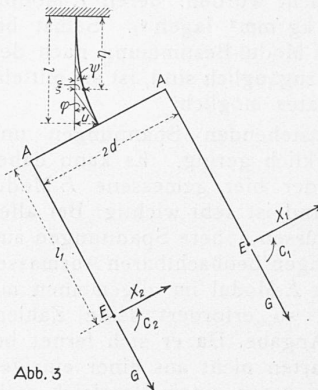


Abb. 3

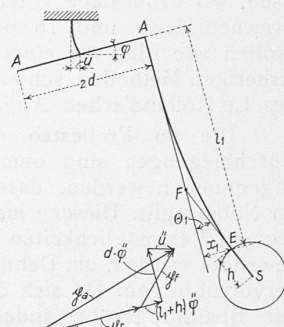


Abb. 4

beschleunigung p_r demselben merklich parallel gerichtet ist. Das Verbindungsstück führt eine horizontale Translation von der Geschwindigkeit \dot{u} , verbunden mit einer Drehung um seinen Mittelpunkt von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ aus. Nach Coriolis ist

$$p_a = p_r + p_f + p_c,$$

p_f = Fortführungs-, p_c = Coriolisbeschleunigung. Produkte der kleinen Elongationen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen seien vernachlässigt. Dann fällt p_c weg, von p_f verbleiben nur die drei in Abb. 4 eingezeichneten Komponenten, und (16) zerfällt in die beiden Gleichungen

$$-X_1 - G\varphi = m[\ddot{x}_1 + h\ddot{\Theta}_1 + \ddot{u} + (l_1 + h)\ddot{\varphi}] \quad (17)$$

$$-Y_1 + G = -m d \ddot{\varphi} \quad (18)$$

(d = halbe Länge des Verbindungsstücks). Gl. (18) rechtfertigt auch hier die Annäherung (2). Zieht man von (17) die entsprechende Gleichung für das linke Pendel ab, so kommt, in Erinnerung an (3), die Differentialgleichung (7) heraus, wenn man darin Θ und x durch die Differenzen

$$\beta = \Theta_1 - \Theta_2, \quad w = x_1 - x_2 \quad (19)$$

ersetzt. Eine weitere Beziehung gewinnt man aus dem Drallsatz. Er lautet für die rechte Masse (Abb. 4 und 2):

$$-C_1 - G h \Theta_1 + X_1 h = m \varrho^2 (\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\varphi}). \quad (20)$$

Die Subtraktion der analogen Gleichung für das linke Pendel führt, unter Berücksichtigung von (3), für die Differenzen (19) auf Gl. (8). β und w sind also harmonische Schwingungen von der „natürlichen“ Pulsation ω und der Form (9) (Θ durch β , x durch w ersetzt). Indem man zu (17) und (20) die entsprechenden Gleichungen addiert, statt sie, wie soeben, abzuziehen, erhält man mit Bedacht auf (11) auch für die Summen α und z zwei Differentialgleichungen:

$$(1 + \varepsilon_1)\ddot{z} + \frac{B + \varepsilon_2}{m}z + (h + \varepsilon_3)\ddot{\alpha} - \frac{D + \varepsilon_4}{m}\alpha = 0, \quad (21)$$

$$\varepsilon_5\ddot{z} - \frac{D + hB}{m\varrho^2}z + (1 + \varepsilon_6)\ddot{\alpha} + \frac{F + h(D + G)}{m\varrho^2}\alpha = 0, \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2[H + (l_1 + h)Q], & \varepsilon_2 &= 2GQ, \\ \varepsilon_3 &= 2[K + (l_1 + h)R], & \varepsilon_4 &= -2GR, \\ \varepsilon_5 &= 2Q, & \varepsilon_6 &= 2R. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

h ist mit l_1 , und, wie gesagt, auch $1/l_1$ mit κ praktisch von der selben Grössenordnung, sodass, in Anbetracht von (14) und (4), die Grössenverhältnisse

$$\left. \begin{aligned} |\varepsilon_1| &\ll 1, & |\varepsilon_2| &\ll B, & |\varepsilon_3| &\ll h, \\ |\varepsilon_4| &\ll D, & |\varepsilon_5| &\ll 1/l_1, & |\varepsilon_6| &\ll 1, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

zu beachten sind. Die Differentialgleichungen (21) und (22) für z und α unterscheiden sich also nur wenig von jenen,

(7) und (8), für w und β . Auch z und α werden daher aus einer schnellen, bald verklingenden, und einer langsameren Schwingung zusammengesetzt sein, diese etwa von der Form

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega_1 t, \quad z = \lambda_1 \alpha \dots (25)$$

