

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 103/104 (1934)  
**Heft:** 21

## **Inhaltsverzeichnis**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Beitrag zur Berechnung der Schaufelschwingungen bei Turbinen, Kompressoren u. a. m. — Ueber Wärmespannungen bei Schweißungen. — Neuere Architekturen des Auslandes: I. Das Gebäude des Golf-Club in Tokio. II. Die neue Französische Schule in Prag. III. Hochhaus mit Arbeiterwohnungen in Rotterdam. — Die Zonensteuerung in der Wasserversorgungsanlage in Richterswil. — Mitteilungen: Schutz des Diplom-Ingenieur-Titels in Frankreich. Wasserstoff aus elektrischer Ab-

fallenergie für den Betrieb von Verbrennungsmotoren. Die zunehmende Sauerstoffverarmung des Zürichsees. Ein neuer Steuerapparat für parallel arbeitende Kraftwerke. Die akademischen Diskussionsvorträge der Elektrotechnischen Abteilung der E. T. H. Neue Methode zur Bestimmung von Trägheitsmomenten. — Nekrolog: Richard Leumann. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortragskalender.

## Band 104

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.  
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

## Nr. 21

## Beitrag zur Berechnung der Schaufelschwingungen bei Turbinen, Kompressoren u. a. m.

Von Dipl. Ing. W. PETER, A.-G. Brown Boveri & Cie., Baden.

Im Folgenden wird ein praktisches Verfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenzen von Schaufeln veränderlichen Querschnittes angegeben.

Die Berechnung der Schwingungszahlen ist bei den modernen schnellaufenden Maschinen mit hochbeanspruchten Schaufeln unerlässlich geworden, weil sie uns wertvolle Aufschlüsse darüber gibt, wie die Gesamtbeanspruchungen der Schaufeln herabgesetzt und vor allem, wie die gefährlichen Resonanzerscheinungen beseitigt werden können.

An anderer Stelle<sup>1)</sup> haben wir eine Berechnungsmethode veröffentlicht, die in einfacher Weise gestattet, diese Frequenzen, ob statisch, dynamisch, frei oder gebunden, zu ermitteln. Dabei hatten wir jedoch lediglich die Schaufeln konstanten Querschnittes betrachtet, was in der Praxis nur für verhältnismässig kurze Schaufeln zutrifft. Lange Schaufeln werden aus Festigkeitsgründen meist verjüngt, d. h. ihr Querschnitt wird vom Fuss bis zum Kopf allmählich kleiner. Um die Eigenschwingungszahl einer solchen Schaufel zu berechnen, benützt man gewöhnlich die wohl bekannte und allgemein bewährte Energiemethode von Rayleigh<sup>2)</sup>. Wir möchten hier eine andere Methode entwickeln, die, soweit es sich nur darum handelt, die Eigenschwingungszahl einer beliebig verjüngten Schaufel zu ermitteln, mit gleicher Genauigkeit und in erheblich kürzerer Zeit zum Ziele führt. Diese Methode stützt sich hauptsächlich auf die von Prof. E. Hahn, Nancy („SBZ“ Band 87, Seite 1, 1926) veröffentlichten Rechnungen.

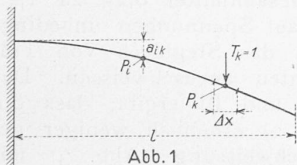


Abb. 1

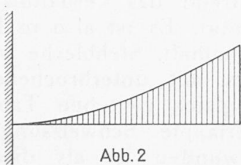


Abb. 2

Betrachten wir eine schwingende Schaufel. Wir denken uns die Trägheitskräfte in  $n$  ihrer Punkte  $P_1, P_2 \dots P_n$  konzentriert.  $T_k$  sei die  $k$ -te Trägheitskraft. Es sei  $a_{ik}$  der Einflusskoeffizient, d. h. der Ausschlag der elastischen Linie im  $i$ -ten Punkte unter dem Einflusse der Einheitslast im  $k$ -ten Punkte (Abb. 1). Dann ist der Ausschlag  $y_i$  des  $i$ -ten Schaufelpunktes unter dem Einfluss aller  $n$  Trägheitskräfte

$$y_i = \sum_k a_{ik} T_k \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Harmonische und gleichphasige Schwingungen angenommen, haben wir

$$y_k = Y_k \sin(\lambda t) \quad (2)$$

Ist  $\mu$  die spezifische Schaufeldichte,  $F_k$  der Schaufelquerschnitt im  $k$ -ten Punkte, so wird

$$T_k = -\mu F_k \ddot{y}_k \Delta x = \mu F_k \lambda^2 y_k \Delta x \quad (3)$$

Demgemäss stellt Abb. 2 den Verlauf der Trägheitskräfte längs der Schaufel dar. Wir erkennen, dass die elastische Linie hauptsächlich durch diejenigen Kräfte, die am freien Ende der Schaufel angreifen, bedingt ist.