Wie bei festem Pendelanfang können auch hier, bei zitterndem Aufhängepunkt, die schnelleren Schwingungen ganz unterdrückt werden, siehe unten. Wie die „natürliche“ Pulsation ω aus der charakteristischen Gleichung von (7) und (8)

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{B}{m}, & -h\omega^2 - \frac{D}{m} \\ -\frac{D+hB}{mQ^2}, & -\omega^2 + \frac{F+h(D+G)}{mQ^2} \end{vmatrix} = 0,$$

abgekürzt: $a\omega^4 + b\omega^2 + c = 0$, gezogen werden kann, so die „aufgeprägte“ Pulsation ω_1 aus der charakteristischen Gleichung von (21) und (22)

$$\begin{vmatrix} -\omega_1^2 (1 + \varepsilon_1) + \frac{B + \varepsilon_2}{m}, & -\omega_1^2 (h + \varepsilon_3) - \frac{D + \varepsilon_4}{m} \\ -\omega_1^2 \varepsilon_5 - \frac{D + hB}{mQ^2}, & -\omega_1^2 (1 + \varepsilon_6) + \frac{F + h(D + G)}{mQ^2} \end{vmatrix} = 0,$$

abgekürzt: $a_1 \omega_1^4 + b_1 \omega_1^2 + c_1 = 0$. (26) ω_1 ist als Wurzel von (26) eine differenzierbare Funktion der Koeffizienten a_1, b_1, c_1 : $\omega_1 = f(a_1, b_1, c_1)$, und unterscheidet sich von $\omega = f(a, b, c)$ nach Taylor in erster Annäherung durch eine lineare Kombination der Differenzen $a_1 - a, b_1 - b, c_1 - c$:

$$\omega_1 - \omega = f_a(a_1 - a) + f_b(b_1 - b) + f_c(c_1 - c). \quad (27)$$

Hierin bedeutet z. B. f_a den Wert der partiellen Ableitung nach a_1 von $f(a_1, b_1, c_1)$ für die Argumente a, b, c . Da diese Argumente Kombinationen von Grössen sind, die sich einzig auf die Pendel beziehen, gilt dies auch von f_a, f_b, f_c . Nun ist (Bemerkung (24)!) bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung z. B. $a_1 - a$ eine homogene lineare Verbindung von ε_1 bis ε_6 :

$$a_1 - a = \sum \varepsilon_i \varepsilon_i,$$

wobei die Koeffizienten ε_i wiederum nur von den Pendeldaten abhängen. Das gleiche gilt von den Differenzen $(b_1 - b)$ und $(c_1 - c)$. Hieraus folgt, bei Einsetzen der Ausdrücke für die ε_i aus (23), (12) und (13) in (27):

$$\omega - \omega_1 = \frac{p}{\mu}, \quad (28)$$

worin die Abkürzung p ausser von den Pendeldaten nur noch von der Stablänge l abhängt.

5. *Erzwungenes Gleichgewicht.* Die rechte Pendelmasse werde durch äussere Einwirkung, etwa von Hand, aus ihrer natürlichen Ruhelage in die Lage Θ_1, x_1 gebracht. Welches sind bei Gleichgewicht die entsprechenden Lagekoordinaten des sich selbst überlassenen linken Pendels? Bei Verschwinden der Beschleunigungen folgt aus (17) und (20): $X_2 = -G\varphi, C_2 = -Gh(\Theta_2 + \varphi)$, welche Werte, in (3) eingesetzt, zwei lineare Beziehungen zwischen x_2, Θ_2 und φ , und damit die Ausdrücke liefern:

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= -\frac{1 - \frac{1}{\text{ch } \kappa l_1} + h \kappa \text{th } \kappa l_1}{1 + \kappa h \text{th } \kappa l_1} \varphi, \\ x_2 &= -\frac{1 - \frac{\text{th } \kappa l_1}{\kappa l_1} + \frac{h}{l_1} (\kappa l_1 \text{th } \kappa l_1 + \frac{1}{\text{ch } \kappa l_1} - 1)}{1 + \kappa h \text{th } \kappa l_1} l_1 \varphi. \end{aligned}$$

Wegen (15) ist somit $|\Theta_2| \ll |\alpha|, |x_2| \ll |l| |\alpha| \cong |z|$, und daher $|\Theta_2| \ll |\Theta_1|, |x_2| \ll |x_1|$.

In erster Annäherung bewirkt somit das Festhalten des einen Pendels in einer künstlichen Ruhelage keinerlei Lagerveränderung des andern Pendels.

6. *Die Schwebungen.* Da ω_1 von ω wenig abweicht, unterscheiden sich auch λ und λ_1 kaum voneinander:

$$\lambda_1 \cong \lambda \dots (29)$$

Man versetze nun die rechte Pendelmasse derart, dass (Abb. 4) der Schnittpunkt F der Endtangente mit der Vertikalen zum Verbindungsstück durch den Aufhängepunkt A um λ vom Endpunkt E entfernt ist. Von dieser erzwungenen Ruhelage $x_1 = x_0, \Theta_1 = x_0/\lambda, \Theta_2 = x_2 = 0$ ausgehend, überlasse man das System zur Zeit $t=0$ durch Loslassen des festgehaltenen Pendels sich selbst. Nach (10) und (19) ist

$$x_1 = \frac{z+w}{2}, \quad x_2 = \frac{z-w}{2}, \quad \Theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \Theta_2 = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad (30)$$

Für $t=0$ ist also erstens wegen $\dot{z} + \dot{w} = \dot{z} - \dot{w} = \dot{\alpha} + \dot{\beta} = \dot{\alpha} - \dot{\beta} = 0$: $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{z} = \dot{w} = 0$, zweitens wegen $x_2 = \Theta_2 = 0$: $\alpha = \beta = x_0/\lambda, z = w = x_0$. Nach (9) ist $w = x_0 \cos \omega t, \beta = w/\lambda$ eine mögliche Schwingung, und, mit Rücksicht auf (29), nach (25) auch $z = x_0 \cos \omega_1 t, \alpha = z/\lambda$. Da diese Schwingungen allen Anfangsbedingungen genügen, schildern sie (in erster Annäherung) die unter den bezeichneten Umständen wirklich eintretende Bewegung. Gemäss (30) ist somit

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega t) = x_0 \cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega + \omega_1}{2} t, \\ x_2 &= \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega t) = x_0 \sin \frac{\omega - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega + \omega_1}{2} t. \end{aligned}$$

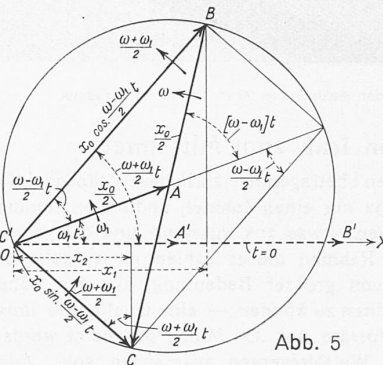


Abb. 5

festen Strahl OX liegen, so ist x_1 die Projektion des Summenvektors OB vom Betrag $x_0 |\cos \frac{\omega - \omega_1}{2} t|$, x_2 diejenige des Differenzvektors OC vom Betrag $x_0 |\sin \frac{\omega - \omega_1}{2} t|$ auf OX . Da im vorliegenden Fall für Kleinheit der relativen Drehschnelle $\omega - \omega_1$ des zweiten gegenüber dem ersten Vektor gesorgt ist, verändern die Dreiecke OAB und OAC , während ihre gemeinsame Seite OA (mit ω_1) um O rotiert, ihre Gestalt nur langsam: x_1 und x_2 sind sozusagen harmonische Schwingungen von der Kreisfrequenz $\frac{\omega + \omega_1}{2}$; die Amplitude der einen nimmt im selben langsamen Rhythmus ab, in welchem die Amplitude der zweiten anschwillt; im Augenblick, wo jene (bei Koinzidenz von B mit O) verschwindet, erreicht diese ihren Höchstwert x_0 , und umgekehrt. Bei einem solchen periodischen Erlöschen der Amplitude einer Schwingung wird als Dauer einer „Schwebung“ die zwischen zwei sukzessiven Nullamplituden verstreichende Zeit τ bezeichnet. τ ist mit andern Worten die Zeit, die der gegenüber dem Vektor OA mit der relativen Drehschnelle $\omega - \omega_1$ rotierende Vektor AB zu einem vollen Umlauf (relativ zu OA) zwischen zwei Koinzidenzen von B mit O benötigt:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega - \omega_1}.$$

Werden also mit zwei Probestäbchen aus verschiedenen Metallen, jedoch von gleichen Dimensionen auf die geschilderte Art Schwebungen bewerkstelligt, so verhalten sich zufolge Gl. (28) die gemessenen Schwebungsdauern wie die Steifen der Stäbchen oder wie deren Elastizitätsmoduln E und E' :

$$\tau' : \tau = E' : E.$$

Die vorstehenden Erörterungen stützen sich auf die schöne und gründliche Abhandlung von Le Rolland und Sorin „Etude d'une méthode utilisant le couplage entre deux systèmes oscillants pour la détermination de la résistance mécanique des constructions et la mesure des modules d'élasticité“¹⁾, wo (S. 146 fg) der Fall der aufrechten (statt hängenden) Pendel durchgerechnet und die allgemeinere Verwendbarkeit sympathischer Pendel zu Steifigkeitsproben, etwa von Flugzeugkonstruktionen, dargelegt ist. K. H. G.

¹⁾ Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, n° 47, Paris 1934.