Die verschiedenen elastischen Linien, welche die Schaufel annimmt, wenn die Einheitslast an verschiedenen Schaufelpunkten angebracht wird, dürfen mit hinreichender Genauigkeit als ähnlich betrachtet werden. Diese Annahme stimmt nämlich, sofern die verschiedenen Angriffspunkte der Einheitslast gegen das Schaufelende zu gelegen sind,

mit der Wirklichkeit überein und schadet, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, wenig, da eine am Schaufelfuss angreifende Last, die ohnehin viel kleiner ist (Abb. 2), nur geringe Ausbiegungen bewirkt und deshalb die aus der Annahme ähnlicher elastischer Linien entstehenden Fehler nur die kleineren Einflusskoeffizienten betreffen. Wir können also setzen:

$$a_{ik} = c_k a_{i1} \quad (4)$$

womit das Gleichungssystem (1) unter Berücksichtigung von (3) die Form annimmt:

$$y_i = \sum_k c_k a_{i1} \mu F_k \lambda^2 y_k \Delta x, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Setzt man hierin abkürzend

$$\delta_k = \mu F_k \Delta x, \quad d_k = \lambda^2 c_k \delta_k, \quad (5)$$

so wird

$$y_i = \sum_k a_{i1} d_k y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Da nicht alle Ausbiegungen zu verschwinden brauchen, ist die Determinante dieses Systems

$$\begin{vmatrix} (a_{11} d_1 - 1) & a_{11} d_2 & \dots & a_{11} d_n \\ a_{21} d_1 & (a_{21} d_2 - 1) & \dots & a_{21} d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} d_1 & a_{n1} d_2 & \dots & (a_{n1} d_n - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

Da in der Determinante  $\|a_{i1} d_k\|$  sämtliche Unterdeterminanten von höherer als erster Ordnung verschwinden, ergibt die Entwicklung der Determinante (7) nach ihrer Hauptdiagonale:

$$(-1)^n + (-1)^{n-1} \sum_i a_{i1} d_i = 0$$

oder, mit Berücksichtigung von (5) und (4)

$$\lambda^2 = \frac{1}{\sum_i a_{i1} \delta_i} = \frac{1}{\mu \Delta x \sum_i F_i a_{i1}} \quad (8)$$

Setzt man, wie es in der Schwingungstheorie üblich ist:

$$\beta_v^4 = \frac{I^4 \mu F_s \lambda^2}{J_0 E} \quad (9)$$

mit  $F_s$  = Schaufelquerschnitt am freien Ende,  $J_0$  = Trägheitsmoment des Schaufelquerschnittes am Fuss,  $E$  = Elastizitätsmodul,

so wird

$$\beta_v^4 = \frac{I^4}{J_0 E \Delta x \sum_i \frac{F_i}{F_s} a_{i1}} \quad (10)$$

$a_{i1}$  wird nach dem Verfahren von Mohr<sup>3)</sup> wie folgt bestimmt: Bei konstantem Trägheitsmoment ist die Durchbiegung im Punkte  $i$  gleich dem  $1/JE$ -fachen Wert des in  $i$  wirkenden Momentes, das durch die zu  $T_i = 1$  gehörige M-Fläche als Belastungsfläche der Schaufel erzeugt würde. Da in unserem Fall  $J$  veränderlich ist, werden wir statt  $1/JE$  den Wert  $1/J_0 E$  nehmen und statt der gegebenen M-Fläche eine Fläche, deren Ordinaten  $= M_c J_0/J_c$  sind. Es ist zweckmässig, die Rechnung analytisch durchzuführen. Man teilt die Schaufel in  $n$  Elemente. Wenn man  $\frac{I^3}{n J_0 E} a_{i1}' = a_{i1}$  setzt, bekommt man aus Abb. 3 (S. 238):

$$a_{i1}' = \sum_c \left( \frac{i-c}{n} \right)^2 \frac{J_0}{J_c}, \quad (11)$$

mit  $c = 1, 2, \dots, i$ .

und, da  $\Delta x = \frac{l}{n}$ , vereinfacht sich (10) in

$$\beta_v^4 = \frac{n^4}{\sum_i a_{i1}' \frac{F_i}{F_s}} \quad (12)$$

<sup>1)</sup> „BBC-Mitteilungen“, Mai 1934, S. 179 und Juli 1934, S. 123.

<sup>2)</sup> Siehe Stodola, „Dampf- und Gasturbinen“, 5. Auflage, S. 946 u. f.

<sup>3)</sup> O. Mohr, „Abhandlungen aus dem Gebiete der Techn. Mechanik“, 3. Auflage, S. 354. Berlin 1928, W. Ernst & Sohn.